Potência Elétrica Irradiada e Potência Mecânica Dissipada no Sistema de Dois Dipolos Oscilantes Próximos e em Fase

Irradiated and dissipated mechanical power of a system of two nearby parallel oscillating dipoles moving in phase

G. F. Leal Ferreira
Instituto de Física de São Carlos, USP, CP 369, 13560-970, São Carlos, SP
guilherm@if.sc.usp.br

Recebido em 08 de março, 2003. Aceito em 25 de julho, 2003.

Mostra-se diretamente que a potência média irradiada por um sistema de dois dipolos oscilantes próximos, paralelos e em fase, é igual à potência mecânica média dissipada nos osciladores necessária para manter o movimento harmônico simples.

We show directly that the mean irradiated power from a system of two nearby parallel oscillators in phase is equal to the mean mechanical power supplied to both oscillators to mantain their harmonic motion.

I Introdução

Em interessante artigo publicado nesta revista, o problema do acoplamento entre fontes radiantes foi abordado [1]. O autor chama a atenção para o fato de que a variação da potência total irradiada por um sistema de fontes em relação àquela como se fossem isoladas se deve à interação entre elas. Ocorreu-nos a idéia de comprovar diretamente a assertiva com um sistema físico simples, o de dois dipolos próximos, paralelos, com movimento harmônico simples (mhs) em fase. O ponto realmente sutil é que a energia irradiada depende do fluxo do vetor de Poynting dos campos longínquos em esfera distante, enquanto que a interação entre as fontes depende dos campos próximos[2]. Vai-se mostrar por cálculo direto que a potência total média irradiada pelos dois dipolos é igual à potência mecânica média empregada para promover a emissão como se fossem isoladas, adicionada da potência mecânica necessária média para cada oscilador executar o seu movimento em presença do outro. Ver-se-á que com os dipolos próximos, a potência emitida é quase quatro vezes a potência de emissão como isoladas, contrariando a visão de que, '....como és claro, la energia total emitida por las dos fuentes és solo el doble de la que emite una solo fuente.' [2]. O cálculo será realizado para dipolos 'próximos', que significará aqui em segunda ordem da razão distância/ comprimento de onda.

II O campo elétrico do dipolo radiante

A situação a ser estudada é a da emissão de um par de dipolos oscilantes, mhs, paralelos, de momento M_0, frequência angular ω, como mostra a Fig. 1. Por razão da especial simetria estudada, só necessitaremos da componente E_ϑ do campo elétrico do dipolo [3], Fig.2,

$$E_\vartheta = M_0\beta^3 \mathrm{sen}\vartheta e^{i(\omega t-\beta r)}[\frac{-1}{\beta r} + \frac{i}{(\beta r)^2} + \frac{1}{(\beta r)^3}] \quad (1)$$

com $\beta = \omega/c = 2\pi/\lambda$, sendo λ o comprimento de onda da radiação.

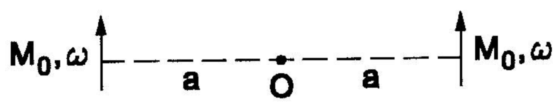

Figura 1. Dois dipolos oscilantes, paralelos, de momento M_0, em mhs com frequência ω, distantes a do ponto médio O.

III A potência irradiada pelo sistema de dois dipolos

Para o estudo da potência irradiada pelos dipolos da Fig. 1, consideremos a Fig. 3. O campo elétrico total em pontos distantes será a soma dos campos de cada um dos dipolos, tendo em conta a diferença de fase devido à diferença de distância, Δr, entre os dipolos e o ponto considerado. Em pontos distantes tomam-se os campos com a dependência em $1/r$. Tendo como referência o ponto médio O entre as fontes, o campo elétrico total $E_{\vartheta T}$ na direção ϑ em r_0 será

$$E_{\vartheta T} = -\frac{M_0\beta^2 \mathrm{sen}\vartheta e^{i(\omega t-\beta r_0)}}{r}(e^{i\beta\Delta r} - e^{-i\beta\Delta r}) \quad (2)$$

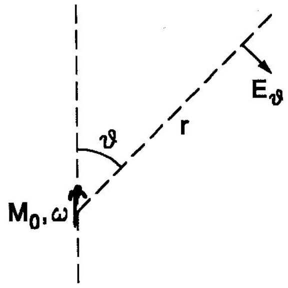

Figura 2. Componente ϑ do campo elétrico do dipolo oscilante.

com

$$\Delta r = a\text{sen}\vartheta\ , \tag{3}$$

sendo $2a$ a distância entre as fontes. Na aproximação $\beta a << 1$, a Eq. 2 é

$$E_{\vartheta T} = -\frac{M_0\beta^2\text{sen}\vartheta e^{i(\omega t-\beta r_0)}}{r}(2-\beta^2\Delta r^2) \tag{4}$$

e o fluxo do vetor de Poynting médio, P, numa esfera de raio $\rightarrow \infty$ será

$$P = \frac{c}{2}\text{Re}\int_0^\pi \frac{E_{\vartheta T}E^*_{\vartheta T}r^2\text{sen}\vartheta d\vartheta}{4\pi} \tag{5}$$

ou pela Eq. 4,

$$P = \frac{M_0^2\beta^4 c}{8\pi}\int_0^\pi (4-4\beta^2a^2\text{sen}^2\vartheta)\text{sen}^3\vartheta d\vartheta \tag{6}$$

que dá finalmente

$$P = \frac{M_0^2\beta^3\omega}{2\pi}(\frac{4}{3}-\frac{8}{15}\beta^2a^2) \tag{7}$$

tendo em conta que $\beta = \omega/c$. Notemos que a potência média irradiada por um dipolo isolado, P_1, pode ser obtido da Eq. 7 acima, fazendo-se $a = 0$ e dividindo-se o resultado por 4 já que P se refere à emissão de dois dipolos e é proporcional ao quadrado de M_0, ou seja,

$$P_1 = \frac{M_0^2\beta^3\omega}{6\pi} \tag{8}$$

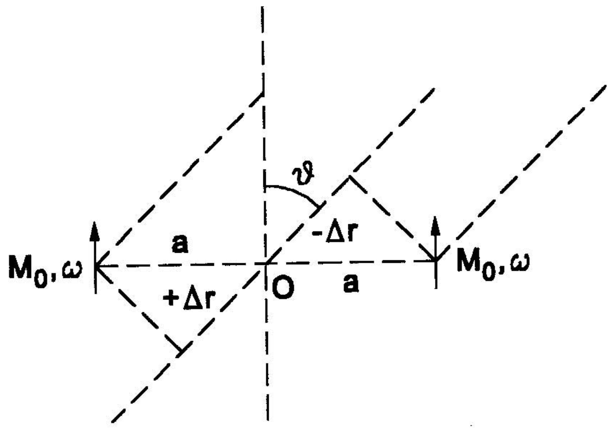

Figura 3. Diferença de percurso, $\pm\Delta r = \pm a\text{sen}\vartheta$, contado a partir de O, para o cálculo da interferência dos campos de radiação dos dois dipolos.

Para a pequeno, P é quase quatro vezes maior que P_1 (e não duas, como mencionado em [2]), mas como enfatizado em [1], isto se deve a uma maior potência mecânica empregada para manter os osciladores em mhs, como veremos.

IV Ação de um dipolo sobre o outro

Consideremos agora o campo elétrico E_{ed} que o dipolo da esquerda da Fig. 1 cria sobre o dipolo da direita. Tomando o sentido positivo para cima, ele é $-E_\vartheta(r = 2a, \vartheta = 90^o)$, com E_ϑ tirado da Eq. 1. O trabalho por ciclo, W, executado por esta força será calculado de $q\int E_{ed}vdt$ num período, sendo q a carga do dipolo e v a velocidade, igual a $i\omega M_0e^{i\omega t}/q$, que em AC é dado por

$$W = \frac{-1}{2}\text{Re}E_{ed}.v^* = \frac{-1}{2}M_0^2\beta^3\omega\text{Re}[(\cos 2\beta a - i\text{sen}2\beta a)(\frac{-1}{\beta r}+\frac{i}{(2\beta a)^2}+\frac{1}{(2\beta a)^3})i] \tag{9}$$

Fazendo $Y = \text{Re}E_{ed}v^*$, temos

$$Y = -(\text{sen}2\beta a)(\frac{-1}{2\beta a}+\frac{1}{(2\beta a)^3}) - \frac{\cos 2\beta a}{(2\beta a)^2} \tag{10}$$

Para obtermos Y correto até termos de 2^a ordem em βa, sendo $\beta a << 1$, devemos usar para $\text{sen}x$ até termos de 5^{a}ordem, ou seja $x - x^3/3! + x^5/5!$ e para o $\cos x$, termos até 4^a, ou seja, $1 - x^2/2 + x^4/4!$. Feito isto, obtém-se

$$Y = \frac{2}{3} - \frac{8\beta^2a^2}{15} \tag{11}$$

e W da Eq. 8 será

$$W = -M_0^2\beta^3(\frac{1}{3}-\frac{4a^2\beta^2}{15})\ . \tag{12}$$

A potência média será $P' = W/T = W\omega/2\pi$, sendo T o período de oscilação. Temos então

$$P' = -M_0^2\beta^3\frac{\omega}{2\pi}(\frac{1}{3}-\frac{4a^2\beta^2}{15})\ . \tag{13}$$

O sinal negativo em P' significa que o agente mecânico agindo sobre o oscilador à direita deve exercer trabalho extra para mantê-lo em mhs.

V Potência irradiada e potência mecânica nos osciladores

P' na Eq. 12 dá a potência média que deve ser exercida sobre o oscilador da direita (esquerda), sob a ação do da esquerda (direita) para que mantenha o mhs. Queremos calcular a potência mecânica média total agindo sobre cada oscilador, P_m, para compararmos com P da Eq. 7. Para isto deveremos adicionar à P' a potência necessária para ele emitir como se fosse isolado, que está dado na Eq. 8, com P_1. Pode-se objetar que este resultado foi obtido com o auxílio dos campos em pontos distantes, Eq. 2, e é na verdade potência emitida e não potência mecânica dissipada. Mas note-se que a Eq. 12, que se refere à potência dissipada, fornece o mesmo resultado fazendo-se $a = 0$. Isto é, com $a = 0$, os dipolos coalescem e a interação mútua torna-se auto-interação. Teremos então para P_m

$$P_m = P\prime + P_1 = M_0^2 \beta^3 \frac{\omega}{2\pi} \left(\frac{2}{3} - \frac{4a^2\beta^2}{15} \right) . \qquad (14)$$

A potência mecânica média total, P_{mT}, será $2P_m$, ou seja,

$$P_{mT} = M_0^2 \beta^3 \frac{\omega}{2\pi} \left(\frac{4}{3} - \frac{8a^2\beta^2}{15} \right) \qquad (15)$$

que é igual a P, potência irradiada pelo sistema, Eq. 7.

VI Considerações finais

Demonstrou-se diretamente que a potência irradiada pelo sistema de dois dipolos em fase vem da potência mecânica média empregada em cada um deles para emitir mantendo o mhs, sobrecarregada pela ação do dipolo companheiro. O cálculo mostra a consistência interna da Teoria do Eletromagnetismo, visto que diferentes expressões do campo elétrico são empregadas. Seria interessante estendê-lo além do termo em $(\beta a)^2$.

Referências

1. Reinaldo Welti, Rev. Bras. Ens. Física, **24**, 415 (2002).
2. Citado em [1].
3. J. C. Slater, *Microwave Transmission*, Dover Public., 1942, Cap.V.