

Um Cálculo da Espessura da Camada Limite

A calculation of the boundary layer thickness

G. F. Leal Ferreira

CP 369, 13560-970, São Carlos, SP

Recebido em 15 de janeiro, 2002. Aceito em 1 de fevereiro, 2002.

Revisita-se o problema da camada limite viscosa sobre um perfil plano, derivando-se as equações de Prandtl e depois a de Blasius. Daí, através de procedimento simplificado, uma solução aproximada é obtida cuja precisão ombreia com aquela fornecida pelo conhecido método de von Kármán.

The viscous boundary layer problem over a plane is re-visited and the Prandtl system and the Blasius equation are derived. From the latter, a simplified solution is obtained which shows to be close to that generated by the well known von Kármán method.

I Introdução

Em artigo recente nesta revista [1], discutiu-se a questão do perfil de velocidade horizontal na camada limite. Para os leitores menos familiarizados com este conceito, ele foi introduzido por Prandtl no início do século passado [2] para descrever a região de contacto entre um fluido incompressível (=líquido, ou fluido simplesmente) em movimento em relação a um sólido. O líquido adere, por viscosidade, ao sólido a partir da linha de contacto e atinge, na direção normal, a distâncias crescentes - a espessura variável da camada limite -, a velocidade do líquido não perturbada, U . Estamos já imaginando, por simplicidade, que o líquido se desloca em relação a um plano de espessura desprezível em cuja borda de entrada a velocidade é zero. A camada limite é aí também zero, e vai crescendo (direção y) à medida que o líquido avança na direção x . Prandtl [1] admitiu que a velocidade horizontal $u(x,y)$ é da forma $Uf(\frac{y}{\delta(x)})$, em que $\delta(x)$ é a espessura da camada limite em x . A função f satisfaz certas condições de contorno [1], que serão especificadas adiante. O interesse no presente trabalho é a determinação de $\delta(x)$.

II Fluxos horizontal e vertical na camada limite

Como mencionado acima, o perfil de velocidade horizontal $u(x,y)$ é suposto da forma

$$u(x,y) = Uf(\eta) \quad (1)$$

sendo $\eta = \frac{y}{\delta(x)} = a(x)y$, ou seja, $a(x) = \frac{1}{\delta(x)}$, com $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$.

A Fig. 1 mostra esquematicamente o fluido se aproximando da placa plana, fixa, P, com velocidade uniforme U e atingindo-a em O, a partir de onde se mede a abscissa x . A curva (em verdade, superfície) C delimita a região do fluido fortemente perturbado, contemplado na aproximação, sendo $\delta(x)$, a espessura da camada limite, a grandeza que queremos calcular. No elemento dx , a velocidade horizontal do fluido $u(x,y)$ obedece a Eq.1. É interessante notar que para y constante, a velocidade u diminui para x crescente (derivada de u para y constante) e sendo o fluido incompressível, isto significa que há também um movimento vertical, $v(x,y)$, que em $\delta(x)$ atravessa C. Pela equação da continuidade

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

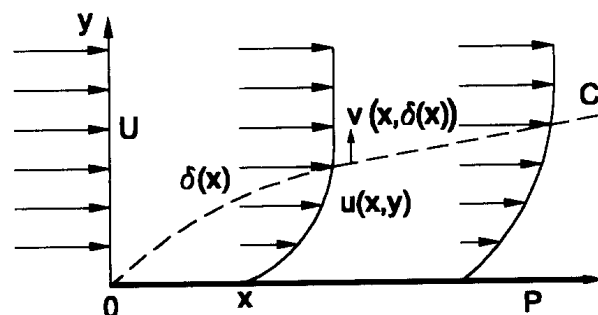


Figura 1. O líquido, com velocidade U atinge a placa OP. A curva C delimita a camada limite. $u(x,y)$ é a velocidade horizontal e $v(x,\delta(x))$ indica, genericamente, a velocidade vertical ao longo de C.

e da Eq.1

$$\frac{\partial u}{\partial x} = Uyfa' \quad (3)$$

em que o ponto significa derivada em relação a η e a linha, derivada em relação a x . Na maioria dos casos, as variáveis η e x não serão mostradas explicitamente. Da Eq.2

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -Uy\dot{f}a' \quad (4)$$

ou

$$\partial v = -Uy\dot{f}a'\partial y \quad (5)$$

Mas para x constante, temos $y = \frac{x}{a}$ e $\partial y = \frac{dx}{a}$ e a Eq.5 integrada dá

$$\begin{aligned} v &= -U\frac{a'}{a^2} \int_0^\eta \dot{f}\eta d\eta = -U\frac{a'}{a^2} \int_0^\eta \eta df \\ &= -U\frac{a'}{a^2} (\eta f - \int_0^\eta f d\eta) \end{aligned} \quad (6)$$

É razoavelmente intuitivo que $v(x, \delta(x))$ deve ser bem menor que U na aproximação proposta. De outra forma, isto é, se u e v fossem da mesma ordem, nenhuma aproximação poderia ser tentada. Supondo-se ser este o caso, e 1) considerando-se os termos no parêntesis da Eq.6 como da ordem da unidade, e 2) que $a(x) = \frac{1}{\delta(x)}$, vê-se que

$$v \simeq U\delta'(x) \quad (7)$$

e, então, concluímos que

$$\delta'(x) \ll 1 \quad (7')$$

III A Equação de Prandtl

Tratando-se de escoamento viscoso, devemos usar a Equação de Navier-Stokes. Notemos, porém, que pela Eq.3

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -U\eta\dot{f}\frac{\delta'(x)}{\delta(x)} \quad (8)$$

é da ordem de $U\frac{\delta'(x)}{\delta(x)}$, de ordem inferior a $\frac{\partial u}{\partial y}$, que é da ordem de $\frac{U}{\delta(x)}$. Portanto as derivadas horizontais de u podem ser desprezadas em frente às suas derivadas verticais.

Com isso, a Equação de Navier-Stokes (sem gradiente horizontal de pressão) se simplifica, havendo no termo de força viscosa somente a derivada segunda de u em relação a y . Ela é

$$\rho \frac{du(x(t), y(t))}{dt} \equiv \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v \right) = -\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (9)$$

sendo ρ a densidade do líquido e μ a viscosidade. Apesar de v ser bem menor que u , os dois termos no parêntesis da Eq.9 são da mesma ordem de grandeza. Isto porque, por compensação, $\frac{\partial u}{\partial x}$ é bem menor que $\frac{\partial u}{\partial y}$. A Eq.9 foi proposta por Prandtl [3].

IV A Equação de Blasius

Blasius transformou a Eq.9 numa equação diferencial em η . Para isto, da Eq.3 temos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = U\eta\dot{f}\frac{a'}{a} \quad (10)$$

Da Eq.1

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Ufa \quad (11)$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = U\dot{f}a^2 \quad (12)$$

resultando para a Eq.9, com $\mu_c = \mu/\rho$ o coeficiente de viscosidade cinemática,

$$U^2\eta\dot{f}\frac{a'}{a} - U^2\frac{a'}{a}\dot{f}(\eta f - \int_0^\eta f d\eta) = -\mu_c U\dot{f}a^2 \quad (13)$$

usando-se as Eqs.1,6,10-12. Notemos que ocorre cancelamento dos dois primeiros termos do lado esquerdo e que

$$\frac{Ua'}{\mu_c a^3} = -\frac{U\delta'(x)\delta(x)}{\mu_c} = -\frac{U}{2\mu_c} \frac{d\delta^2(x)}{dx} = -\frac{1}{K(x)} \quad (14)$$

em que se definiu $K(x)$ uma função de x . Após um certo re-arranjo, a Eq.13 pode ser escrita assim

$$\frac{\dot{f} \int_0^\eta f d\eta}{\dot{f}} = K(x) \quad (15)$$

de onde se conclui que o lado esquerdo, função de η , e o lado direito, função de x , são iguais a uma constante, que chamaremos de K . Com

$$g(\eta) = \int_0^\eta f d\eta \quad (16)$$

a Eq.15 torna-se

$$\ddot{g} = K \ddot{g} \quad (17)$$

equação que Blasius procurou resolver [3]. Na verdade, por uma redefinição de g , o fator K na Eq.17 pode ser eliminado. Tomaremos, porém, aqui um outro rumo mais simples, procurando determinar K de uma forma aproximada pela Eq.17 e retornando depois à Eq.14 para a determinação de $\delta(x)$.

V Determinação aproximada de K e de $\delta(x)$

Vamos determinar K impondo um perfil aproximado para $f(\eta)$. Para a solução exata, a Eq.17 é satisfeita para todos os valores de η , $0 < \eta < 1$. Com um perfil aproximado, vamos impor que a igualdade entre o lado esquerdo e direito da Eq.17 se dê em média, ou seja

$$\int_0^1 (\ddot{g}g - K \ddot{g}) d\eta = 0 \quad (18)$$

No tratamento usual do problema devido a von Kármán, no qual se iguala a perda de momento do líquido com o atrito viscoso sobre a placa, usa-se o perfil proposto por Prandtl, dado por

$$f(\eta) = \frac{1}{2}(3\eta - \eta^3) \quad (19)$$

que satisfaz as condições especificadas abaixo da Eq.1 (isto é, $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$) e, adicionalmente, $f'(1) = 0$, ou seja, a velocidade horizontal, Eq.1, atinge suavemente o valor U em C . Das Eqs.16 e 19 obtêm-se

$$g = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\eta^2 - \frac{1}{4}\eta^4 \right) \quad (20)$$

$$\ddot{g} = \frac{3}{2}(1 - \eta^2) \quad (21)$$

$$\ddot{\ddot{g}} = -3\eta \quad (22)$$

e substituindo-se as Eqs.20-22 na Eq.16, obtém-se

$$K = \frac{13}{140} \quad (23)$$

e retornando-se à Eq.14, tem-se agora

$$\frac{d\delta^2(x)}{dx} = \frac{280\mu_c}{13U} \quad (24)$$

ou seja,

$$\delta(x) = 4,64 \sqrt{\frac{\mu_c x}{U}} \quad (25)$$

O fato de $\delta(x)$ ser inversamente proporcional a U e a ρ , este através de μ_c , mostra que as forças inerciais têm um papel preponderante na formação da camada, ou seja, uma maior densidade de momento do líquido impõe camada limite mais fina. A força viscosa sobre a placa deve ser, grosso modo, diretamente proporcional a U e inversamente proporcional a $\delta(x)$. Vemos, então, que a força de arraste sobre a placa, de acordo com Eq.25, vai com $U^{\frac{3}{2}}$.

VI Comentários

A solução de von Kármán [2] leva ao coeficiente numérico 4,65 na Eq.25 (não sabemos se ela é matematicamente equivalente àquela dada acima e a diferença, 4,65 e 4,64 adviriam de aproximações diferentes). Por outro lado, a de Blasius, a partir da equação diferencial da Eq.17 [3], por solução em série, dá o valor convencionalizado de 4,52.

Mesmo para escoamentos turbulentos, há formação de camada limite viscosa na região próxima de $x = 0$ [2]. Tomando-se escoamento de água, com $\mu_c \simeq 1,2 \cdot 10^{-2}$ cm²/s, com velocidade de 1 m/s, para a qual já há turbulência, a Eq.25 dá para $\delta(x) \approx 5 \cdot 10^{-2} \sqrt{x}$ cm, isto é, uma camada bem estreita.

O que aconteceria se usássemos para o perfil de velocidades $f(\eta)$, Eq.19, um polinômio de ordem superior a três, mantendo-se as mesmas três condições de contorno abaixo da Eq.19, como determinado em [1]? Evidentemente, o perfil dependeria agora de um parâmetro extra, b , $f(\eta, b)$. Obtidos, então, os correspondentes g , \dot{g} , \ddot{g} , a Eq.18 forneceria uma função, vamos dizer, $H(K, b) = 0$. Impondo-se agora um mínimo (na verdade um extremo) para $H(K, b)$, isto é, $\partial H / \partial b = 0$, K poderá ser determinado. Quer dizer, a eventual arbitrariedade na definição do perfil pode ser eliminada 'dinamicamente' pela Eq.18 e imposição de um mínimo em relação aos parâmetros excedentes.

Por fim, vamos testar se a condição de validade da aproximação na Eq.7' de fato se verifica. Temos

$$\delta'(x) = 2,33 \sqrt{\frac{\mu_c}{Ux}} \ll 1 \quad (26)$$

mostrando que para pontos próximos à borda de entrada (ponto O na Fig.1) a aproximação não é boa. Para o caso do escoamento considerado acima, isto ocorreria para $x \ll 6,5 \cdot 10^{-4}$ cm. Como a perturbação causada pela própria borda não foi considerada, isto parece não prejudicar muito a solução, que seria válida para x suficientemente grande, eventualmente transicionando para a camada limite turbulenta, para x ainda maiores [2].

Agradecimentos

O autor agradece ao CNPq a bolsa de produtividade.

Referências

- [1] Katia B. de Lacerda e A. E. A. Amorim, Rev. Brasil. Ensino Física, textbf23, 196 (2001).
- [2] Victor L. Streeter, *Mecânica dos Fluidos*, Editora McGraw-Hill do Brasil, Ltda., 1974, Cap.V.
- [3] J. W. Daily e D. R. F. Harleman, *Fluid Dynamics*, Addison-Wesley Publ. Co. Inc., 1973, Cap.10.