

## Comparação entre a mecânica relativista e a mecânica newtoniana

(A comparison between the relativistic and the Newtonian mechanics)

G.F. Leal Ferreira

Instituto de Física de São Carlos, D.F.C.M., São Carlos, SP, Brasil.

Recebido em 7/5/03; Manuscrito revisado recebido em 28/11/03; Aceito em 5/1/04

Comparação entre as mecânicas Relativista e Newtoniana é realizada num dado sistema de coordenadas, sem nenhuma preocupação com eventuais outros sistemas de coordenadas inerciais em movimento relativo, o que permite percepção mais direta das diferenças entre elas. Toma-se como ponto de partida a equivalência entre massa e energia e chega-se, como anteriormente realizado por T. Theodorsen, à correta dependência entre massa e velocidade.

**Palavras-chave:** Mecânica Clássica, Mecânica Relativística, equivalência massa-energia.

A comparison between the relativistic and the Newtonian mechanics is carried out inside a single coordinate system without reference to other coordinate systems moving relatively to ours. This allows a more direct understanding of the differences between the two mechanics. As a starting point, the equivalence between mass and energy is assumed and taking the route suggested by T. Theodorsen, the correct dependence of the mass on the velocity is obtained.

**Keywords:** Classical Mechanics, Relativistic Mechanics, mass-energy equivalence.

### 1. Introdução

A Teoria da Relatividade, como usualmente apresentada, dá especial ênfase às mudanças de sistemas de coordenadas, em razão de suas origens. Mesmo um dos seus principais resultados dinâmicos, o da variação da massa com a velocidade, está, na maioria das apresentações, ligado, direta ou indiretamente [1,2], àquelas trocas de sistema de coordenadas. Isto é inconveniente já que as modificações parecem assim se dever unicamente a mudanças de sistemas de coordenadas, quando, na prática, elas ocorrem aqui mesmo, nos nossos laboratórios. E o presente artigo não tem nada de original a não ser esquecer outros sistemas de coordenadas e dar ênfase às mudanças entre a formulação newtoniana, em que a massa é constante (e o conceito de energia é acessório), e a relativista em que tal não ocorre. Para isto, estaremos nos valendo de formulação apresentada em [3], cujo ponto de partida é o da equivalência entre massa e energia, como defendido por Sandin [4] na controvérsia sobre o significado de  $m$  na famosa relação  $E = mc^2$ , se constante ou variável, discutido em [5]. Em palavras mais simples, se a 'inércia' depende ou não da velocidade. Como operamos num único sistema de coordenadas, constatamos que  $m$  depende de  $v$ , sem outras filosofias.

### 2. Mecânica newtoniana

A Mecânica Newtoniana da massa pontual constante,  $m$ , é dada simplesmente por

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \text{ com } \vec{p} = m\vec{v}. \quad (1)$$

sendo  $\vec{F}$  a força,  $\vec{p}$  o momento,  $\vec{v}$  a velocidade, e  $t$  o tempo. O conceito de energia é na Mecânica Newtoniana um conceito derivado e é obtido da Eq. 1 multiplicando-a escalarmente por  $\vec{v}$

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \vec{F} \cdot d\vec{s} = m\vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{m}{2} d\vec{v}^2 = dE_c \quad (2)$$

em que  $W$  é o trabalho de  $\vec{F}$ ,  $d\vec{s}$  o deslocamento em  $dt$  e  $E_c$  a energia cinética. Alternativamente, o conceito de energia, de alto teor físico, é usado como primitivo nas formulações lagrangiana e hamiltoniana, completado pelo conceito de energia potencial.

#### 2.1. Mecânica newtoniana da massa variável

A Mecânica Newtoniana também sabe tratar sistemas em que a massa é variável. Em especial, se a massa é adicionada ao sistema do repouso, a Eq. 1 é ainda válida com  $m = m(t)$ . Já a Eq. 2 tornar-se-ia

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \vec{F} \cdot d\vec{s} = m(t)\vec{v} \cdot d\vec{v} + \vec{v}^2 dm(t), \quad (3)$$

$dW$  não sendo mais uma diferencial exata da energia cinética, como é no caso em que a massa é constante. Temos para  $dE_c$ ,

$$dE_c = \frac{d(m(t)v^2)}{2dt} = m(t)\vec{v} \cdot d\vec{v} + \frac{v^2 dm}{2} < dW, \quad (4)$$

isto é, a variação da energia cinética é menor do que o trabalho: há algo de irreversível no sistema de massa variável Newtoniano. Comparando as Eqs. 3 e 4, vê-se que a perda de energia mecânica diferencial é  $v^2 dm(t)/2$ .

Enviar correspondência para G.F. Leal Ferreira. E-mail: guilherm@ifsc.usp.br.

### 3. Mecânica relativista

Os primeiros desvios à lei de Newton, Eq. 1, foram observados nas experiências de Kaufmann [5], em que a massa dos elétrons, acelerados em campos elétricos e magnéticos, mostrava ser variável com a velocidade. Portanto, devemos esperar, em princípio, não mais uma única equação como no caso newtoniano, mas duas equações, de forma a estabelecer como se dá aquela variação da massa com a velocidade. Para isso, seguiremos [3], que parte da equivalência entre massa  $m(v)$  e energia  $E(v)$  [5]

$$E(v) = m(v)c^2 \quad (5)$$

A Eq. 1 será agora [3]

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} \vec{p}, \quad \text{com } \vec{p} = \frac{E(v)}{c^2} \vec{v} \quad (6)$$

sendo  $c$  a velocidade da luz. Segundo ainda [3], vamos impor que o trabalho da força aplicada seja igual ao aumento da energia  $E$ :

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \vec{F} \cdot d\vec{s} = dE(v) \quad (7)$$

Notemos agora que se multiplicarmos a Eq. 6 escalarmente por  $\vec{v}$  e usarmos a Eq. 5, obteremos

$$c^2 dE = \vec{v} \cdot d(E\vec{v}) \quad (8)$$

equação que pode ser integrada multiplicando-se os dois membros por  $E$ , fornecendo a dependência de  $E$  com a velocidade

$$E(v) = \frac{E_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (9)$$

sendo  $E_0$  a energia (ou equivalentemente a massa) de repouso. Portanto, a admissão da Eq. 5, ou seja o da equivalência entre a massa e energia, leva à relação correta entre massa relativista e velocidade.

Voltando à Eq. 7, suporte da Eq. 9, ela e as Eqs. 6 se constituem nas equações da Mecânica Relativista. Portanto, a mudança significativa operada na Mecânica Newtoniana é a incorporação do trabalho realizado sobre a massa (energia) à própria massa (energia), de acordo com a Eq. 7, tornando o trabalho  $dW$  uma diferencial exata.

### 4. A Hamiltoniana e a Lagrangiana relativistas

Mostraremos agora que as equações da formulação relativista da seção anterior levam às expressões corretas da hamiltoniana e lagrangiana relativista.

Se a força deriva de um potencial  $U(\vec{x})$ ,

$$\vec{F} \cdot d\vec{s} = -dU(\vec{x}), \quad (10)$$

e a Eq. 7 se escreve

$$d(E(v) + U(\vec{x})) = 0, \quad (11)$$

definindo a energia total  $H$ ,

$$H = E(v) + U(\vec{x}), \quad (12)$$

$H$ , sendo a energia total, deve ser a hamiltoniana quando expresso em função de  $p_i$  e  $x_i$ , componentes de  $\vec{p}$ , e de  $\vec{x}$  (lembramos que a Eq. 6 define o momento em função de  $E(v)\vec{v}$ ). Sendo  $H(x_i, p_i)$ , devemos então ter

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{e} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (13)$$

em que o ponto significa derivada em relação ao tempo. A equação em  $\dot{p}_i$  reproduz a Eq. 6. Para analisar a equação em  $\dot{x}_i$ , vamos primeiro supor que estamos em uma dimensão. Teríamos

$$\dot{x} = v = \frac{c^2 p}{E} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial E}{\partial p} = \frac{dE}{dp}, \quad (14)$$

em que as Eqs. 6, 12 e 13 foram usadas. O terceiro e o sexto termos formam a equação diferencial

$$\frac{c^2 p}{E} = \frac{dE}{dp}, \quad (15)$$

que integrada dá

$$E^2 = c^2 p^2 + E_0^2, \quad (16)$$

sendo  $E_0$  a energia de repouso. A Eq. 16 é uma conhecida relação em dinâmica relativista, confirmando que  $H$ , considerado dependente de  $x$  e  $p$ , é de fato a hamiltoniana.

No caso geral, tridimensional, voltando à Eq. 14, teríamos

$$\dot{x}_i = v_i \frac{c^2 p_i}{E} = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{dE}{dp} \frac{\partial p}{\partial p_i}, \quad (17)$$

em que se usa o fato de  $E$  ser função de  $p$ , módulo de  $\vec{p}$ . Elevando ao quadrado e somando nas componentes, chega-se à Eq. 15 e daí à Eq. 16, levando em conta que os  $\frac{\partial p}{\partial p_i}$  são coeficientes angulares.

A lagrangiana  $L(x_i, v_i)$  é obtida pelo procedimento usual, [2].

$$L = \sum p_i \dot{x}_i - H = - \left( E_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + U(\vec{x}) \right) \quad (18)$$

em que empregamos as Eqs. 6, 9 e 12.

### 5. Uma comparação

Somos tentados a comparar a Mecânica Relativista com a newtoniana de massa variável, tratada na seção 2.1. Como a diferença entre elas está em que o trabalho nesta última não é reversível, Eq. 4, poderíamos especular, na tentativa de dar ao tratamento relativista a mesma interpretação que no newtoniano, que o trabalho perdido (ver abaixo da Eq. 4)  $v^2 dm(v)/2$  no caso newtoniano, tornar-se-ia, no relativista, a diferencial de uma espécie de energia interna que iria sendo 'absorvida'. Nessa linha de raciocínio, a energia cinética continuaria sendo  $m(v)v^2/2$  e a energia interna total seria igual à diferença entre a energia  $E(v)$ , Eq. 9, e a energia cinética  $m(v)v^2/2$ , igual a  $E(v)(1 - v^2/2c^2)$ . Não há, porém, indícios de que este racionalismo tenha apoio na realidade, para a qual  $E - E_0$  parece ser a energia cinética da

massa pontual em movimento, como usualmente admitido [1,2].

## 6. Comentários finais

O que se procurou fazer aqui foi apresentar a Mecânica Relativista, num inespecificado sistema de coordenadas, sem nenhuma preocupação, como em [1,2], com a existência de outros sistemas. A consistência dos resultados endossa o ponto de vista de Sandin [4], admitido de forma geral na Eq. 5.

## Agradecimento

O autor agradece ao colega Dr. René Armando Moreno a leitura de uma versão anterior do presente trabalho e os conselhos que a acompanharam.

## Referências

- [1] A.P. French, *Special Relativity* (W.W. Norton, 1968), caps. 1 e 6.
- [2] H. Goldstein, *Classical Mechanics* (Addison-Wesley, 1951), cap.6.
- [3] T. Theodorsen, *Galilean Electrodynamics* **6**, 63 (1995).
- [4] T.R. Sandin, *Amer. J. Phys.* **59**, 1032 (1991).
- [5] Nivaldo A. Lemos, *Rev. Bras. Ens. Física.* **23**, 3 (2001).