Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 27, n. 3, p. 407 - 413, (2005)
www.sbfisica.org.br

O potencial efetivo para uma teoria com quebra espontânea de simetria

(The effective potential for a theory with spontaneous symmetry breaking)

Denimar Possa, Flávio Pereira e José Alexandre Nogueira[1]

Departamento de Física, Centro de Ciências Exatas, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, ES, Brasil
Recebido em 13/5/2005; Aceito em 31/8/3005

Neste trabalho nós mostramos como determinar o potencial efetivo para uma teoria com quebra espontânea de simetria.
Palavras-chave: potencial efetivo, quebra espontânea de simetria, expansão em "loop".

In this work we show how to derive the effective potential for a theory with spontaneous symmetry breaking.
Keywords: effective potential, spontaneous symmetry breaking, loop expansion.

1. Introdução

O potencial efetivo é uma importante ferramenta para o estudo da quebra espontânea de simetria [1-8], determinação da energia do vácuo (energia de Casimir [9-13]), na renormalização da massa e da constante de acoplamento [14-18], etc.

O potencial efetivo é definido como o valor esperado do operador hamiltoniano calculado no estado, que entre o conjunto de estados $\{\phi\}$, minimiza o valor esperado do operador hamiltoniano $\hat{H}$. Assim,

$$V_{ef}(\phi_c) = MIN_{\{\phi\}}\langle\phi|\hat{H}|\phi\rangle,$$

tal que ϕ_c seja o valor esperado do operador de campo $\hat{\phi}$ calculado neste estado que minimiza a energia,

$$\phi_c = \langle\phi|\hat{\phi}|\phi\rangle.$$

É claro que o potencial efetivo assim definido tem a interpretação de densidade de energia e, portanto, é uma função real [19-21].

Em uma teoria quântica de campos o potencial efetivo é uma generalização quântica do potencial clássico, sendo que o vácuo quântico pode ser obtido do mínimo daquele potencial. O potencial efetivo pode ser expresso como uma expansão em loop (que coincide com uma expansão em potências de $\hbar$), de modo que ele é dado por uma soma do termo clássico com correções que representam o efeito da interação do campo com o vácuo quântico.

Devido a sua interpretação como energia, o potencial efetivo deve necessariamente ser uma função real e convexa. Entretanto, quando a teoria apresenta quebra espontânea de simetria a "tree level", a expansão em "loop" para a determinação do potencial efetivo até a primeira ordem em $\hbar$, conduz a uma função que não é real para todo ϕ. Isto indica que este resultado não deve ser o verdadeiro potencial efetivo. Isto ocorre porque esta função é obtida de uma continuação analítica termo a termo da expansão em $\mathcal{O}(\hbar)$ para o potencial efetivo, e não existe garantia alguma que esta deva ser igual à expansão da continuação analítica do potencial efetivo. Uma vez que somente a parte real de um potencial pode ser interpretada como energia, ingenuamente poderia-se pensar em contornar este problema tomando somente a parte real da continuação analítica da função obtida da expansão em "loop". Porém, o problema ainda não está resolvido, pois o resultado assim obtido conduz a uma função que não é convexa e que, portanto, não pode ser o verdadeiro potencial efetivo. A falha agora está no emprego incorreto da transformada de Legendre para a obtenção do potencial efetivo.

A fim de determinar-se o (verdadeiro ou correto) potencial efetivo, um emprego cuidadoso do procedimento usado para sua obtenção deve ser realizado. O objetivo desse trabalho é mostrar como o (verdadeiro) potencial efetivo é obtido para uma teoria com quebra espontânea de simetria.

O artigo está organizado da seguinte forma: Na seção 2 é mostrado que o potencial efetivo em $\mathcal{O}(\hbar)$, obtido de uma expansão em "loop", para uma teoria com quebra espontânea de simetria, não pode ser o ver-

[1]E-mail: nogueira@cce.ufes.br.

Copyright by the Sociedade Brasileira de Física. Printed in Brazil.

dadeiro potencial efetivo. Na seção 3 é mostrado como obter o verdadeiro potencial efetivo para uma teoria com quebra espontânea de simetria. No apêndice B é dada uma definição precisa da transformada de Legendre. Os cálculos efetuados são realizados no espaço-tempo euclidiano e não são usados sub-índices na notação para indicar este fato.

2. O potencial efetivo

Seja a teoria determinada pela densidade lagrangiana

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2}M^2\phi^2 - \frac{2\beta^2}{4!}\phi^4, \quad (1)$$

com a constante de acoplamento $\lambda = 2\beta^2 > 0$, de modo a garantir a estabilidade da teoria. Considere somente valores de $M^2 > 0$, para os quais a simetria de reflexão de ϕ na origem é espontaneamente quebrada. O potencial clássico é identificado com

$$V(\phi) = -\frac{1}{2}M^2\phi^2 + \frac{2\beta^2}{4!}\phi^4, \quad (2)$$

e o mínimo é degenerado em

$$\phi_\pm = \pm\sqrt{3}\frac{M}{\beta}. \quad (3)$$

O potencial efetivo pode ser determinado a partir da equação[2] [15, 21]

$$V_{ef}(\phi_c) = V_{cl}(\phi_c) - \frac{\hbar}{2\Omega}\left(\frac{d\zeta_m}{ds}(0) + \zeta_m(0)\ln\mu^2\right), \quad (4)$$

com a função zeta $\zeta_m(s)$ dada por

$$\zeta_m(s) = \frac{\Omega}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{+\infty} d^4k[k^2 + v^2]^{-s}, \quad (5)$$

onde $v^2 = V''_{cl}(\phi_c) = \beta^2\phi_c^2 - M^2$. Para $v^2 > 0$ a integral pode ser realizada usando (veja Apêndice A)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[k^2 + A^2\right]^{-s} d^m k = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}\Gamma\left(s - \frac{m}{2}\right)}{\Gamma(s)}\left(A^2\right)^{\frac{m}{2}-s}, \quad (6)$$

obtendo-se

$$\zeta_m(s) = \frac{\Omega}{(2\pi)^4}\frac{\pi^2\Gamma(s-2)}{\Gamma(s)}\left(v^2\right)^{2-s}. \quad (7)$$

Usando a propriedade $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$, tem-se

$$\zeta_m(s) = \frac{\Omega}{16\pi^2}\frac{\left(v^2\right)^{2-s}}{(s-1)(s-2)}. \quad (8)$$

Assim,

$$\zeta_m(0) = \frac{\Omega v^4}{32\pi^2} \quad (9)$$

e

$$\frac{d\zeta_m}{ds}(0) = \frac{v^4}{32\pi^2}\left[\frac{3}{2} - \ln\left(v^2\right)\right]. \quad (10)$$

Substituindo (9) e (10) em (4), o potencial efetivo é, então, dado por

$$V_{ef}(\phi_c) = V_{cl}(\phi_c) + \frac{\hbar v^4}{64\pi^2}\left[\ln\left(\frac{v^2}{\mu^2}\right) - \frac{3}{2}\right], \quad (11)$$

expressão válida para $v^2 \geq 0$, isto é, $\phi_c^2 \geq \frac{M^2}{\beta^2}$.

Ingenuamente, poderia se pensar em usar o resultado (11) para determinar o estado de vácuo da teoria. Porém, tal procedimento não é correto, pois a Eq. (11) somente é válida para $\phi_c^2 \geq \frac{M^2}{\beta^2}$, deixando de fora uma importante região, onde se encontra $\phi = 0$. Uma forma imediata de se contornar o problema seria estender (11) para v imaginário. Entretanto, como se sabe o potencial efetivo é interpretado como densidade de energia e, sendo assim, é uma função real. Assim, quando se faz a extensão analítica de (11) para a região em que $v^2 < 0$, obtém-se uma função não real. Isto indica que esse resultado não deve ser o potencial efetivo verdadeiro. Para entender o que está acontecendo, deve-se notar que este último resultado é obtido através de uma continuação analítica termo a termo da expansão em "loop" para o potencial efetivo, e nada garante que esta deva ser igual à expansão da continuação analítica do potencial efetivo. O que se quer enfatizar é que não existe problema algum com o potencial efetivo, mas sim na maneira com que o cálculo foi feito, usando uma expansão assintótica em $\mathcal{O}(\hbar)$. O método usado para obter a expansão assintótica somente faz sentido se o potencial clássico for convexo, e portanto a parte imaginária é o preço que se paga por usá-la inapropriadamente. Para salvar o cálculo, nota-se que somente a parte real de um potencial pode ser interpretado como energia [3]. Assim, uma maneira direta de contornar o problema é tomar a parte real da continuação analítica, isto é,

$$V_{ef}(\phi_c) = Real\left\{V_{cl}(\phi_c) + \hbar V_{ef}^{(1)}(\phi_c)\right\}. \quad (12)$$

No entanto, novamente o problema não está resolvido, pois, como se sabe, o potencial efetivo é convexo, o que não ocorre com o potencial da Eq. (12). A falha agora é decorrente do uso inadequado da transformada de Legendre na obtenção do potencial efetivo. Usando uma definição precisa desta transformada (veja Apêndice B) obtém-se, como é esperado, um resultado convexo [7].

3. O potencial efetivo verdadeiro

Considere o caso simples onde o funcional gerador das funções de Green conexas[4]

$$W[J] = -\int V_{cl}(\phi_0)d^4x + \int J\phi_0 d^4x, \quad (13)$$

é substituído por uma aproximação de ordem zero, com fontes e campos uniformes. Então, este funcional gerador fica dado, para $\mathcal{O}(\hbar^0)$, pelo produto do volume espaço-temporal $V_{ol}\tau$ com uma função ordinária $w(J)$, dada por

$$w(J) = J\phi_0 - v(\phi_0). \quad (14)$$

[2] Nós usamos $\hbar = c = 1$, contudo, mantemos $\hbar$ para marcar as correções quânticas.

[3] A parte imaginária do potencial efetivo pode ser interpretada como a razão de decaimento por unidade de volume de um estado bem definido [22].

[4] Note que $\phi_c = \phi_0$ em $\mathcal{O}(\hbar^0)$.

A fim de obter uma compreensão mais simples do procedimento, trata-se primeiramente do caso sem quebra espontânea de simetria, ou seja, quando $M^2 = -m^2$, com m real. Assim,

$$v(\phi_0) = \frac{1}{2}m^2\phi_0^2 + \frac{1}{12}\beta^2\phi_0^4. \tag{15}$$

O campo ϕ_0 é uma função da fonte J determinado pela equação clássica

$$\frac{dv(\phi_0)}{d\phi_0} = m^2\phi_0 + \frac{\beta^2}{3}\phi_0^3 = J. \tag{16}$$

A solução $\phi_0(J)$ pode ser determinada graficamente encontrando-se o valor de ϕ_0 para o qual a curva que representa a função $\frac{dv}{d\phi_0}(\phi_0)$ intercepta $\frac{dv}{d\phi_0} = J$. Neste caso cada valor de J' determina um valor único para ϕ_0', como pode ser visto na Fig. 1.

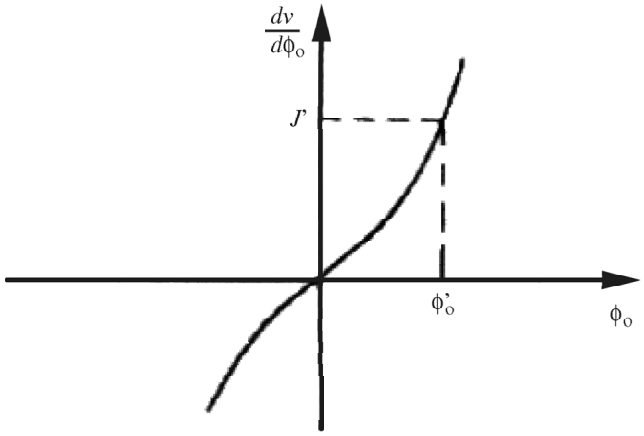

Figura 1 - Determinação gráfica de $\phi_0(J)$.

Como a ação é estacionária sob variações de ϕ_0 com J fixo,

$$\frac{dw}{dJ}(J) = \phi_0(J). \tag{17}$$

A derivada segunda é dada por

$$\frac{d^2w}{dJ^2}(J) = \frac{d\phi_0}{dJ}(J). \tag{18}$$

De acordo com a Fig. 1, $\phi_0(J)$ é uma função crescente, e portanto

$$\frac{d^2w}{dJ^2}(J) > 0, \tag{19}$$

ou seja, a função $w(J)$ é convexa, conforme esperado [21]. O gráfico desta função é esboçado na Fig. 2.

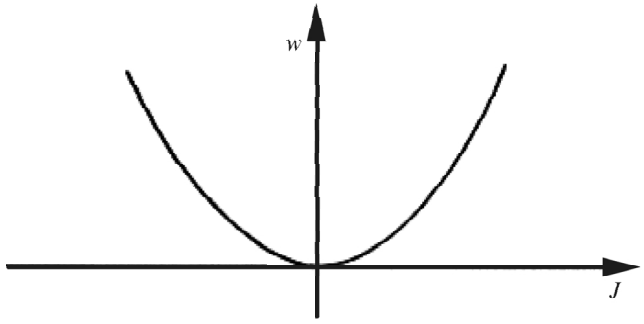

Figura 2 - A função $w(J)$ para o caso sem quebra espontânea de simetria.

O potencial efetivo, neste caso, é dado pela transformada de Legendre

$$V_{ef}(\phi_0) = J\phi_0 - w(J). \tag{20}$$

Para determinar $V_{ef}(\phi_0)$ é necessário encontrar $V_{ef}(\phi_0')$ para cada ϕ_0' dado. Mas, dado ϕ_0' que J' está associado a ele. Como pode ser visto do Apêndice B, $V_{ef}(\phi_0')$ é dado pela máxima distância entre a reta $\phi_0'J$ e a curva $w(J)$ que é determinada por

$$\left.\frac{dw}{dJ}\right|_{J'} = \phi_0'. \tag{21}$$

Uma vez que, como pode ser observado na Fig. 1, para cada valor de J' existe um único possível valor de ϕ_0'. Isto implica que a derivada de $w(J)$ com relação a J é contínua. Desta forma $V_{ef}(\phi_0)$ é facilmente obtida, veja Fig. 3.

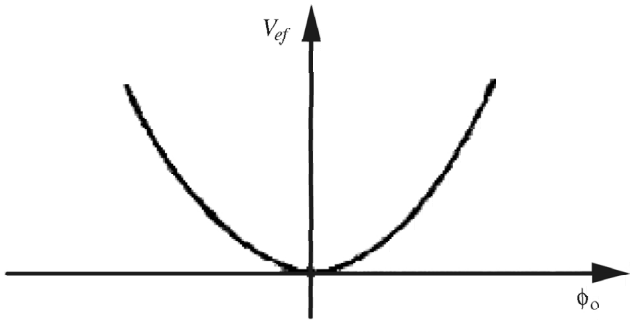

Figura 3 - Potencial Efetivo para o caso sem quebra espontânea de simetria

Para o caso $M^2 = m^2$, m real (com quebra espontânea de simetria), o potencial clássico é dado por

$$v(\phi_0) = -\frac{m^2}{2}\phi_0^2 + \frac{\beta^2}{12}\phi_0^4. \tag{22}$$

O gráfico desta função encontra-se na Fig. 4. Os pontos de mínimo degenerados são dados por

$$\phi_\pm = \pm\sqrt{3}\frac{m}{\beta}. \tag{23}$$

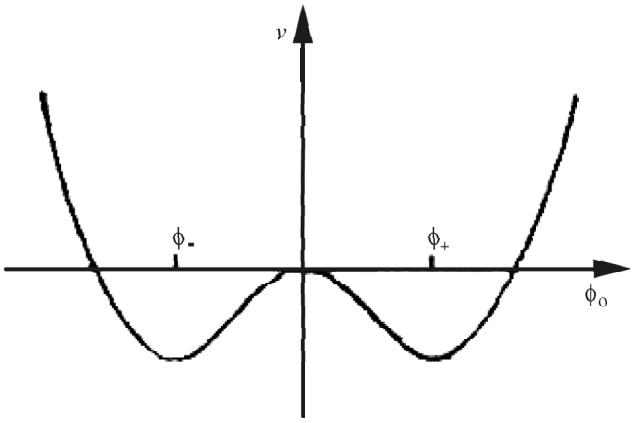

Figura 4 - Potencial com quebra espontânea de simetria.

Como no caso anterior, o campo $\phi_0(J)$ é determinado através da equação $\frac{dv}{d\phi_0}(\phi_0) = J$, sendo que agora

$$\frac{dv}{d\phi_0}(\phi_0) = -M^2\phi_0 + \frac{\beta^2}{3}\phi_0^3. \tag{24}$$

O gráfico de $\frac{dv}{d\phi_0}(\phi_0)$ é ilustrado na Fig. 5. Os pontos estacionários de $\frac{dv}{d\phi_0}$ são dados por

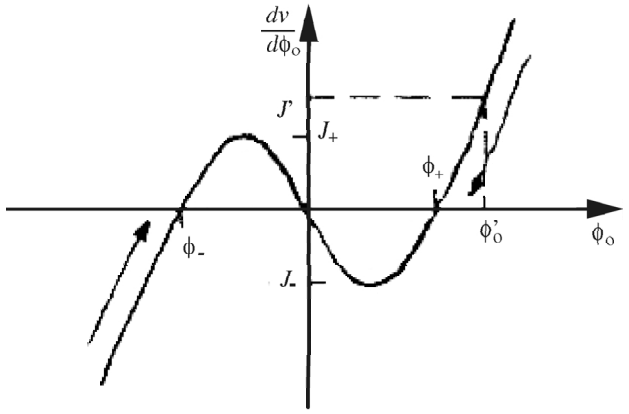

Figura 5 - Determinação gráfica de $\phi_0(J)$ para o caso com quebra espontânea de simetria.

$$\pm\,\phi_s = \pm\frac{M}{\beta}, \tag{25}$$

e definem

$$J_\pm = v'(\mp\phi_s) = \pm\frac{2}{3}\frac{M^3}{\beta}. \tag{26}$$

Para $J > J_+$ ou $J < J_-$, a solução $\phi_0(J)$ é única. Entretanto, quando $J_- < J < J_+$ existem três valores possíveis para $\phi_0(J)$. Esta ambigüidade é removida lembrando que (para cada J') o valor de ϕ_0' é definido como sendo aquele que implica na menor energia para o sistema.

A densidade de energia do estado de vácuo perturbado adiabaticamente por uma fonte J é dada por

$$\varepsilon(J) = -w(J) = v\left(\phi_0(J)\right) - J\phi_0(J). \tag{27}$$

Substituindo na Eq. (27) J por $\frac{dv}{d\phi_0}$, obtém-se uma função, denotada por ε', que determina o valor da densidade de energia para todos os valores possíveis de ϕ_0 (assumidos ou não pelo sistema físico). Tem-se, portanto,

$$\varepsilon'(\phi_0) = \frac{m^2}{2}\phi_0^2 - \frac{\beta^2}{4}\phi_0^4. \tag{28}$$

Veja o gráfico da Fig. 6.

Para cada valor de J, o campo ϕ_0 assume o valor que minimiza a função ε'. Em princípio, quando $0 < J < J_+$, o campo ϕ_0 poderia assumir três valores, sendo um deles maior do que ϕ_+, e os outros dois na região $\phi_- < \phi_0 < \phi_+$ (veja a Fig. 4). Pela Fig. 5 é fácil verificar que, dentre esses valores para o campo, o que leva a um menor valor de ε' é aquele em que $\phi_0 > \phi_+$. Portanto, para $J > 0$, o campo ϕ_0 assume somente os valores $\phi_0 > \phi_+$. Por um raciocínio idêntico, tem-se que, para $J < 0$, o campo ϕ_0 assume somente os valores $\phi_0 < \phi_-$.

[5]Note que $V_{ef}(\phi_0')$ significa $V_{ef}(\phi_0)$ calculado no ponto $\phi_0 = \phi_0'$.

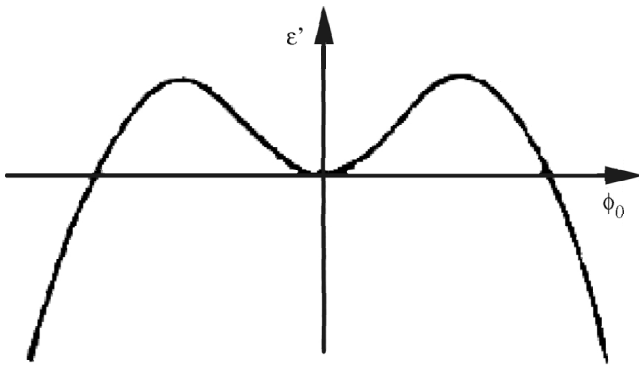

Figura 6 - A função ε'.

Pode-se obter agora, a partir da Eq. (28) e dos valores assumidos por ϕ_0, a função w. Ela é representada pelo gráfico da Fig. 7.

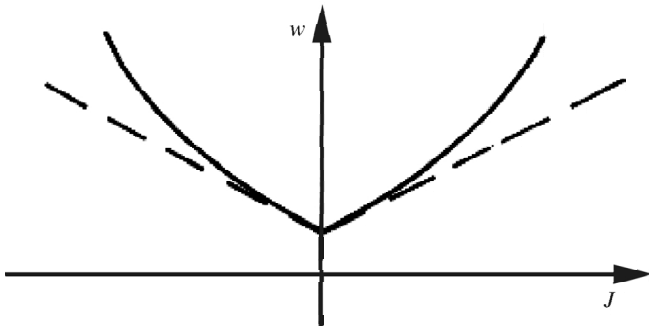

Figura 7 - A função $w(J)$ para o caso com quebra espontânea de simetria. Note que esta função tem um "bico".

A função w é contínua em $J = 0$, onde

$$w(0) = -v(\phi_\pm) = \frac{3}{4}\frac{M^4}{\beta^2}. \tag{29}$$

Entretanto, existe uma descontinuidade na derivada primeira de w em $J = 0$, ou seja,

$$\lim_{J\to 0^\pm}\left[\frac{dw}{dJ}(J)\right] = \phi_\pm. \tag{30}$$

Essa função tem um "bico" em $J = 0$. Essa é uma característica de sistemas que apresentam quebra espontânea de simetria. Um fato a ser destacado em toda esta discussão é que a função

$$\frac{d^2w}{dJ^2}(J) = \frac{d\phi}{dJ}(J) > 0, \tag{31}$$

como se pode ver pela Fig. 7. Portanto, mesmo nesse caso, a função w é convexa.

O potencial efetivo é agora obtido pela aplicação da transformada de Legendre, Eq. (47), à função w, obtendo-se[5]

$$V_{ef}(\phi_0') = MAX_J\left\{J\phi_0' - w(J)\right\}. \tag{32}$$

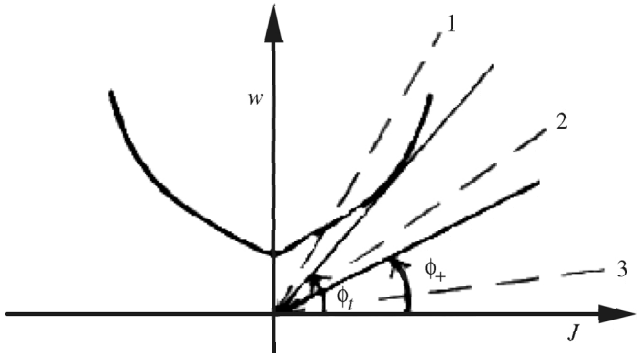

Figura 8 - Construção da transformada de Legendre para o caso com quebra espontânea de simetria, onde a função $w(J)$ tem um "bico". Linhas contínuas: retas para $\phi_0' = \phi_+$ e $\phi_0' = \phi_t$. Linhas tracejadas: reta-1 para $\phi_0' > \phi_t$; reta-2 para $\phi_+ < \phi_0' < \phi_t$ e reta-3 para $\phi_0' < \phi_+$.

Reportando-se ao gráfico da Fig. 7 e adicionando a ele a reta com coeficiente angular igual a ϕ_0', obtém-se a Fig. 8. A transformada de Legendre se dá com a máxima separação vertical entre a reta e a curva para $w(J)$. Se a reta estiver abaixo da curva, a separação é negativa. O máximo nesse caso corresponde à mínima distância geométrica (medida verticalmente na figura). Esta situação acontece quando $-\phi_t < \phi_0' < \phi_t$, onde ϕ_t é definido por $v(\phi_t) = 0$, ou seja, $\phi_t = \sqrt{2}\frac{M}{\beta}$. Portanto, para ϕ_0' nesta região, o potencial efetivo é negativo. A derivada $\frac{dw}{dJ}$ tem uma descontinuidade na origem (veja Eq. (30)), e ambas as derivadas à direita (ϕ_+) e à esquerda (ϕ_-) são não nulas. Daí decorre um fato importante. Quando $\phi_0' = \phi_+$, a inclinação da reta é igual à derivada à direita na origem, e a distância mínima entre as curvas é $w(0) = \frac{3}{4}\frac{M^4}{\beta^2}$. Quando a inclinação diminui, a distância mínima continua a ser $w(0)$, isto ocorrendo até que a inclinação se torne $\phi_0' = \phi_- = -\phi_+$. Portanto, nesta região, a transformada de Legendre é constante e tem-se

$$V_{ef}(\phi_0') = v(\phi_+) = v(\phi_-); \qquad \phi_- < \phi_0' < \phi_+. \tag{33}$$

Fora desta região ($\phi_0' > \phi_+$ ou $\phi_0' < \phi_-$), o potencial efetivo assume os mesmos valores que o potencial em ordem zero, ou seja,

$$V_{ef}(\phi_0') = v(\phi_0'). \tag{34}$$

O gráfico do potencial efetivo é mostrado na Fig. 9. A linha pontilhada nesta figura representa a parte real da continuação analítica de v na região $\phi_- < \phi_c < \phi_+$.

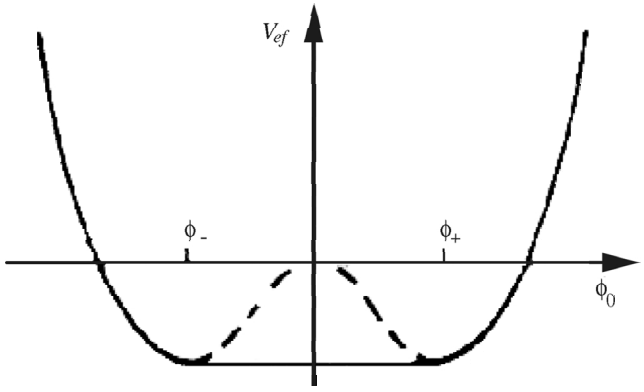

Figura 9 - Potencial efetivo para quando o potencial clássico tem a forma de duplo poço.

O verdadeiro potencial efetivo calculado até ordem zero corresponde ao potencial clássico com a parte não convexa substituída por uma linha reta horizontal. Ele satisfaz, portanto, o critério de convexidade. Embora a construção acima tenha sido realizada para o potencial em ordem zero, o raciocínio não é alterado quando se inclui termos de $\mathcal{O}(\hbar)$. Portanto, o potencial efetivo pode ser construído a partir da parte real da expansão em loop, substituindo a parte não convexa desta por uma linha reta. Esta construção, chamada construção de Maxwell, é denotada pelo sub-índice M, de modo que o potencial efetivo é expresso como

$$V_{ef}(\phi_c) = \left[Real\left\{V_{cl}(\phi_c) + \hbar V^{(1)}(\phi_c)\right\}\right]_M. \tag{35}$$

4. Conclusão

No caso de teorias cujo potencial clássico tenha uma parte não convexa, isto é, potenciais que a "tree level" apresentam mais de um mínimo, o cálculo do potencial efetivo a um "loop" deve ser realizado considerando a construção de Maxwell. A construção de Maxwell é obtida substituindo-se a parte não convexa por uma linha reta unindo os dois mínimos.

5. Apêndice A

Neste apêndice é demonstrada a relação

$$\int_{-\infty}^{\infty} (K^2 + A^2)^{-s} d^m K = \pi^{\frac{m}{2}} \frac{\Gamma(s - \frac{m}{2})}{\Gamma(s)} (A^2)^{\frac{m}{2} - s}.$$

A função $\Gamma(s)$ é definida por

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx, \qquad Re(s) > 0. \tag{36}$$

De início, convém obter (fazendo $y = (K^2 + A^2)x$)

$$(K^2 + A^2)^{-s}\Gamma(s) = \int_0^{\infty} (K^2 + A^2)^{-s} y^{s-1} e^{-y} dy = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x(K^2+A^2)} dx. \tag{37}$$

Dividindo ambos os membros por $\Gamma(s)$, (37) se torna

$$(K^2 + A^2)^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x(K^2+A^2)} dx. \tag{38}$$

Agora, com a relação

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(p^2) d^n p = \frac{2\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma(\frac{N}{2})} \int_0^{\infty} p^{N-1} f(p^2) dp, \tag{39}$$

obtém-se

$$\int_{-\infty}^{\infty} (K^2 + A^2)^{-s} d^m K = \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})} \int_0^{\infty} K^{m-1} (K^2 + A^2)^{-s} dK. \tag{40}$$

Com o uso de (38) no segundo membro de (40) obtém-se

$$\int_{-\infty}^{\infty} (K^2 + A^2)^{-s} d^m K = \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(s)} \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-xA^2} dx \int_0^{\infty} K^{m-1} e^{-xK^2} dK. \tag{41}$$

A integral em K pode ser reescrita usando a mudança de variável $z = xK^2$, obtendo-se

$$\int_0^\infty K^{m-1} e^{-xK^2} dk = \frac{x^{-\frac{m}{2}}}{2} \int_0^\infty z^{\frac{m-2}{2}} e^{-z} dz, \qquad (42)$$

ou seja,

$$\int_0^\infty K^{m-1} e^{-xK^2} dk = \frac{x^{-\frac{m}{2}}}{2} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right). \qquad (43)$$

Resolvida a integral em K, (41) torna-se

$$\int_{-\infty}^\infty (K^2 + A^2)^{-s} d^m K = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(s)} \int_0^\infty x^{s-\frac{m}{2}-1} e^{-xA^2} dx. \qquad (44)$$

Usando $s' = s - \frac{m}{2}$ e $K = 0$ na integral em (38), a expressão para (44) é dada por

$$\int_{-\infty}^\infty (K^2 + A^2)^{-s} d^m K = \pi^{\frac{m}{2}} \frac{\Gamma(s - \frac{m}{2})}{\Gamma(s)} (A^2)^{\frac{m}{2}-s}, \qquad (45)$$

e está demonstrado o resultado.

6. Apêndice B. A transformada de Legendre

A *transformada de Legendre* é uma regra em que dada uma função $f(x)$ produz uma outra $g(p)$. Assim, dada a função $f(x)$, deseja-se determinar uma nova função $g(p)$. Para se determinar $g(p)$, deve-se encontrar os valores de $g(p')$ para todo p'. Então, a pergunta é: dado p' como determinar $g(p')$?

Define-se a função G de x e p, tal que,

$$G(x,p) = xp - f(x). \qquad (46)$$

Note que para um determinado p' existem infinitos x que fornecerão diferentes $G(x,p')$. Para associar a cada p' um único $G(x',p') = g(p')$ define-se x', tal que,

$$\begin{aligned} g(p') &= G(x',p') = MAX_x \left[G(x,p')\right] \\ &= max_x \left[xp' - f(x)\right]. \end{aligned} \qquad (47)$$

Geometricamente $g(p')$ é dada pela máxima distância entre a reta xp' (com coeficiente angular p' e a curva $f(x)$[6].

Se $f(x)$ for uma função convexa e diferenciável, existe um máximo simples, e x' é tal que

$$\left.\frac{\partial G(x,p')}{\partial x}\right|_{x'} = 0, \qquad (48)$$

então,

$$p' = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x'}. \qquad (49)$$

A Eq. (49) associa a cada p um x, o que define $x = x(p)$. Nesse caso

$$g(p) = px(p) - f\left(x(p)\right), \qquad (50)$$

e a transformada de Legendre é uma função contínua e diferenciável.

[6]Note que a reta xp' é paralela à reta tangente à curva $f(x)$ no ponto x'.

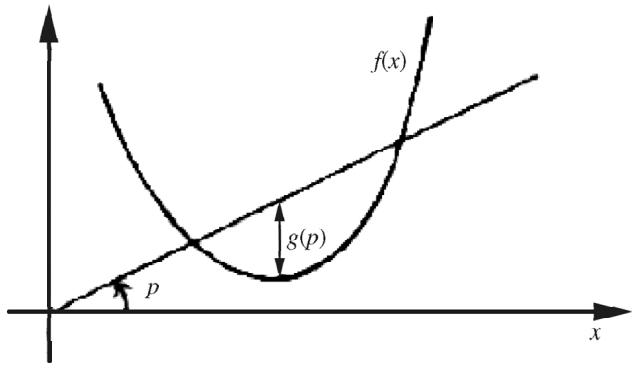

Figura 10 - A transformada de Legendre é a máxima separação entre a reta com inclinação p e a função $f(x)$.

Referências

[1] L.H. Ryder, *Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1985).

[2] R.J. Rivers, *Path Integral Methods in Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1987).

[3] K. Huang, *Quarks Leptons & Gauge Fields* (World Scientific Publishing Company, Singapore, 1982).

[4] P.H. Frampton, *Gauge Field Theories* (The Benjamin/Cummings Publishing Company, INC, Menlo Park, California, 1987).

[5] M. Kaku, *Quantum Field Theory. A Modern Introduction*, (Oxford University Press, Inc., Oxford, 1993).

[6] C. Itzykson and J.B. Zuber, *Quantum Field Theory*, (McGraw-Hill Book Company, Singapore, 1985).

[7] L.S. Brown, *Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1992).

[8] Ashok Das, *Field Theory a Path Integral Approach* (World Scientific Publishing Company, Singapore, 1993).

[9] H.G.B. Casimir, Proc. K. Ned. Akad. Wet. **51**, 793 (1948).

[10] G. Plunien, B. Müller and W. Greiner, Phys. Rept. **134**, 89 (1986).

[11] M. Bordag, U. Mohideen and V.M. Mostepanenko, Phys. Rept. **353**, 1 (2001).

[12] M.V. Cougo-Pinto, C. Farina e A.C. Tort, Rev. Bras. Ens. Fís. **22**, 122 (2000).

[13] J.J.P. Sobrinho e A.C. Tort, Rev. Bras. Ens. Fís. **23**, 401 (2001).

[14] J. Iliopoulos, C. Itzykson and A. Martin, Rev. Mod. Phys. **47**, 165 (1975).

[15] P. Ramond, *Field Theory, A Modern Primer* (The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., Massachusetts, 1981).

[16] J.V. Narlikar and T. Padmanabhan, *Gravity, Gauge Theories and Quantum Cosmology* (D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1986).

[17] R. Jackiw, Phys. Rev. **D 9**, 1686 (1974).

[18] S. Coleman and E. Weinberg, Phys. Rev. **D 7**, 1888 (1973).

[19] T.L. Curtright and C.B. Thorn, J. Math. Phys. **25**, 541 (1984).

[20] K. Cahill, Phys. Rev. **D 52**, 4704 (1995).

[21] D. Possa, F. Pereira e J.A. Nogueira, artigo aceito para publicação na Rev. Bras. Ens. Fís. em 27 de julho de 2005.

[22] E.J. Weinberg and A. Wu, Phys. Rev. **D 36**, 2474 (1987).