

Ondas do tipo Sóliton em Guias Dielétricos

Solitons wave in dielectric optical fibers

W. Galléas e L.H. Ymai

Departamento de Física, Universidade Estadual de Londrina, C.P. 6001, 86051-990, Londrina, PR, Brasil

P.L. Natti

Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Londrina, C.P. 6001, 86051-990, Londrina, PR, Brasil

E-mail: plnatti@uel.br

E.R. Takano Natti

Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Campus Londrina, Rua Maringá, 78, 86060-000, Londrina, PR, Brasil

Recebido em 16 de maio, 2003. Aceito em 17 de julho, 2003.

Neste artigo estudamos um sistema de equações diferenciais acopladas, que descrevem a propagação de um pacote de ondas, composto de duas ondas com frequências ω_0 (modo fundamental) e $2\omega_0$ (segundo harmônico), em um guia dielétrico com não-linearidades quadráticas. Assintoticamente, verifica-se que o sistema de equações diferenciais se desacopla, com a dinâmica do sistema passando a ser descrita pela equação de Schrödinger não-linear (NLSE). Resolvendo analiticamente o sistema de equações diferenciais acopladas, soluções do tipo sóliton são obtidas para a evolução temporal do pacote no guia dielétrico. Enfim, discute-se as propriedades destas soluções, dando ênfase as condições necessárias para a sua existência.

In this work we study a coupled differential equations system, which describes the propagation of a wave packet, composed of two waves with frequencies ω_0 (fundamental wave) and $2\omega_0$ (second-harmonic wave), in a quadratic nonlinear dielectric waveguide. Asymptotically, we show that these equations reduce to the nonlinear Schrödinger equation (NLSE). Solving the coupled differential equations system, we obtain soliton solutions for the time evolution of the packet in the dielectric waveguide. Finally, we discuss the property of soliton solutions, in particular the necessary conditions for their existence.

I Introdução

Em 1834 John Scott Russell observando um barco sendo puxado por dois cavalos no canal de Edinburgh, Glasgow, verificou que quando o mesmo era subitamente freado, surgia uma grande onda solitária com uma forma arredondada bem definida. Seguindo a onda formada, ele observou que a mesma continuava seu curso ao longo do canal sem mudar a sua forma e sem diminuir sua velocidade por um longo trecho. Depois desta observação, Russell realizou várias experiências em laboratório, gerando suas ondas solitárias de translação ao mergulhar pesos em uma extremidade de canais de água. Ele foi capaz de verificar empiricamente que a velocidade v da onda era dada por

$$v^2 = g(h + a) \quad ,$$

onde a era a amplitude da onda, h a profundidade do canal não-perturbado e g a aceleração da gravidade. Da expressão obtida por Russell, observa-se imediatamente que quanto maior for a amplitude da onda maior será a sua velocidade de translação. Posteriormente, J. Boussinesq em

1871, Lord Rayleigh em 1876 e D. J. Korteweg e G. de Vries em 1895, considerando uma onda propagando-se num canal com seção transversal retangular, cujo meio era um fluido incompressível e sem viscosidade, e supondo que o comprimento da onda era muito maior que a profundidade do canal, obtiveram teoricamente a fórmula de Russell para a velocidade da onda solitária de translação e mostraram que neste caso a forma da envoltória da onda era dada por

$$z(x, t) = a \operatorname{sech}^2 [\beta (x - vt)] \quad ,$$

onde $\beta^{-2} = 4h^2(h + a)/3a$. A dedução da equação de Korteweg-de Vries, chamada simplesmente equação KdV, pode ser encontrada em [1].

Outro fato observado por Russell em 1844, que permaneceu sem explicação por mais de um século, é que em colisões ondas solitárias retêm suas características. Em uma de suas experiências, Russell criou duas ondas solitárias com velocidades diferentes e observou que a onda mais veloz alcançava, interagia e ultrapassava a onda mais lenta, de modo que após o processo ambas permaneciam intactas e

não-distorcidas, exatamente como se ambas satisfizessem o princípio de superposição linear. Por outro lado, sabia-se que efeitos não-lineares estavam em jogo; de fato, durante a interação, as ondas sofriam um deslocamento de fase, ou seja, as ondas, depois da interação, não estavam na posição que deveriam estar se ambas se movessem com velocidade constante (veja Fig. 1). Foi somente em 1955, com o trabalho de Fermi, Pasta e Ulam [2], que esta questão começou a ser melhor compreendida. Eles estudaram a propagação de fônons em uma rede não-linear (anarmônica). Nesta época acreditava-se que a existência de não-linearidades acarretaria um fluxo de energia entre os diferentes modos de vibração da rede e consequentemente a equipartição de energia seria esperada. Contrariando as expectativas, verificaram que, iniciando-se o problema com a energia armazenada num único modo de vibração da rede, o fenômeno de equipartição de energia entre os diferentes modos de vibração não era observado. A partir deste resultado, Zabusky e Kruskal [3] em 1965, estudando numericamente o problema de condição inicial

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + u(x,t) \frac{\partial}{\partial x}u(x,t) + \delta^2 \frac{\partial^3}{\partial x^3}u(x,t) = 0$$

com

$$u(x,0) = \cos \pi x \quad 0 \leq x \leq 2 ,$$

verificaram que a onda, inicialmente com envoltória na forma da função cosseno no intervalo $0 \leq x \leq 2$, rapidamente adquiria o formato de uma onda prestes a quebrar devido ao termo não-linear $u(x,t) \frac{\partial}{\partial x}u(x,t)$. Quando a onda atingia tal configuração, o termo dispersivo $\delta^2 \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3}$ tornava-se importante, ocorrendo então um balanço entre não-linearidade e dispersão, de modo que o fenômeno de quebra não ocorria. Num instante seguinte, a onda no intervalo $0 \leq x \leq 2$ era formada de vários picos de diferentes amplitudes com diferentes velocidades de propagação e a forma inicial da envoltória da onda era totalmente perdida. O fato surpreendente é que após um longo tempo a forma inicial (ou uma forma muito semelhante) da envoltória da onda era recuperada. Esta persistência da onda em restabelecer a sua forma, ou ainda, a característica do tipo partícula destas ondas que parecem guardar sua identidade em uma colisão, fez com que Zabusky e Kruskal sugerissem o nome de sólitons (em analogia a fótons, prótons...) para tais ondas não-lineares. Eles também argumentaram que as ondas solitárias observadas por Russell seriam sólitons e que, tomando-se o limite do contínuo em seus cálculos, os sólitons em colisões rapidamente restabeleceriam suas formas iniciais, o que explicaria o fenômeno observado por Russell. Nestes últimos 35 anos encontraram-se muitas equações diferenciais com propriedades semelhantes às estudadas por Zabusky e Kruskal com aplicações em todos os campos do conhecimento. Citamos algumas áreas em física e áreas correlatas, nas quais a teoria de sólitons tem sido utilizada com frequência: física de plasma, física do estado sólido, física das partículas elementares, tecnologia de comunicação e em meteorologia.

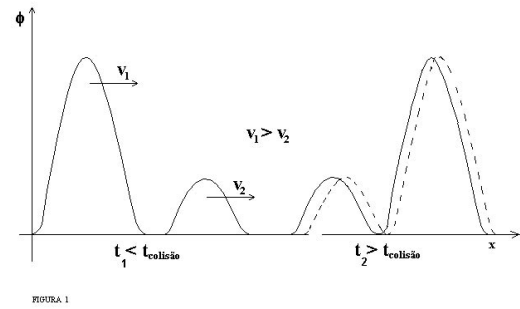


Figura 1. Representação da interação de dois sólitons. À esquerda, temos os dois sólitons antes da interação num instante t_1 . À direita, as linhas cheias representam a localização dos dois sólitons após a interação no instante t_2 . As linhas tracejadas representam as possíveis posições dos dois sólitons no instante t_2 caso a interação fosse linear.

Do ponto de vista matemático, sólitons são soluções de equações (ou de um sistema de equações) diferenciais não-lineares integráveis. A equação de Schrödinger não-linear (NLSE) pertence a esta classe de equações integráveis. Do ponto de vista prático, sólitons podem representar fenômenos que apresentam as características de serem não-lineares, localizados, quase-estáticos e interagirem fortemente mantendo sua identidade. Uma grande variedade de fenômenos apresentam tais propriedades, em particular, fenômenos não-lineares em ótica. Devido à estabilidade de tais ondas, em meados dos anos oitenta foi proposto que sólitons pudessem ser utilizados em comunicações transoceânicas, e a partir de então, vários desenvolvimentos tecnológicos foram realizados na propagação de sólitons. Atualmente em comunicação por grandes distâncias através de fibras óticas utilizam-se os já padronizados sinais lineares no formato retangular e também, em escala experimental, os sinais no formato sóliton. Apesar de sinais no formato sóliton serem mais estáveis que os sinais no formato retangular, o custo das fibras óticas, com as propriedades dielétricas desejadas, é um fator que pesa contra a utilização dos sinais do tipo sólitons. Evidentemente, os sinais no formato sóliton somente irão prevalecer se eles oferecerem altas taxas de transmissão a baixo custo. A Ref. [4] apresenta uma revisão do assunto nas duas últimas décadas.

No contexto de comunicação óptica via sólitons, neste trabalho vamos estudar, dadas condições iniciais, a propagação de ondas do tipo sólitons em guias dielétricos do tipo $\chi^{(2)}$. Na seção 2 fazemos uma revisão, onde estudamos algumas equações de onda, o que nos fornecerá um melhor entendimento dos fenômenos não-lineares e dispersivos presentes na propagação de ondas do tipo sólitons. Na seção 3 indicamos como obter o sistema de equações diferenciais acopladas, que descrevem a propagação de um pacote de ondas em um guia dielétrico com não-linearidades quadráticas, também chamado guia de ondas do tipo $\chi^{(2)}$. Em seguida, na seção 4, verificamos que o sistema de equações diferenciais acopladas obtido, desacopla-se num certo limite, com a dinâmica do sistema passando a ser descrita pela (NSLE). A partir deste resultado, encontramos soluções analíticas do tipo sólitons para nosso sistema de equações diferenciais

acopladas. Finalmente, correlacionamos os parâmetros das soluções obtidas com as propriedades físicas do guia de ondas do tipo $\chi^{(2)}$.

II Um Melhor Entendimento

O século XX pode ser chamado de era da *física linear*, pois foi dominado por equações lineares (Maxwell, Schrödinger ...), por objetos matemáticos lineares (espaços vetoriais, em particular os espaços de Hilbert), e por métodos lineares (transformada de Fourier, teoria de perturbação ...). Naturalmente a importância da não-linearidade, começando com a equação de Navier-Stokes e passando para as teorias da gravitação e dos campos quantizados com aplicações em

física dos sólidos, física nuclear e em física de partículas, foi reconhecida, embora o tratamento destes efeitos fossem muito difíceis, exceto como perturbações da solução básica da teoria linear. Durante as duas últimas décadas, tem se tornado cada vez mais evidente que não-linearidades podem resultar em novos fenômenos, os quais não podem ser obtidos via teoria de perturbação. Este é o caso de ondas do tipo sóliton.

Sólitons são soluções de uma classe de equações diferenciais não-lineares cujo interesse se deve ao fato de muitos sistemas físicos complexos poderem ser aproximadamente descritos por estas equações, e principalmente pelo fato de, apesar de serem não-lineares, possuírem soluções analíticas. Como exemplos de equações desta classe citamos:

- KdV (Korteweg-de Vries Equation) →
- NLSE (NonLinear Schrödinger Equation) →
- BE (Boussinesq Equation) →

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = 6\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}$$

$$i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = - \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \pm g |\phi|^2 \phi$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 3 \frac{\partial^2 \phi^2}{\partial x^2} .$$

Essa classe é formada por equações do tipo,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = F(\phi, \frac{\partial \phi}{\partial x}, \dots) \quad (1)$$

ou

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = G(\phi, \frac{\partial \phi}{\partial x}, \dots) , \quad (2)$$

em que ϕ é uma função do tempo t e de variáveis espaciais $x = (x_1, \dots, x_n)$, enquanto F e G são funções não-lineares de ϕ e de suas derivadas, como por exemplo:

i) funções quadráticas: ϕ^2 , $\phi \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)$, $\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2$...

ii) funções cúbicas: $|\phi|^2 \phi$, $\phi^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)$...

Essas equações são ditas de evolução devido ao interesse no desenvolvimento temporal da função ϕ , para a qual num dado tempo t_0 , as condições iniciais

$$\phi(x, t_0) \quad \text{e, se necessário também} \quad \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t_0) , \quad (3)$$

são satisfeitas. Também se requer que as condições de contorno, em geral dadas por

$$\phi(\pm\infty, t) = 0 \quad \text{e/ou} \quad \frac{\partial \phi}{\partial x}(\pm\infty, t) = 0 , \quad (4)$$

sejam satisfeitas. Soluções para as equações diferenciais parciais desta classe (no caso unidimensional) podem ser obtidas através dos *ansatz*

$$\phi(x, t) = f(kx - \omega t) \quad \text{ou} \quad \phi(x, t) = g(kx + \omega t) , \quad (5)$$

em que as funções f e g descrevem ondas que se propagam para a direita e para a esquerda, respectivamente, com velocidades de fase $v_{ph} = \frac{\omega}{k}$ e velocidades de grupo $v_{gr} = \frac{d\omega}{dk}$, enquanto k e ω são respectivamente o número de onda e a frequência angular de oscilação da onda. Vejam Refs. [5-7] para maiores detalhes.

A fim de melhor compreender as propriedades das soluções tipo sóliton, consideramos alguns exemplos de equações de interesse físico. Primeiramente trabalhamos com a equação de onda unidimensional

$$\frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x^2} = 0 , \quad (6)$$

que é uma das equações lineares mais importantes na física. Por substituição verifica-se que a função

$$\phi(x, t) = e^{i(kx - \omega t)} \quad (7)$$

é solução de (6) se a conhecida relação de dispersão

$$\omega = \pm ck \quad (8)$$

fôr satisfeita, implicando que as velocidades de fase e grupo sejam dadas por

$$\text{velocidade de fase} \quad v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \pm c \quad (9)$$

$$\text{velocidade de grupo} \quad v_{gr} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \pm c .$$

O fato do lado direito de (9) ser constante é descrito como a ausência de dispersão, pois todas as ondas, independentes de seu número de onda k , ou ainda, de seu comprimento de onda $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, propagam-se com a mesma velocidade c , de modo que os pacotes formados por várias ondas não se espalham. Observe também que as velocidades de fase das várias ondas componentes do pacote são iguais à velocidade de grupo do pacote, situação típica de uma onda no vácuo. Finalmente, como para toda equação linear o princípio da superposição se aplica, a solução mais geral de (6) é dada pela superposição de duas ondas, uma que viaja para a direita e outra que viaja para a esquerda, ambas com velocidade c , ou seja,

$$\phi(x, t) = \phi^+(x + ct) + \phi^-(x - ct) . \quad (10)$$

Este é um exemplo de dois pacotes de ondas que não se destroem.

Outra equação de grande interesse físico, que possui propriedades muito diferentes de (6), é a equação de Schrödinger livre (potencial $V = 0$),

$$i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = - \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} , \quad (11)$$

onde \hbar é a constante de Planck e m é a massa de uma partícula livre. O ponto de interesse nesta análise não é propriamente a solução de (11), mas sim a obtenção de sua relação de dispersão. A partir de (7) temos a seguinte relação de dispersão para a equação de Schrödinger livre

$$\omega = \omega(k) = \frac{\hbar}{2m} k^2 . \quad (12)$$

Das definições dadas em (9), temos que as ondas da equação de Schrödinger livre propagam-se com as seguintes velocidades de fase e grupo

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar}{2m} k \quad (13)$$

$$v_{gr} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\hbar}{m} k . \quad (14)$$

Logo, a partir de (13), ondas com diferentes números de onda k , ou ainda, com diferentes comprimentos de onda, propagam-se com diferentes velocidades, resultando num rápido espalhamento de um pacote de ondas. Neste caso as velocidades de fase (13) e de grupo (14) são diferentes, situação típica de ondas em meios dispersivos (caso da equação de Schrödinger livre) e/ou em meios absorventes (caso da equação de onda dissipativa citada abaixo). O gráfico apresentado na Fig. 2 representa a evolução de um pacote de ondas sujeito ao fenômeno de dispersão. Um estudo detalhado da equação de Schrödinger pode ser encontrado na Ref.[8]. Como um exercício, obtenha as relações de dispersão das equações diferenciais dadas abaixo (a Ref.[9] apresenta um estudo detalhado destas equações)

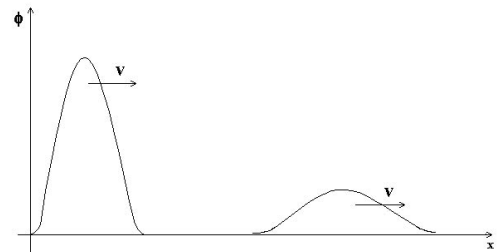


FIGURA 2

Figura 2. Representação da evolução de uma onda descrita por uma equação diferencial com termo de dispersão. Na representação da evolução do pacote de ondas foram utilizadas escalas diferentes para as coordenadas, de outra maneira, a área sob cada uma das curvas deveria ser constante.

$$\text{Equação de onda dispersiva} \rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} = 0$$

$$\text{Equação de onda dissipativa} \rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 . \quad (15)$$

Estudemos agora as propriedades das equações não-lineares. Considere a equação não-linear

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = 2\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (16)$$

que possui a solução formal

$$\phi = f(x + 2\phi t) . \quad (17)$$

Podemos facilmente verificar que (17) é solução de (16) por

simples substituição. Para isto definimos a nova variável $\xi = x + 2\phi t$ e da regra da cadeia temos que

$$\frac{\partial \phi(\xi)}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = 2\phi \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \quad (18)$$

$$\frac{\partial \phi(\xi)}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial \xi} .$$

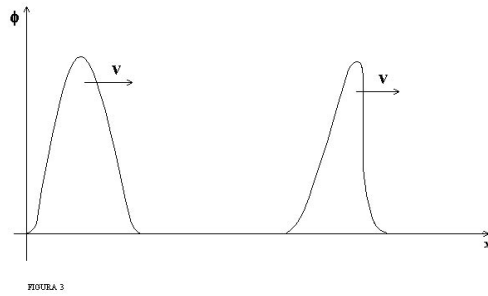


Figura 3. Representação da evolução de uma onda descrita por uma equação diferencial não-linear.

A solução (17) é representada graficamente na Fig. 3. Para mais detalhes veja Ref.[1]. De acordo com o gráfico, pode-se ver que o termo não-linear tende a concentrar o pacote de ondas, com conseqüente quebra do pacote. Logo, para condições iniciais adequadas, ele leva a singularidades na solução após um tempo finito. Portanto, enquanto um termo dispersivo em uma equação de onda tende a espalhá-la, um termo não-linear tende a concentrá-la, de modo que é de se esperar que a competição destes dois efeitos resulte num comportamento estável. Estas ondas estáveis são chamadas sólitons. Como aplicação destes resultados, consideremos a equação de Korteweg-de Vries modificada (mKdV)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + 6\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} = 0 \quad (19)$$

que contém um termo não-linear, $6\phi \frac{\partial \phi}{\partial x}$, e um termo dispersivo, $\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}$. As soluções desta equação são funções do tipo

$$\phi(x, t) = f(\xi) \quad (20)$$

em que $\xi = x - vt$ e v é uma constante. Utilizando a regra da cadeia para realizar as derivadas parciais de (20) e substituindo-as na equação mKdV, obtemos a seguinte equação diferencial ordinária (EDO) para a função $f(\xi)$

$$-v \frac{df(\xi)}{d\xi} + 6f(\xi) \frac{df(\xi)}{d\xi} + \frac{d^3 f(\xi)}{d\xi^3} = 0 \quad (21)$$

Para resolver a EDO (21) devemos integrá-la com relação à variável ξ , de modo que obtemos

$$-v f + 3 f^2 + f'' = A \quad (22)$$

em que simplificamos a notação de modo que $f'' = \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^2}$ e A é uma constante arbitrária. Multiplicando (22) por f' , que permite reescrevê-la como

$$-\frac{v}{2} (f^2)' + (f^3)' + \frac{1}{2} [(f')^2]' = A f' \quad (23)$$

é possível integrá-la novamente, ou seja,

$$-\frac{v}{2} f^2 + f^3 + \frac{1}{2} (f')^2 = A f + B \quad (24)$$

onde B é uma segunda constante arbitrária. Impondo as condições de contorno $f, f', f'' \rightarrow 0$ quando $\xi \rightarrow \pm\infty$, segue que $A = 0$ e $B = 0$ e a Eq. (24) pode ser reescrita como

$$(f')^2 = f^2 (-2f + v) \quad (25)$$

Observe que existe uma solução real somente se $(-2f + v) \geq 0$. A EDO (25) é separável, de modo que integrando-a

$$\int \frac{df}{f(-2f+v)^{1/2}} = \pm \int d\xi \quad (26)$$

através da substituição $f = \frac{v}{2} \text{sech}^2\theta$, obtemos o seguinte resultado

$$\xi = \pm \frac{2\theta}{\sqrt{v}} + x_0 \quad (27)$$

sendo x_0 uma constante arbitrária de integração. De (27) segue que

$$\text{sech}^2\theta = \text{sech}^2 \left[\pm \frac{\sqrt{v}}{2} (\xi - x_0) \right] \geq 0 \quad (28)$$

ou ainda,

$$\phi(x, t) = \frac{v}{2} \text{sech}^2 \left[\pm \frac{\sqrt{v}}{2} (x - vt - x_0) \right] \quad (29)$$

Primeiramente observe que a escolha \pm é redundante, desde que a solução (29) é uma função par, e que a constante x_0 é um deslocamento de fase que indica a posição do pico da onda no instante $t = 0$. Observe também que a solução do tipo onda solitária (29) existe somente para $v \geq 0$, já que a condição $(-2f + v) \geq 0$ deve ser satisfeita. A Fig. 4 representa a solução (29) da equação de onda dispersiva não-linear (19), em que devido à competição destes dois efeitos (dispersão e não-linearidade), temos um sóliton (onda solitária estável) que se propaga para a direita com velocidade v .

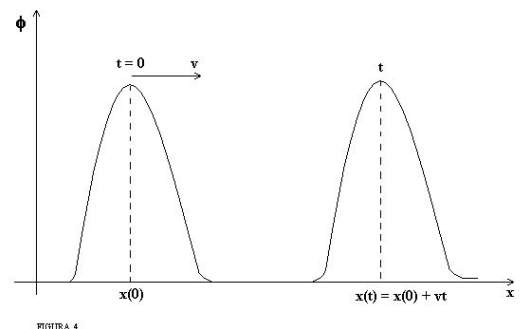


Figura 4. Representação da evolução de uma onda solitária (sóliton) descrita pela equação mKdV.

Na próxima seção estudaremos um sistema de equações diferenciais acopladas que descrevem a propagação de um pacote de ondas em um guia dielétrico com não-linearidades quadráticas.

III Dinâmica longitudinal de campos acoplados em dielétricos tipo $\chi^{(2)}$

Começamos esta seção indicando como obter as equações diferenciais que descrevem a dinâmica da propagação de um pacote de ondas eletromagnéticas, composto de duas ondas (primeiro e segundo harmônico), em um guia de ondas retangular com não-linearidades quadráticas. Textos mais detalhados, onde encontramos a dedução de tais equações passo a passo, são dados nas Refs.[10, 11]. Na Ref.[12] encontra-se um tratamento sobre a propagação de ondas em guias lineares com seção transversal retangular. Textos de óptica não-linear são indicados na Ref.[13].

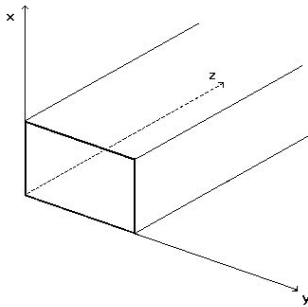


FIGURA 5

Figura 5. Esquema de um guia de onda de seção transversal retangular paralelo ao eixo z .

Por conveniência, tomamos o guia de ondas de seção transversal retangular paralelo ao eixo z (veja Fig. 5), de modo que as ondas fundamental e o segundo harmônico do pacote propagam-se na direção do eixo z , estando confinadas nas direções transversais. Também consideraremos que, ao longo do guia de onda, a variação dos campos elétricos da onda fundamental $\varepsilon_1(x, y, z, t)$ e do segundo harmônico $\varepsilon_2(x, y, z, t)$ ocorrem em escalas de comprimentos grandes quando comparadas com as dimensões transversais; em outras palavras, vamos impor que as soluções longitudinais de nosso sistema sejam quase-estáticas (ondas do tipo solitárias) quando comparadas com a evolução temporal das componentes transversais dos campos elétricos. Tal condição de contorno, conhecida como SVEA (*slowly varying envelope amplitude*), é verificada na região do espectro visível, desde que a duração de um pulso de luz tende a variar de nanossegundos (10^{-9} s) a picossegundos (10^{-12}

s), enquanto que o período de oscilação de um campo nesta região é da ordem de 10^{-15} seg. Implementando a condição de contorno SVEA, desacoplamos a evolução transversal da evolução longitudinal dos campos, ou seja,

$$\begin{aligned}\varepsilon_1(x, y, z, t) &= \Psi_1(x, y)E_1(z, t) \\ \varepsilon_2(x, y, z, t) &= \Psi_2(x, y)E_2(z, t) .\end{aligned}\quad (30)$$

Na expressão acima, as funções $\Psi_1(x, y)$ e $\Psi_2(x, y)$ descrevem os campos elétricos transversais das ondas fundamental e segundo harmônico, respectivamente. Como estamos considerando que a seção transversal do guia de ondas é retangular, as formas funcionais de $\Psi_1(x, y)$ e $\Psi_2(x, y)$ são determinadas pelos modos normais do guia, os quais dependem da sua geometria [6, 12]. Especificamente, estamos interessados apenas no estudo de $E_1(z, t)$ e $E_2(z, t)$ que descrevem a propagação longitudinal das ondas no guia. Consideramos as componentes longitudinais dos campos elétricos das ondas fundamental e segundo harmônico ondas planas, ou seja,

$$E_1(z, t) = A_1(z, t) \exp[ik_1(\omega_0)z - i\omega_0 t] \quad (31)$$

$$E_2(z, t) = A_2(z, t) \exp[ik_2(2\omega_0)z - 2i\omega_0 t] ,$$

onde $A_1(z, t)$ e $A_2(z, t)$ são as amplitudes dos respectivos campos, ω_0 é a frequência da onda fundamental e, $k_1(\omega_0)$ e $k_2(2\omega_0)$ são as relações de dispersão das duas ondas. O campo elétrico longitudinal total no guia de ondas é dado por

$$\begin{aligned}\vec{E}(z, t) &= E_1(z, t)\hat{e}_1 + E_1^*(z, t)\hat{e}_1^* + E_2(z, t)\hat{e}_2 \\ &\quad + E_2^*(z, t)\hat{e}_2^* ,\end{aligned}\quad (32)$$

onde \hat{e}_1 e \hat{e}_2 são as polarizações transversais do modo fundamental e do segundo harmônico, respectivamente. Observe que os termos complexos conjugados foram adicionados de modo que $\vec{E}(z, t)$ seja real.

Queremos estudar a propagação do campo elétrico dado na Eq. (32) em meios quadraticamente não-lineares. Em tais meios, chamados dielétricos $\chi^{(2)}$, o vetor deslocamento elétrico $\vec{D}(z, t)$ contém contribuições lineares e quadráticas em $\vec{E}(z, t)$, as quais no caso geral são não-locais no tempo [13], ou seja,

$$\begin{aligned}\vec{D}(z, t) &= \vec{E}(z, t) + 4\pi \int_{-\infty}^t dt' \chi^{(1)}(t-t') \cdot \vec{E}(z, t') \\ &\quad + 4\pi \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^t dt'' \chi^{(2)}(t-t', t-t'') : \vec{E}(z, t')\vec{E}(z, t'') .\end{aligned}\quad (33)$$

Na expressão acima, observe que o primeiro termo do lado direito é a contribuição do vácuo, pois no vácuo temos que $\vec{D}(z, t) = \vec{E}(z, t)$. O segundo termo do lado direito é a contribuição da polarização linear do meio para o vetor deslocamento elétrico, $\vec{D}(z, t) = \vec{E}(z, t) + 4\pi\vec{P}(z, t)$, em que a quantidade $\chi^{(1)}$ é um tensor de segunda ordem e o símbolo representa, um produto tensorial, onde somamos sobre um índice repetido, ou seja,

$$\sum_{j=1}^2 \left[\chi_{i,j}^{(1)}(t-t') E_j(z, t') \right] ,$$

onde o índice $j = 1, 2$ são as possíveis polarizações dadas em (32). O terceiro termo do lado direito é a contribuição não-linear do material, onde a quantidade $\chi^{(2)}$ é um tensor de terceira ordem e o símbolo: também representa um produto tensorial, em que agora devemos somar sobre dois índices repetidos (para maiores detalhes sobre produto tensorial veja Ref.[7]),

$$\sum_{j,k=1}^2 \left[\chi_{i,j,k}^{(2)}(t-t', t-t'') E_j(z, t') E_k(z, t'') \right] .$$

Observe também que as integrais em t' e t'' , dadas em (33), consideram que apenas os eventos anteriores ao instante t , ou seja, $-\infty \leq t' \leq t$ e $-\infty \leq t'' \leq t$, contribuam para determinar o vetor deslocamento elétrico $D(z, t)$ no instante t . Invocamos o princípio da causalidade para justificar o fato das integrais serem nulas quando $t \leq t' \leq \infty$ e $t \leq t'' \leq \infty$, de modo que eventos futuros não influenciem medidas no instante t (presente).

Em analogia às Eqs. (31) e (32), escrevemos o vetor deslocamento elétrico longitudinal total $\vec{D}(z, t)$ na forma

$$\vec{D}(z, t) = D_1(z, t)\hat{e}_1 + D_1^*(z, t)\hat{e}_1^* + D_2(z, t)\hat{e}_2 + D_2^*(z, t)\hat{e}_2^* , \quad (34)$$

em que $D_1(z, t)$ e $D_2(z, t)$ são dados por

$$D_1(z, t) = U_1(z, t) \exp[ik_1(\omega_0)z - i\omega_0 t] \quad (35)$$

$$D_2(z, t) = U_2(z, t) \exp[ik_2(2\omega_0)z - 2i\omega_0 t] .$$

Consistentemente com as condições de contorno assumidas do tipo SVEA, as expressões (31-33), juntamente com (34-35), permitem obter as formas funcionais das amplitudes $U_1(z, t)$ e $U_2(z, t)$ em termos das amplitudes $A_1(z, t)$ e $A_2(z, t)$ dos campos elétricos longitudinais. A partir deste resultado, substituindo o vetor deslocamento elétrico longitudinal total $\vec{D}(z, t)$, dado em (34), e o vetor campo elétrico longitudinal $\vec{E}(z, t)$, dado em (33), nas equações de Maxwell,

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} = 0 , \quad (36)$$

obtemos as desejadas equações dinâmicas que descrevem a evolução temporal das amplitudes dos campos elétricos longitudinais $A_i(z, t)$ de nosso pacote de ondas em materiais dielétricos do tipo $\chi^{(2)}$.

O procedimento descrito no parágrafo acima envolve um longo cálculo incompatível com o espaço disponível para este artigo. Sugerimos as Refs. [10, 11] aos leitores interessados nesta dedução. Em particular, a Ref. [10], contém uma descrição detalhada dos procedimentos matemáticos envolvidos na obtenção das equações dinâmicas abaixo. Logo, o sistema de equações diferenciais que descrevem a evolução temporal das amplitudes dos campos elétricos longitudinais dos modos fundamental e segundo harmônico em um guia de ondas dielétrico do tipo $\chi^{(2)}$ são

$$i \frac{\partial A_1}{\partial z} + ik_1' \frac{\partial A_1}{\partial t} - \frac{k_1''}{2} \frac{\partial^2 A_1}{\partial t^2} + K_1 A_1^* A_2 \exp[-i(\Delta k)z] = 0 \quad (37)$$

$$i \frac{\partial A_2}{\partial z} + ik_2' \frac{\partial A_2}{\partial t} - \frac{k_2''}{2} \frac{\partial^2 A_2}{\partial t^2} + K_2 A_1^2 \exp[i(\Delta k)z] = 0 . \quad (38)$$

No sistema acima $k_1(\omega)$ e $k_2(\omega)$ são respectivamente as relações de dispersão das ondas fundamental e segundo harmônico

$$k_1(\omega) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\tilde{\epsilon}_1^{(1)}} \quad \text{e} \quad k_2(\omega) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\tilde{\epsilon}_2^{(1)}} , \quad (39)$$

enquanto que $k_1' = \left[\frac{\partial k_1}{\partial \omega} \right]_{\omega=\omega_0}$ e $k_2' = \left[\frac{\partial k_2}{\partial \omega} \right]_{\omega=\omega_0}$ são as

respectivas velocidades de grupo e, $k_1'' = \left[\frac{\partial^2 k_1}{\partial \omega^2} \right]_{\omega=\omega_0}$ e $k_2'' = \left[\frac{\partial^2 k_2}{\partial \omega^2} \right]_{\omega=\omega_0}$ são as respectivas dispersões das velocidades de grupo. Por conveniência, definimos também as quantidades $\Delta k = 2k_1(\omega_0) - k_2(2\omega_0)$, $K_1 = \frac{\omega_0^2}{k_1(\omega_0)c^2} \tilde{\epsilon}_1^{(2)}$ e $K_2 = \frac{2\omega_0^2}{k_2(2\omega_0)c^2} \tilde{\epsilon}_2^{(2)}$. Enfim, as quantidades acima definidas dependem de

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_1^{(1)} &= 1 + 4\pi\tilde{\chi}_1^{(1)}(\omega_0) & \tilde{\epsilon}_2^{(1)} &= 1 + 4\pi\tilde{\chi}_2^{(1)}(2\omega_0) \\ \tilde{\epsilon}_1^{(2)} &= 4\pi\tilde{\chi}_1^{(2)}(2\omega_0, -\omega_0) & \tilde{\epsilon}_2^{(2)} &= 4\pi\tilde{\chi}_2^{(2)}(\omega_0, \omega_0) , \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_1^{(1)}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt [\hat{e}_1^* \cdot \chi^{(1)}(t) \cdot \hat{e}_1] \exp(i\omega t) \\ \tilde{\chi}_2^{(1)}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt [\hat{e}_2^* \cdot \chi^{(1)}(t) \cdot \hat{e}_2] \exp(i\omega t) \\ \tilde{\chi}_1^{(2)}(2\omega, -\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dt' [\hat{e}_1^* \cdot \chi^{(2)}(t, t') : \hat{e}_1^* \hat{e}_2] \exp(2i\omega t' - i\omega t) \\ \tilde{\chi}_2^{(2)}(\omega, \omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dt' [\hat{e}_2^* \cdot \chi^{(2)}(t, t') : \hat{e}_1 \hat{e}_1] \exp(i\omega t' + i\omega t) \end{aligned} \tag{40}$$

são tomadas em torno das situações de equilíbrio $\omega = \omega_0$ e $\omega = 2\omega_0$.

As Eqs. (37) e (38) podem ainda ser reduzidas a sua forma normalizada fazendo as seguintes mudanças de variáveis

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{|k_1''|}{\tau^2} z & s &= \frac{t}{\tau} - \frac{k_1'}{\tau} z \\ \delta &= \frac{(k_1' - k_2')\tau}{|k_1''|} & \alpha &= \frac{k_2''}{|k_1''|} \\ \beta &= \frac{\Delta k \tau^2}{|k_1''|} & a_1 &= \frac{|K_1 K_2|^{\frac{1}{2}} \tau^2 A_1}{|k_1''|} \\ a_2 &= \frac{K_1 \tau^2 A_2}{|k_1''|} & r &= \text{sgn}(k_1'') , \end{aligned} \tag{41}$$

em que assumimos que $k_1'' \neq 0$ e τ sendo uma escala de tempo arbitrária, normalmente escolhida igual à duração sob a qual a amplitude da onda solitária varia. Nestas novas variáveis obtemos o sistema de equações diferenciais acopladas

$$\begin{aligned} i \frac{\partial a_1}{\partial \xi} - \frac{r}{2} \frac{\partial^2 a_1}{\partial s^2} + a_1^* a_2 \exp(-i\beta\xi) &= 0 \\ i \frac{\partial a_2}{\partial \xi} - i\delta \frac{\partial a_2}{\partial s} - \frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 a_2}{\partial s^2} + a_1^2 \exp(i\beta\xi) &= 0 , \end{aligned} \tag{42}$$

que descreve a evolução dos campos elétricos longitudinais dos modos fundamental e segundo harmônico se propagando em um guia de ondas dielétrico não-linear do tipo $\chi^{(2)}$. Na próxima seção iremos procurar soluções analíticas para o sistema de equações diferenciais acopladas (42).

IV A equação de Schrödinger não-linear e as soluções do tipo sólitons

Nesta seção mostramos que o sistema de equações diferenciais (42) desacopla-se assintoticamente, com a dinâmica do sistema passando a ser descrita pela NLSE. Este resultado assintótico justifica a procura por soluções analíticas do tipo sólitons para o sistema acoplado (42), já que a NLSE apresenta tais soluções. Finalmente obtemos as soluções analíticas do tipo sólitons que satisfazem o sistema (42).

Começamos discutindo um limite assintótico das Eqs. (42). Para isto é conveniente introduzir as seguintes variáveis

$$\begin{aligned} \hat{a}_1 &= \frac{a_1}{|\beta|^{\frac{1}{2}}} \\ \hat{a}_2 &= a_2 \exp(-i\beta\xi) , \end{aligned} \tag{43}$$

de forma que nestas novas variáveis, as Eqs. (42) se reduzem a

$$i \frac{\partial \hat{a}_1}{\partial \xi} - \frac{r}{2} \frac{\partial^2 \hat{a}_1}{\partial s^2} + \hat{a}_1^* \hat{a}_2 = 0 \quad (44)$$

$$i \frac{\partial \hat{a}_2}{\partial \xi} - \beta \hat{a}_2 - i \delta \frac{\partial \hat{a}_2}{\partial s} - \frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 \hat{a}_2}{\partial s^2} + |\beta| \hat{a}_1^2 = 0 \quad (45)$$

Considerando o limite no qual $|\beta|$ é muito grande, da Eq.

(45) podemos ver que, em primeira ordem,

$$\hat{a}_2 = \frac{|\beta|}{\beta} \hat{a}_1^2 = b \hat{a}_1^2 \quad (46)$$

onde $b = \text{sgn}(\beta) = |\beta|/\beta$. Substituindo a Eq. (46) nos termos com derivadas da Eq. (45), e utilizando (44), obtemos a Eq. (45) em segunda ordem, ou seja,

$$\hat{a}_2 = b \hat{a}_1^2 + \frac{b}{\beta} \left[r \hat{a}_1 \frac{\partial^2 \hat{a}_1}{\partial s^2} - 2i \delta \hat{a}_1 \frac{\partial \hat{a}_1}{\partial s} - \frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 \hat{a}_1^2}{\partial s^2} - 2b |\hat{a}_1|^2 \hat{a}_1^2 \right] \quad (47)$$

Continuando com este processo iterativo, obtemos termos com potências crescentes de $\frac{1}{\beta}$ e podemos então escrever que

$$\hat{a}_2 = b \hat{a}_1^2 + O\left(\frac{1}{\beta}\right), \quad (48)$$

de forma que $O\left(\frac{1}{\beta}\right)$ anula-se quando $\beta \rightarrow \infty$. Substituindo a Eq. (48) em (44), obtemos no limite $\beta \rightarrow \infty$,

$$\frac{r}{2} \frac{\partial^2 \hat{a}_1}{\partial s^2} - b |\hat{a}_1|^2 \hat{a}_1 = i \frac{\partial \hat{a}_1}{\partial \xi}, \quad (49)$$

que é a NLSE.

Observe que no limite estudado, o sistema (44)-(45) torna-se desacoplado, transformando-se na Eq. (49). O acoplamento surge devido a não-linearidade $\chi^{(2)}(t-t', t-t'') : \vec{E}(z, t') \vec{E}(z, t'')$ em (33), resultando nas equações de movimento (37-38), onde o acoplamento dos campos é devido as quantidades K_1 e K_2 , dadas em termos de $\tilde{\epsilon}_1^{(2)}$ e

$\tilde{\epsilon}_2^{(2)}$ que descrevem todas propriedades não-lineares do meio conforme (40). Conclui-se, então, que a intensidade efetiva da não-linearidade é inversamente proporcional a $|\beta|$. Nesse sentido, o sistema de Eqs. (44)-(45) pode ser visto como uma deformação da equação de Schrödinger não-linear (49), onde $1/|\beta|$ mede esta deformação. Outro resultado importante do estudo acima é que sabendo-se que a NLSE é um limite do sistema de Eqs. (42) e que a NLSE possui soluções do tipo sóliton [14, 15], espera-se que tais soluções também resolvam o sistema de Eqs. (42). Portanto, consideramos o *ansatz* abaixo do tipo sóliton

$$\begin{aligned} \hat{a}_1 &= \Lambda_1 \text{sech}^2(\lambda s - v \xi) \exp(i \kappa \xi + i \nu s) \\ \hat{a}_2 &= \Lambda_2 \text{sech}^2(\lambda s - v \xi) \exp(2i \kappa \xi + 2i \nu s) \end{aligned} \quad (50)$$

em que $\Lambda_1, \Lambda_2, \lambda, v, \kappa$ e ν são parâmetros a serem ajustados pelo sistema (42). Substituindo este *ansatz* no sistema, obtemos as seguintes equações

$$\Lambda_1 \left[\frac{r \nu^2}{2} - \kappa - 2r \lambda^2 \right] + 2i \Lambda_1 [v + r \lambda \nu] \text{tgh}(\lambda s - v \xi) + \Lambda_1 [\Lambda_2 + 3r \lambda^2] \text{sech}^2(\lambda s - v \xi) = 0 \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_2 [-2\kappa - \beta + 2\delta \nu + 2\alpha \nu^2 - 2\alpha \lambda^2] + 2i \Lambda_2 [v + \delta \lambda + 2\alpha \lambda \nu] \text{tgh}(\lambda s - v \xi) \\ + \Lambda_2 [3\alpha \lambda^2 + |\beta| \Lambda_1^2] \text{sech}^2(\lambda s - v \xi) = 0, \end{aligned}$$

em que todos os termos entre colchetes do sistema de equações algébricas (51) devem se anular, de modo a satisfazer o sistema de equações diferenciais (42), o que resulta no sistema algébrico

$$\frac{r \nu^2}{2} - \kappa - 2r \lambda^2 = 0$$

$$\begin{aligned} v + r \lambda \nu &= 0 \\ \Lambda_2 + 3r \lambda^2 &= 0 \end{aligned} \quad (52)$$

$$-2\kappa - \beta + 2\delta \nu + 2\alpha \nu^2 - 2\alpha \lambda^2 = 0$$

$$v + \delta \lambda + 2\alpha \lambda \nu = 0$$

$$3\alpha\lambda^2 + |\beta|\Lambda_1^2 = 0 .$$

Note que o sistema (52) contém termos quadráticos, de modo que dois grupos de soluções serão possíveis. Resolvendo o sistema obtemos as soluções

$$\nu = -\frac{\delta}{2\alpha - r}$$

$$\kappa = \frac{r\delta^2}{2(2\alpha - r)^2} - \frac{r\delta^2}{(2r - \alpha)(2\alpha - r)} - \frac{r\beta}{2r - \alpha}$$

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{\delta^2}{2(2r - \alpha)(2\alpha - r)} + \frac{\beta}{2(2r - \alpha)}}$$

(53)

$$v = \pm \frac{r\delta}{2\alpha - r} \sqrt{\frac{\delta^2}{2(2r - \alpha)(2\alpha - r)} + \frac{\beta}{2(2r - \alpha)}}$$

$$\Lambda_1 = \pm \frac{3}{2(2r - \alpha)} \sqrt{\frac{\alpha r}{|\beta|}} \left[\frac{\delta^2}{2\alpha - r} + \beta \right]$$

$$\Lambda_2 = \frac{3r}{2(\alpha - 2r)} \left[\frac{\delta^2}{2\alpha - r} + \beta \right] .$$

Substituindo no *ansatz* (50), os parâmetros encontrados em (53), obtemos a solução particular do tipo sóliton para o sistema de equações diferenciais (42),

$$\hat{a}_1 = \pm \frac{3}{2(\alpha - 2r)} \sqrt{\frac{\alpha r}{|\beta|}} \left[\frac{\delta^2}{2\alpha - r} + \beta \right] \operatorname{sech}^2 \left[\pm \sqrt{\frac{\delta^2}{2(2r - \alpha)(2\alpha - r)} + \frac{\beta}{2(2r - \alpha)}} \left(s - \frac{r\delta}{2\alpha - r} \xi \right) \right] \\ \times \exp \left\{ i \left[\frac{r\delta^2}{2(2\alpha - r)^2} - \frac{r\delta^2}{(2r - \alpha)(2\alpha - r)} - \frac{r\beta}{2r - \alpha} \right] \xi - \frac{i\delta}{2\alpha - r} s \right\}$$

(54)

$$\hat{a}_2 = \frac{3r}{2(\alpha - 2r)} \left[\frac{\delta^2}{2\alpha - r} + \beta \right] \operatorname{sech}^2 \left[\pm \sqrt{\frac{\delta^2}{2(2r - \alpha)(2\alpha - r)} + \frac{\beta}{2(2r - \alpha)}} \left(s - \frac{r\delta}{2\alpha - r} \xi \right) \right] \\ \times \exp \left\{ 2i \left[\frac{r\delta^2}{2(2\alpha - r)^2} - \frac{r\delta^2}{(2r - \alpha)(2\alpha - r)} - \frac{r\beta}{2r - \alpha} \right] \xi - \frac{2i\delta}{2\alpha - r} s \right\} .$$

Finalmente, resta-nos correlacionar fisicamente as quantidades r , α , β e δ definidas em (41) com as propriedades não-lineares da fibra ótica. Como já visto, a quantidade β é uma medida do inverso da intensidade de não-linearidade do material. Sendo a não-linearidade responsável pela geração do segundo harmônico [13], então a quantidade β mede o balanço de energia entre o modo fundamental e segundo harmônico.

Quanto aos demais parâmetros, analisando a solução (54) e comparando-a com a solução de uma onda solitária genérica (veja Introdução), identifica-se o termo

$$\frac{r\delta}{2\alpha - r}$$

como a velocidade de propagação destes sólitons. Desta forma, as quantidades r , α e δ estão relacionadas com a velocidade de propagação do sóliton dado em (54).

Para realizar uma análise mais detalhada das quantidades r , α e δ , necessitamos do conceito de dispersão cromática (veja Ref. [14]). Dispersão cromática é uma propriedade que se manifesta através da dependência do índice

de refração $n(\omega)$ da fibra ótica com a frequência das ondas. Da Eq. (39) define-se

$$k_j(\omega) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_j^{(1)}} = \frac{\omega}{c} n_j(\omega) \quad \text{para } j = 1, 2 . \quad (55)$$

Sendo

$$k'_j(\omega) = \frac{\partial k_j}{\partial \omega} = \frac{1}{v_j} \quad \text{e} \quad k''_j(\omega) = \frac{\partial^2 k_j}{\partial \omega^2} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{1}{v_j} \right) , \quad (56)$$

em que v_j para $j = 1, 2$ são as velocidades de grupo das ondas fundamental e segundo harmônico, respectivamente, vemos que a quantidade $k'_j(\omega)$ mede o inverso da velocidade de grupo das ondas, enquanto a quantidade $k''_j(\omega)$ mede o alargamento dessas ondas. A quantidade $k''_j(\omega)$ é geralmente chamada de dispersão da velocidade de grupo (GVD) (group-velocity dispersion). Quando $k''_j(\omega) > 0$ dizemos que o meio exibe dispersão normal. Nesse regime, as componentes do pacote de ondas que possuem frequência maior propagam-se com velocidade menor do que as componentes que possuem frequência menor. Em contraste, uma situação

oposta ocorre no chamado regime de dispersão anômalo no qual $k_j''(\omega) < 0$. Assim, podemos interpretar a quantidade α [veja definição dada em (41)], como sendo um parâmetro que mede a dispersão relativa entre as ondas fundamental e segundo harmônico. Quando $|\alpha| > 1$, a onda do segundo harmônico possui dispersão maior que a onda fundamental. Quando $|\alpha| < 1$, a onda do segundo harmônico possui dispersão menor que a onda fundamental. Para valores de α positivos, a onda do segundo harmônico se encontra no regime de dispersão normal. Para valores de α negativos, a onda do segundo harmônico se encontra no regime de dispersão anômalo.

De maneira similar, podemos interpretar o parâmetro r como sendo um indicador do regime de dispersão da onda fundamental no guia de ondas não-linear. Quando $r = +1$, a onda fundamental se encontra no regime de dispersão normal, enquanto que para $r = -1$ a onda fundamental se encontra no regime de dispersão anômalo.

Enfim, a partir da definição dada em (41), observamos que a quantidade δ é proporcional a

$$k_1'(\omega_0) - k_2'(\omega_0) = [v_1(\omega_0)]^{-1} - [v_2(\omega_0)]^{-1} \quad (57)$$

que mede a diferença da velocidade de grupo entre os modos fundamental e o segundo harmônico. Quando $\delta > 0$, a velocidade de grupo do segundo harmônico é maior que a velocidade de grupo do modo fundamental. Para $\delta < 0$ ocorre o oposto.

Resumidamente, estudamos um sistema de equações diferenciais acopladas que descreve a evolução longitudinal de um pacote de ondas, composto do primeiro e segundo harmônicos, em um guia de ondas retangular com não-linearidade quadrática. Verificamos que o sistema de equações se desacopla num certo limite, com a sua dinâmica dada, então, pela equação de Schrödinger não-linear. Este resultado assintótico permitiu-nos obter soluções do tipo sóliton para o nosso sistema acoplado. Finalmente, sendo a solução do tipo sóliton obtida em (54) dependente das quantidades r , α , β e δ , definidas em (41), relacionamos tais quantidades com as propriedades não-lineares da fibra ótica, concluindo que podemos escolher a configuração da onda do tipo sóliton (amplitude, largura, velocidade, balanço de energia dos modos..), selecionando a fibra ótica não-linear adequada. Evidentemente, procura-se materiais não-lineares que possibilitem altas taxas de transmissão a baixo custo.

Referências

- [1] G. Eilenberger, *Soliton: Mathematical Methods for Physicists*, Springer-Verlag, Heidelberg (1981).
- [2] E. Fermi, J. Pasta e S. M. Ulam, "Studies in nonlinear problem" Tech. Rep. **LA-1940**, Los Alamos Sci. Lab. (1955); também em *Nonlinear Wave Motion*, editado por A. C. Newell e R. I. Providence, American Mathematical Society, New York (1974).
- [3] N. J. Zabusky e M. D. Kruskal, "Interactions of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of the initial states" *Phys. Rev. Lett.* **15**, 240-243 (1965).
- [4] H. A. Haus e W. S. Wong, "Soliton in optical communications" *Reviews of Modern Physics* **68**, 423-444 (1996).
- [5] H.M. Nussenzveig, *Curso de Física Básica*, vol.4, Editora Edgard Blucher Ltda., São Paulo (1998).
- [6] J. D. Jackson, *Eletrodinâmica Clássica*, Editora Guanabara Dois S.A., Rio de Janeiro (1983).
- [7] E. Butkov, *Física Matemática*, Editora Guanabara Dois S.A., Rio de Janeiro (1978).
- [8] S. Gasiorowicz, *Física Quântica*, Editora Guanabara Dois S.A., Rio de Janeiro (1979).
- [9] P. G. Drazin e R. S. Johnson, *Soliton: an Introduction*, Cambridge University Press, Cambridge (1993).
- [10] W. Galléas, *Trabalho de Conclusão de Curso: Sólitons em Guias Dielétricos*, Universidade Estadual de Londrina (2000). Disponível em <http://www.mat.uel.br/plnatti/index-colaboradores/Galleas.htm>
- [11] C. R. Menyuk, R. Schiek e L. Torner, "Solitary waves due to $\chi^{(2)} : \chi^{(2)}$ cascading" *J. Opt. Soc. Am.* **B11**, 2434-2443 (1994).
- [12] J. R. Reitz, F. J. Milford e R. W. Christy, *Fundamentos da Teoria Eletromagnética*, Editora Campus Ltda., Rio de Janeiro (1982).
- [13] P. N. Butcher e D. Cotter, *The Elements of Nonlinear Optics*, Cambridge University Press, Cambridge (1991); Y. R. Shen, *The Principles of Nonlinear Optics*, John Wiley and Sons Inc., New York (1984).
- [14] G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*, Academic Press, New York (1995).
- [15] V. E. Zakarov e A. B. Shabat, "Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media" *JETP* **34**, 62-69 (1972).