

# O Sentido Físico dos Campos B e H

The physical meaning of the fields B and H

G. F. Leal Ferreira

guilherm@if.sc.usp.br

Instituto de Física de São Carlos, USP

CP 369, 13560-970, São Carlos, SP

Recebido em 03/01/2001. Aceito em 28/02/2001

Mostra-se que, embora seja o campo de indução  $\vec{B}$  o campo fundamental, é o campo  $\vec{H}$  o campo magnetizante no para e no ferromagnetismo, os quais se realizam pela orientação de dipolos magnéticos. Já no diamagnetismo, cujo caso extremo ocorre nos materiais em estado supercondutor, dependente da ação da indução eletromagnética, o campo indutor é o de indução,  $\vec{B}$ . Discute-se a obtenção das relações  $\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M}$  fundamentais, e  $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$  e as diferenças conceituais entre elas. O efeito desmagnetizante e o status das correntes de Ampère são também abordados.

It is shown that albeit the fundamental character of the induction field  $\vec{B}$ , it is the magnetic field  $\vec{H}$  the magnetizing field in para and ferromagnetism, phenomena depending on the orientation of magnetic dipoles. However, in diamagnetism, whose extreme case occurs in superconducting materials, the inducting field is  $\vec{B}$ . The relations  $\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M}$  e  $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$  are obtained and the differences between them stressed. The demagnetization effect and the status of the Amperian currents are discussed.

## I Introdução

Nos dielétricos a polarização  $\vec{P}$ , ou seja, o momento de dipolo elétrico por unidade de volume, é resultante da ação do campo elétrico  $\vec{E}$ . Para campos não muito elevados vale a relação linear  $\vec{P} = \chi_e \vec{E}$ , sendo  $\chi_e$  a susceptibilidade elétrica. No magnetismo a indução  $\vec{B}$  é considerada o campo fundamental (como  $\vec{E}$  o é em eletrostática) mas apesar disso a magnetização induzida  $\vec{M}$  é sempre expressa em termos do ‘campo magnético’  $\vec{H}$ , campo aparentemente subsidiário, como  $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$ , sendo  $\chi_m$  a susceptibilidade magnética (em geral dependente da magnitude de  $\vec{H}$  nos materiais ferromagnéticos). Esta tradição, segundo Poincaré [1], foi iniciada por Poisson e Maxwell [2] a considera ‘a equação fundamental da magnetização induzida’.

No presente artigo pretendemos justificar a escolha de Poisson, não de forma universal, mas quando ela se aplica ao para e ao ferromagnetismo enquanto que a forma alternativa,  $\vec{M} = \eta \vec{B}$ , sendo  $\eta$  uma nova susceptibilidade, deve ser usada no diamagnetismo, inclusive para descrever o caso extremo da supercondutividade nessa linguagem de susceptibilidades.

## II Obtenção das relações $\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M}$ e $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$

Será muito útil recapitularmos como a relação  $\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M}$  é obtida e compará-la com a correspondente relação elétrica,  $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$  [3]. Consideraremos a magnetização  $\vec{M}$  e a polarização  $\vec{P}$ , como fontes de  $\vec{B}$  e de  $\vec{E}$  respectivamente. Os efeitos das correntes e das cargas reais podem ser facilmente introduzidos ao final da dedução em cada caso.

### II.1 $\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M}$

Para a relação magnética partimos da expressão do potencial vetor  $\vec{a}$  no ponto  $\vec{r}$  de uma espira de momento de dipolo  $\vec{m}$

$$\vec{a} = \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \quad (1)$$

escrita no CGS gaussiano. Generalizando esta expressão para uma distribuição de densidade de magnetização  $\vec{M}(\vec{r}')$ , no volume  $V_0$ , criando no ponto  $\vec{r}$  o potencial vetor  $\vec{A}(\vec{r})$ , ver Fig.1, tem-se

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int_{V_0} \vec{M}(\vec{r}') \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv' \quad (2)$$

e devemos achar  $\vec{B}$  como o rotacional de  $\vec{A}$ . O rotacional do integrando em relação a  $\vec{r}'$  é do tipo  $\nabla \times (\vec{M} \times$

$\vec{G}(\vec{r})$  igual a  $(\nabla \cdot \vec{G}(\vec{r}))\vec{M} - (\vec{M} \cdot \nabla)G(\vec{r})$  sendo  $\vec{M}$  tomado como constante. Portanto, vamos separar  $\vec{B}$  em duas partes,  $\vec{B}_1$  e  $\vec{B}_2$ , com

$$\vec{B}_1(\vec{r}) = \int_{V_0} \vec{M}(\vec{r}') \nabla \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\nu' \quad (3)$$

e

$$\vec{B}_2(\vec{r}) = - \int_{V_0} (\vec{M}(\vec{r}') \nabla \cdot) \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\nu'. \quad (4)$$

Mas  $\nabla \cdot \vec{r}/r^3 = 4\pi\delta(\vec{r})$  e, portanto,

$$\vec{B}_1(\vec{r}) = 4\pi\vec{M}(\vec{r}). \quad (5)$$

Para  $\vec{B}_2$ , Eq.4, usa-se a identidade  $\nabla(\vec{M} \cdot \vec{G}(\vec{r})) = (\vec{M} \cdot \nabla)\vec{G}(\vec{r}) + \vec{M} \times (\nabla \times \vec{G}(\vec{r}))$  e sendo o rotacional de um gradiente nulo, podemos por

$$\begin{aligned} \vec{B}_2(\vec{r}) &= - \int_{V_0} \nabla(\vec{M}(\vec{r}') \cdot) \left( \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) d\nu' = \\ &= - \nabla \int_{V_0} \vec{M}(\vec{r}') \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\nu' = \vec{H}(\vec{r}), \end{aligned} \quad (6)$$

já que o integrando depende só de  $\vec{r}'$ . Notemos que  $\vec{B}_1$ , Eq.5, depende do valor local de  $\vec{M}$  enquanto  $\vec{B}_2 = \vec{H}(\vec{r})$  é o campo de indução criado pelos dipolos magnéticos distribuídos em  $V_0$ . Enquanto que  $\vec{B}_1$  pode ser chamado de componente local de  $\vec{B}$ , e é nulo no exterior de  $V_0$ ,  $\vec{H}$ , o campo magnético, Eq.6, pode ser chamado de campo distante de  $\vec{B}$  e é em geral diferente de zero no interior e no exterior de  $V_0$ . No caso de haver correntes presentes, ou outros materiais magnetizados,  $\vec{H}$  incluirá o campo criado por estas. Das relações anteriores conclui-se

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M} \quad (7)$$

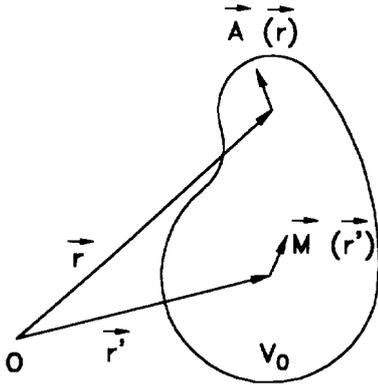


Figura 1. Potencial vetor  $\vec{A}$  no ponto  $\vec{r}$ , criado pela magnetização em  $\vec{M}$  em  $\vec{r}'$ , interior de  $V_0$ .

## II.2 $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$

No caso elétrico, o campo elétrico é criado pela polarização  $\vec{P}$  distribuída em  $V_0$  e não teríamos mais do que repetir a Eq.6, com  $\vec{P}$  em vez de  $\vec{M}$ , isto é,

$$\vec{E}(\vec{r}) = - \nabla \int_{V_0} \vec{P}(\vec{r}') \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\nu' \quad (8)$$

Note-se que no caso elétrico só o campo chamado distante dá o campo elétrico total. Para obtermos a relação elétrica correspondente à Eq.7, é preferível trabalhar com o potencial  $U$  da distribuição de dipolos em vez do campo  $\vec{E}$

$$U(\vec{r}) = \int_{V_0} \vec{P}(\vec{r}') \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\nu' \quad (9)$$

e, através de truque bem conhecido, transformar a integral numa de superfície envolvendo a componente normal de  $\vec{P}$  agindo como densidade superficial de carga e outra de volume, envolvendo  $-\nabla \cdot \vec{P}$  agindo como densidade volumétrica de carga,  $\rho_p$ . Podemos então escrever  $\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho_p$  e logo  $\nabla \cdot (\vec{E} + 4\pi\vec{P})$  e definindo o campo sem divergência  $\vec{D}$  (no caso presente em que não há cargas reais), finalmente

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} \quad (10)$$

Se cargas reais estão presentes com densidade  $\rho$ , a divergência de  $\vec{D}$  será igual a  $4\pi\rho$ . A equivalência matemática entre  $\vec{D}$  e  $\vec{B}$  fica estabelecida além daquelas entre  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  e entre  $\vec{P}$  e  $\vec{M}$ . Notemos que a relação magnética, Eq.7 é mais factual do que a elétrica, Eq.10, porque na Eq.7 podemos dar sentido físico aos seus três termos, enquanto na Eq.10 o campo  $\vec{D}$  foi introduzido por pura conveniência matemática, em termos das grandezas físicas relevantes,  $\vec{P}$  e  $\vec{E}$ .

## III Para e Ferromagnetismo

Na recapitulação da seção II.1, o ponto importante a ser realçado é o da existência da componente local de  $\vec{B}$ , igual a  $4\pi\vec{M}$ , e o seu aparecimento se deve à singularidade do campo de indução de uma espira, protótipo do momento magnético, no interior da própria espira, responsável afinal pelo aparecimento da função delta no integrando da Eq.3. E com ela podemos compreender porque no para e no ferromagnetismo a indução deve relacionar  $\vec{M}$  a  $\vec{H}$  e não a  $\vec{B}$ : é que nestes casos os dipolos magnéticos precisam ser orientados para criar a magnetização mas a própria magnetização, campo local de  $\vec{B}$ , não tem nenhum efeito de orientação sobre ela mesma. Considere por exemplo o dipolo magnético  $\vec{m}$  no interior do meio magnético, fig.2. Como Onsager [4,5] raciocinou, o dipolo  $\vec{m}$  magnetizará o meio, mas o campo de reação  $\vec{H}$  deste sobre o dipolo será na direção de  $\vec{m}$  e, portanto, não terá nenhuma ação orientadora sobre ele. Só a interação do momento magnético com o campo distante  $\vec{H}$  poderá gerar orientação preferencial do momento magnético na direção do próprio  $\vec{H}$ . Quer dizer, a componente local de  $\vec{B}$  não pode ter ação indutora, ficando esta para a componente distante,  $\vec{H}$ .

## IV Susceptibilidades

Em eletrostática não temos dúvidas em por  $\vec{P} = \chi_e \vec{E}$ , com  $\chi_e$ , a susceptibilidade elétrica, positiva, e maior ou menor conforme responda o meio ao campo elétrico, não havendo em princípio um limite superior a se postular para ela. Vamos ver agora o que aconteceria se usássemos  $\vec{M} = \alpha \vec{B}$ . Da relação de Poisson temos  $\vec{M} = \chi_m \vec{H} = \chi_m (\vec{B} - 4\pi \vec{M})$  da qual podemos tirar  $\vec{M}(1 + 4\pi\chi_m) = \chi_m \vec{B}$  e então teríamos

$$\alpha = \frac{\chi_m}{1 + 4\pi\chi_m}. \quad (11)$$

No ferro  $\chi_m$  é bem grande, o que está de acordo com nossa expectativa por se tratar de material bem magnetizável. Porém, expressa a magnetização através de  $\vec{M} = \alpha \vec{B}$ , a susceptibilidade  $\alpha$  teria pela Eq.11 o valor limite de  $1/4\pi$ , para o que seria difícil encontrar justificativa. Vemos pois que muito trabalho inútil foi evitado com a escolha de Poisson, ou antes, que este fez intuitivamente a escolha correta, assemelhando a magnetostática à eletrostática, apesar de não poder justificá-la completamente.

Voltando à Eq.11 vemos que, se  $\chi_m$  é em valor absoluto pequeno, não há diferença essencial entre usar-se  $\alpha$  ou  $\chi_m$ , e este fato tem sido invocado para não se considerar relevante a discussão sobre qual das susceptibilidades é mais adequada [6]. Mas nem sempre é assim, como acabamos de ver. Em outro caso [7] a escolha de uma ou outra susceptibilidade é considerada matéria de convenção e deve-se então, para evitar confusão, preferir-se a de Poisson, já em uso. Seria interessante citar também Van Vleck, autor de livro específico sobre as susceptibilidades elétrica e magnética [8]. Em nota de rodapé na página 3 ele diz ‘...nós não procedemos a estas mudanças afim de nos conformar mais de perto à literatura existente, que considera  $\vec{H}$  como o vetor magnético fundamental’(!). E ao tratar no Cap.IV da teoria clássica da susceptibilidade magnética diz ‘...estes magnetos moleculares tenderão a se alinhar paralelamente a um campo magnético  $\vec{H}$  mas são resistidos pela agitação de temperatura...’ O diamagnetismo tratado a seguir também segue  $\vec{H}$ . Portanto, Van Vleck é pouco esclarecedor para os fins perseguidos aqui.

## V O diamagnetismo

As coisas se passam diferentemente com o diamagnetismo que claramente está relacionado com a indução eletromagnética e portanto ao campo de indução  $\vec{B}$ . Espera-se então que uma relação como  $\vec{M} = \eta \vec{B}$ , com  $\eta$  negativo, seja mais conveniente. Tomemos o caso de uma peça metálica conexa no estado supercondutor. Apesar de não ser muito esclarecedor, podemos usar o conceito de magnetização como um caso extremo de diamagnetismo [9]. E o que esperaríamos nesse caso?

Não há dúvida que  $\eta$  deveria ser infinitamente negativo embora  $\vec{M}$  devesse permanecer finito. Voltando à relação  $\vec{M} = \eta \vec{B}$  vemos que para isso ocorrer  $\vec{B}$  deve ser zero fazendo o produto  $\eta \vec{B}$  finito, conclusão essencialmente correta [9]. Ao contrário do que ocorre no diamagnetismo comum, não parece razoável querermos usar aqui a Eq.7 já que seu ponto de partida, Eq.2 - baseado no modelo de momentos magnéticos distribuídos no volume -, é inadequado para a situação presente, em que as correntes induzidas na superfície do supercondutor são correntes reais, e, portanto ligadas a  $\vec{B}$ . Se insistirmos em usar a relação de Poisson, a Eq.11 mostra que  $\chi_m$  agora tem o valor limite de  $-1/4\pi$ . Por que?

## VI A equação geral da magnetização induzida

Do exposto, concluímos que a equação geral da magnetização induzida, incluindo a magnetização diamagnética e a de orientação deve ser

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\eta \vec{B} + 4\pi\chi_m \vec{H} \quad (12)$$

incluindo no lado direito da Eq.12 as contribuições dia e orientacionais. Ou

$$\vec{B} = \frac{(1 + 4\pi\chi_m)\vec{H}}{1 - 4\pi\eta} \quad (13)$$

lembrando que  $\eta$  é negativo. Como  $\eta$  é em geral pequeno, a relação usual é válida.

## VII O efeito desmagnetizante e as correntes de magnetização de Ampère

Pela presente análise estamos agora em condição de explicar sem dificuldades o efeito desmagnetizante. De fato, no interior de um ímã, seja este uma esfera, Fig.3,  $\vec{B}$  e  $\vec{M}$  têm o mesmo sentido enquanto  $\vec{H}$  aponta em direção contrária. Sendo assim só a  $\vec{H}$  pode ser atribuída a ação desmagnetizante, o que está de acordo com a nossa conclusão de que é a parte de  $\vec{B}$  distante aquela capaz de agir sobre os dipolos, neste caso se opondo à própria magnetização. No caso oposto em que procuramos criar magnetização necessitamos da ação de fontes externas de  $\vec{H}$ , usualmente correntes, para vencer o campo desmagnetizante criado pela própria magnetização.

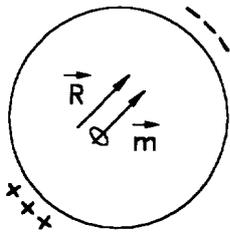


Figura 2. O dipolo magnético  $\vec{m}$  no centro da cavidade cria campo de reação  $\vec{R}$ , que por ter a mesma direção de  $\vec{m}$ , não tem ação orientadora.

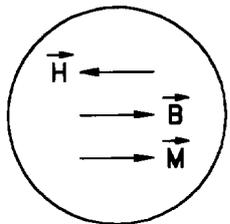


Figura 3. Interior do ímã esférico:  $\vec{M}$  e  $\vec{B}$  tem o mesmo sentido enquanto  $\vec{H}$  tem sentido oposto e assim só ele pode ter efeito desmagnetizante.

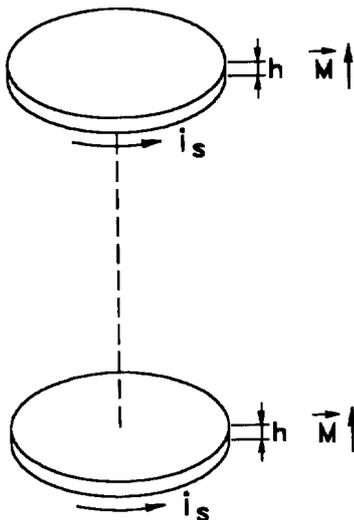


Figura 4. Dois discos imantados na direção  $\vec{M}$  de suas alturas  $h$  têm correntes Ampèrianas  $i_s = Mh$  mas não apresentam efeitos de indução eletromagnética se aproximados ou afastados como o fariam correntes reais coincidentes com os perímetros dos discos.

Outro ponto interessante de se discutir é o do status das correntes de magnetização de Ampère, às quais, por serem 'naturais', poderia ser emprestada a área de supercondutoras. Tomemos, por exemplo, dois discos imantados com magnetização  $\vec{M}$  ao longo de suas alturas  $h$ , como na Fig. 4. Podemos descrever o estado

magnético dos mesmos através de correntes de Ampère,  $i_s$ , no perímetro dos discos, com  $i_s = Mh$ . Sendo a situação análoga àquela entre duas correntes reais coincidentes com  $i_s$ , suspeitaríamos que correntes de indução aparecessem se aproximássemos ou afastássemos os discos. Mas praticamente as imantações permanecem essencialmente as mesmas, e a razão é que as correntes de magnetização de Ampère estão relacionadas a  $\vec{H}$  e só efeitos ligados a  $\vec{B}$  geram efeitos de indução. Aliás, é o que aconteceria se os discos fossem supercondutores.

Por fim, gostaria de relatar o que o Prof. Norman F. Ramsey, Prêmio Nobel de Física 1989, nos disse em entrevista solicitada por nós para discutir o assunto. Ele disse que experiências realizadas com feixe de elétrons penetrantes em materiais ferromagnéticos (no interior dos quais  $\vec{B}$  e  $\vec{H}$  diferem significativamente) mostram que eles são desviados pela ação de  $\vec{B}$  e não pela de  $\vec{H}$ . Não temos a referência.

## Agradecimentos

O autor agradece aos colegas, Osvaldo N. de Oliveira Jr. e Luiz N. de Oliveira, ao primeiro pelo estímulo recebido e ao segundo por sugestões a versão anterior deste. Ao Prof. Norman pelo contundente exemplo, que muito ajudou na organização das nossas idéias, e ao CNPq pela bolsa de produtividade.

## References

- [1] H. Poincaré, *Électricité et Optique*, Georges Carré Éditeur, Paris, 1890, p.113.
- [2] J. C. Maxwell, *A Treatise in Electricity and Magnetism*, Dover Publ., N.York, 1954, Vol.II, p.50.
- [3] J. R. Reitz, F. J. Milford e R. W. Christy, *Foundations of Electromagnetic Theory*, Addison-Wesley Publ. Co., Reading, 1979, p.191.
- [4] L. Onsager, *J. Amer. Chem. So.*, **58** (1936) 1486.
- [5] C. J. F. Böttcher e P. Bordewijk, *The Theory of Electrical Polarisation*, Vol.1, Elsevier Scien. Publ., Amsterdam, 1978, Cap.5.
- [6] E. M. Purcell, *Electricity and Magnetism*, Berkeley Physics Course, McGraw-Hill Book Co., N. York, 1965, Vol.2, p.380.
- [7] J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill Book Co., N. York, 1941, p.12.
- [8] J. H. Van Vleck, *The Theory of Electric and Magnetic Susceptibilities*, Oxford University Press, 1952.
- [9] L. Landau e E. Lifchitz, *Électrodynamique des milieux continus*, Edições MIR, 1969, Cap.8.