

Medida do Momento de Inércia de um Disco

Measure of the moment of inertia of a disk

Carlos A.F. Pintão, Moacir P. de Souza Filho, Carlos R. Grandini

fonzar@fc.unesp.br

Departamento de Física, Unesp, Bauru

C.P.473, 17033-360, Bauru, SP, Brasil

Roberto Hessel

Departamento de Física, Unesp, Rio Claro

C.P.178, 13500-970, Rio Claro, SP, Brasil

Recebido em 16 de junho, 2000. Aceito em 15 de setembro, 2000

Neste trabalho, descreve-se uma montagem que permite medir, a partir de uma corrente elétrica, a velocidade angular alcançada por um disco, girando em torno de um eixo, quando submetido a um torque com duração definida. A partir dessas informações, mostra-se como é possível determinar o momento de inércia do disco, seguindo um procedimento diferente daqueles mais usuais, que em geral envolvem medida de tempo. São também apresentados alguns resultados experimentais para ilustrar a técnica. As experiências realizadas mostram que tanto o momento de inércia de um disco como o de um anel, que foram tomados como exemplo, podem ser determinados com um erro menor que 5%.

In this work, it is described an assembly which allows the measurement of the angular speed reached by a disk, that rotates around an axis, submitted to a torque with defined duration. Starting from those information, an electric current and using a different procedure, it is shown how it is possible to obtain the moment of inertia of the disk. In order to illustrate the technique, some experimental results are presented. The accomplished experiences show that the moment of inertia of a disk, as well as of ring, are determined within an error smaller than 5%.

I Introdução

Em um dos métodos tradicionais para se determinar o momento de inércia de um disco, montado com rolamento em um eixo, utiliza-se um corpo suspenso por um fio enrolado em torno de um disco menor, concêntrico e preso ao primeiro, cuja finalidade é fazer girar o disco enquanto cai. O experimento consiste em medir o tempo necessário para o corpo cair de uma altura conhecida até atingir o solo. A partir desses dados, da massa do disco, de parâmetros geométricos e considerando o princípio da conservação de energia, determina-se o momento de inércia do disco [1, 2]. Nós usamos uma montagem semelhante, mas adotamos um procedimento diferente para determinar o momento de inércia do disco. Utilizando um método originalmente proposto para medir capacitância [3,4], determinamos diretamente, a partir de uma leitura de corrente elétrica, a velocidade angular alcançada pelo disco depois do corpo suspenso ter descido uma distância conhe-

cida. Com isso, eliminamos a necessidade de se medir o tempo. Conhecendo-se a velocidade angular, obtém-se a aceleração angular. O experimento é então repetido, variando-se a massa do corpo suspenso. O momento de inércia, por sua vez, é determinado a partir da inclinação da reta obtida quando se levanta o gráfico do torque (que é conhecido) contra a aceleração angular. A vantagem do método é que não precisamos nos preocupar com o atrito, uma vez que a inclinação da reta não depende, como veremos, do torque associado às forças de atrito.

II Medida da velocidade angular

A medida da velocidade angular pode ser feita, indiretamente, recorrendo a um método de medida de capacitância conhecido por alguns como “Método de Fleming e Clinton” [5]. Na montagem esquematizada na

Fig. 1 o capacitor é carregado quando a chave S faz contato com p e descarregado através de um medidor M de corrente D.C., quando faz contato com q.

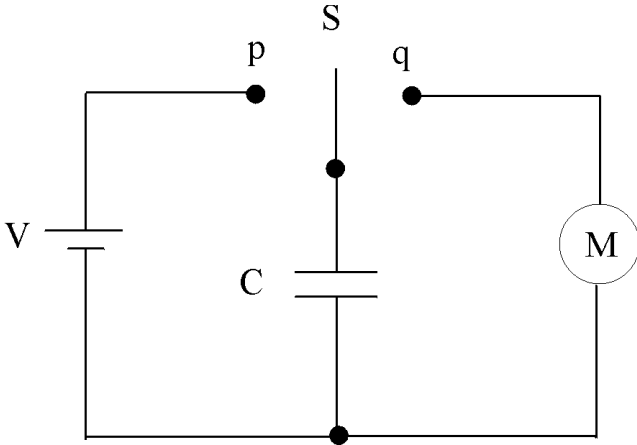
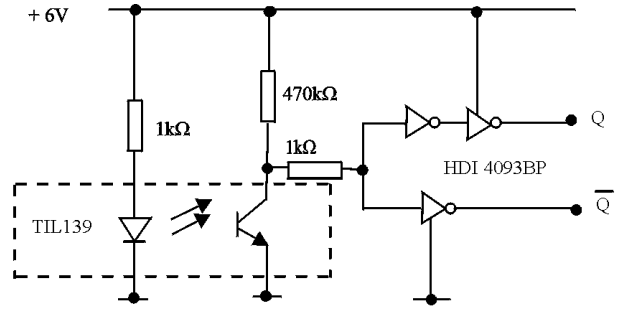


Figura 1. Circuito para medida de frequência.

Pode-se mostrar [5] que, se estas operações de carga e descarga forem realizadas a uma frequência suficientemente alta, a capacitância C será dada por $C = i/(f.V)$, onde i é a corrente lida no medidor M , f é frequência de comutação e V a tensão aplicada no capacitor. Se, por outro lado, a frequência é a grandeza desconhecida, podemos, usando a mesma montagem, determiná-la a partir da relação

$$f = \frac{i}{CV} \quad (1)$$

O elemento primordial nesta montagem é a chave S , ou seja, o dispositivo que faz periodicamente a comutação entre a carga e a descarga do capacitor. Se montarmos a chave S no próprio disco girante, poderemos relacionar a frequência dada por (1) com a velocidade angular ω do disco. Tendo isso em mente, dividimos o disco em 24 setores iguais, sendo 12 espelhados e 12 opacos dispostos alternadamente. Em seguida, montamos um sensor opto-eletrônico (emissor e receptor de radiação infravermelha), faceando a superfície do disco (Fig. 3.), capaz de reconhecer através da reflexão do feixe infravermelho a natureza da superfície que está passando diante dele. Usando um CI4093, conforme ilustrado na Fig. 2, associamos o nível lógico 0 às superfícies opacas e o nível 1 às espelhadas. Estes níveis (pulsos quadrados) irão comandar uma chave analógica CMOS comutadora (CI4066), que fará o papel da chave S na Fig. 1, dando início ao processo de carga e descarga do capacitor.



SENSOR OPTO-ELETRÔNICO

Figura 2. Esquema para montagem do sensor opto-eletrônico.

A frequência de rotação do disco, neste caso, é 1/12 da frequência de comutação f logo, a velocidade angular ω do disco pode ser escrita como $\omega = 2\pi f/12 = \pi f/6$, que combinada com a Eq. 1, resulta

$$\omega = \frac{\pi}{6CV} \cdot i \quad (2)$$

Vemos, portanto, que a velocidade angular do disco pode ser obtida diretamente a partir de uma leitura de corrente elétrica no medidor M .

III Medida do momento de inércia de um disco

Para medir o momento de inércia de um disco, usamos a montagem esquematizada na Fig 3. O disco tem um rolamento fixo no centro, de modo que pode girar sobre o eixo quase sem interferência do atrito. Concêntrico a esse disco e preso a ele, existe também um outro de menor diâmetro, em torno do qual enrola-se um fio. Na extremidade livre desse fio prende-se uma massa m , que permanecerá, inicialmente, a uma altura h acima do solo.

O torque resultante τ responsável pelo movimento de rotação do disco é dado por

$$\tau = \tau_T - \tau_{at} = I\alpha, \quad (3)$$

onde τ_T e τ_{at} são, respectivamente, os torques associados à tração T aplicada pelo fio e às forças de atrito, I é o momento de inércia do disco e α sua aceleração angular.

A aceleração α pode ser determinada a partir da Equação de Torricelli para o movimento MCUV. De fato, a altura de queda h é dada por $h = r.\Delta\theta$. Combinando este resultado com a Eq. de Torricelli, $\omega^2 = 2\alpha\Delta\theta$, obtemos:

$$\alpha = \frac{r}{2h} \cdot \omega^2 \quad (4)$$

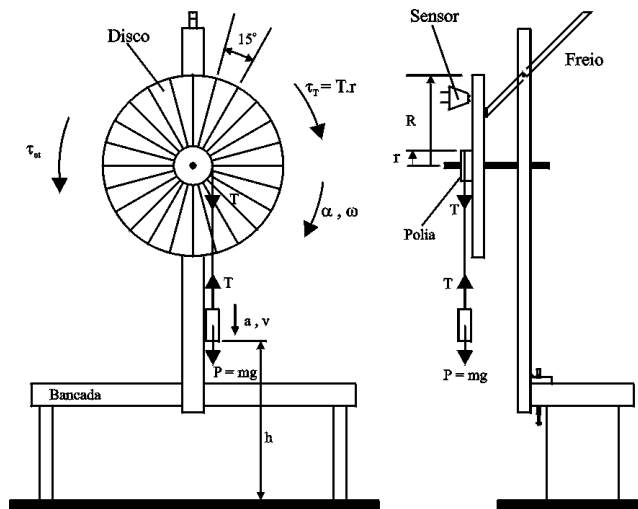


Figura 3. Esquema da montagem experimental utilizada.

Trazendo o valor de ω dado pela Eq.2 para esta expressão, resulta finalmente

$$\alpha = ki^2, \quad (5)$$

onde $k = r\pi^2/72h(CV)^2$ é uma constante conhecida, uma vez que r , h , C e V são parâmetros previamente conhecidos.

A força resultante sobre o corpo de massa m , enquanto está caindo, é $mg - T = ma = m\alpha r$, de modo que $T = m(g - \alpha r)$. Como $\tau_T = T.r$, resulta $\tau_T = m(g - \alpha r)r$, que, usando a Eq. 5, pode também ser expresso em termos de corrente como

$$\tau_T = mgr - m(kr^2).i^2. \quad (6)$$

Assim, conhecendo as constantes que comparecem nas expressões 5 e 6, podemos determinar tanto a aceleração angular como o torque, a partir de uma leitura de corrente.

Variando a massa do corpo suspenso e mantendo constantes os demais parâmetros, podemos obter um conjunto de valores de τ_T e α e com eles construir um gráfico de τ_T versus α . Pela Eq. 3, a relação entre essas grandezas deve ser linear e a inclinação da reta deve fornecer o momento de inércia I procurado. A interseção da reta com o eixo vertical, por outro lado, fornece o torque associado às forças de atrito.

Como vemos, a vantagem deste procedimento para determinar I é que, em princípio, podemos ignorar o atrito, pois a inclinação da reta não depende dele, se permanecer invariável de uma medida para outra.

IV Resultados experimentais

Experiência 1: Aceleração angular constante.

O objetivo desta experiência é verificar, preliminarmente, que o disco gira com aceleração angular constante enquanto o corpo suspenso está caindo. É interessante começar com esta experiência, porque, na seção precedente, admitimos isto como hipótese ao desenvolver a teoria apresentada.

Isso pode ser comprovado experimentalmente, verificando por exemplo se o movimento de rotação do disco obedece à equação de Torricelli. Para isto, basta levantar o gráfico de ω contra \sqrt{h} , ou i contra \sqrt{h} , uma vez que, pela Eq.2, ω é proporcional a i . O gráfico de i contra \sqrt{h} na Fig. 4 mostra um resultado típico, obtido quando um corpo suspenso de 200 g é abandonado de diferentes alturas.

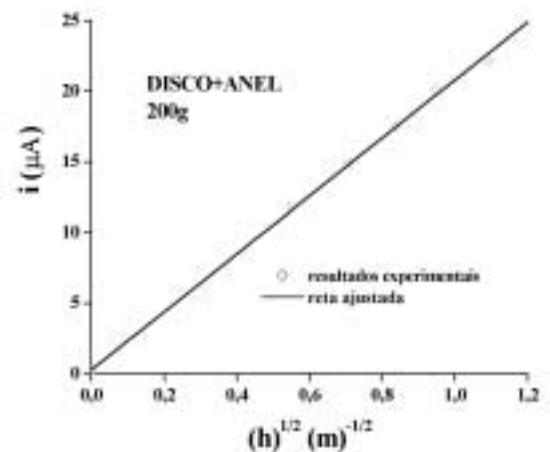


Figura 4. Corrente elétrica em função da raiz quadrada da altura de queda para um torque constante.

Ele nos mostra que, de fato, i é proporcional a \sqrt{h} (ou que ω é proporcional a \sqrt{h}) como se esperava o fato da reta, traçada pelo método dos mínimos quadrados, não passar exatamente pela origem pode ser atribuído a uma pequena incerteza associada ao zero da corrente.

Experiência 2: Momento de inércia de um disco.

Nesta experiência, usamos um disco maciço de massa $M = (2,393 \pm 0,001)\text{kg}$, raio $R = (10,00 \pm 0,05)\text{cm}$ e o disco menor com raio $r = (4,00 \pm 0,01)\text{cm}$. O corpo suspenso caiu de uma altura $h = (1,100 \pm 0,005)\text{m}$. Na Fig. 1, usamos $V = (8,7 \pm 0,1)\text{volts}$, um capacitor de poliéster de capacitância $C = (0,110 \pm$

$0,001\mu F$ e um microamperímetro com fundo de escala de $50\mu A$ e resistência interna de $1k\Omega$.

O experimento consiste em deixar o corpo suspenso cair e ler a corrente no microamperímetro imediatamente após o corpo ter atingido o solo. A partir dessa leitura, calcula-se para cada massa suspensa o torque aplicado pelo fio e a correspondente aceleração angular, usando-se respectivamente as Eqs. 5 e 6.

O gráfico do torque em função da aceleração angular na Fig. 5, traçado com o auxílio do método dos mínimos quadrados, ilustra um resultado típico. Esses dados foram obtidos usando corpos suspensos, cujas massas iam desde 30 até 400 gramas.

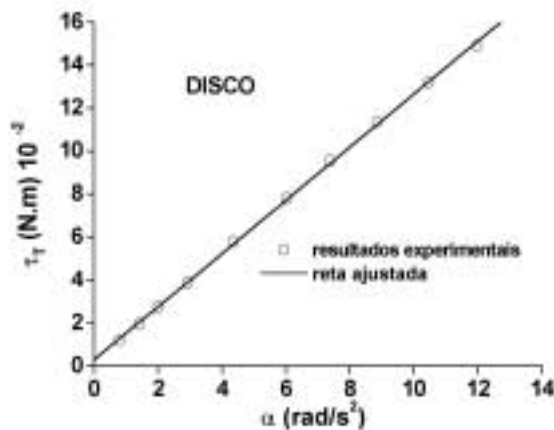


Figura 5. Torque aplicado a um disco em função da aceleração angular.

O momento de inércia do conjunto (disco grande + disco pequeno), determinado a partir da inclinação da reta, é igual a $(1,24 \pm 0,02) \cdot 10^{-2} \text{ kg.m}^2$. Por outro lado, o valor previsto teoricamente para esse conjunto, que pode ser calculado [6] pela expressão $I = (1/2)M.R^2$, vale $(1,23 \pm 0,02) \cdot 10^{-2} \text{ kg.m}^2$. Levando em conta o erro na medida, este valor e aquele obtido experimentalmente podem ser considerados praticamente coincidentes; o desvio entre os dois valores é cerca de 0,8%.

Experiência 3: Momento de inércia de um anel.

Com a mesma montagem, medimos também o momento de inércia de um anel de massa $M_a = (1,518 \pm 0,001) \text{ kg}$, raio externo $R_e = (11,50 \pm 0,05) \text{ cm}$ e raio interno R_i praticamente igual ao do disco usado na Experiência 1, no qual foi encaixado e fixado. O experimento consiste em determinar o momento de inércia do conjunto disco + anel a partir da inclinação da reta em um gráfico do torque em função da aceleração angular. O momento de inércia do anel é então determinado, subtraindo desse valor o momento de inércia do disco no qual está encaixado.

Procedendo da mesma forma que na Experiência 1, obtivemos o gráfico do torque em função da aceleração angular mostrado na Fig. 6.

O momento de inércia do conjunto, obtido calculando a inclinação da reta, vale $(3,01 \pm 0,03) \cdot 10^{-2} \text{ kg.m}^2$. Subtraindo desse valor o momento de inércia do disco, obtemos para o momento de inércia do anel o valor $(1,77 \pm 0,04) \cdot 10^{-2} \text{ kg.m}^2$. Esse valor praticamente coincide com o teórico, $(1,76 \pm 0,02) \cdot 10^{-2} \text{ kg.m}^2$, calculado usando a expressão $I_{\text{anel}} = (1/2)M_a \cdot (R_e^2 + R_i^2)$. A diferença entre os dois valores é cerca de 0,6%.

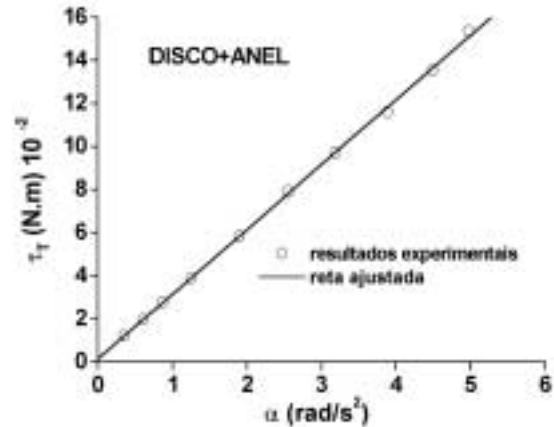


Figura 6. Torque aplicado ao conjunto disco + anel em função da aceleração angular.

V Conclusões

Com a montagem descrita foi possível determinar o momento de inércia de um disco ou de um anel com um erro menor que 1%. O procedimento adotado dispensa a medida de tempo e permite ignorar as forças de atrito, ao contrário do que acontece com alguns dos métodos tradicionais. Nesse sentido, o método que estamos propondo constitui uma alternativa para aqueles mais usuais descritos na literatura.

Para carregar e descarregar o capacitor na Fig. 1, optamos por uma chave analógica CMOS em associação com um sensor opto-eletrônico, porque julgamos desejável que o aluno aprenda a conviver com tais dispositivos ou com dispositivos eletrônicos em geral o mais cedo possível, dada a sua importância na vida moderna. Isto pode até mesmo servir de estímulo ou motivação para o aluno que acaba de ingressar em um curso universitário. No entanto, poder-se-ia usar, para o mesmo fim, um dispositivo mecânico como uma chave de lâminas de pólo duplo (Veja Ref. 5.).

Finalmente, a nossa montagem presta-se também como uma ferramenta auxiliar ao se introduzir conceitos como torque, momento de inércia ou mesmo momento angular. A Experiência 1, por exemplo, vai nessa direção, pois mostra que torque resultante constante produz aceleração angular constante. Em seqüência, podemos mostrar, usando um dinamômetro, primeiramente que α é proporcional a τ e, em seguida, que α é

proporcional a $1/I$. Dessas duas relações concluir-se-á que $\tau = I\alpha$, que é a forma apropriada de expressar a 2ª. Lei de Newton quando se estuda o movimento de rotação [7].

Agradecimentos

Os autores agradecem ao Prof. Dr. José Armando Xavier pelas discussões e figuras do texto.

References

- [1] GOLDEMBERG, J. *Física Geral e Experimental*. 2a. ed., São Paulo: Companhia editora Nacional, 1970, p. 481-483, v.1
- [2] TYLER, F. *A Laboratory Manual of Physics*. 4a. ed., London: Edward Arnold, 1974, p. 22-24.
- [3] FLEMING, J.A. e CLINTON, W.C. "On the Measurement of Small Capacities and Inductances". *Phil. Mag. S.* **6**, v.5, n.29, p. 493-511, 1903.
- [4] BENNET, G.A.G. *Electricity and Modern Physics*. 2a. ed., London: Edward Arnold, 1974, p.167-168.
- [5] HESSEL, R. e BUCALON A.J. "Medida de capacitância por meio de cargas e descargas periódicas". *Rev. Ens. Fís.* v. **8**, n.1, p. 9-23, 1986.
- [6] HALLIDAY, D., RESNICK, R. e WALKER, J. *Fundamentos de Física: Mecânica*. 4a. ed., Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1998, p. 249.
- [7] HESSEL, R. "Descrição e Uso de um aparelho para o estudo da Dinâmica da Rotação". *Rev. Ens. Fís.* v.5, n.2, p. 21-32, 1983.