

# Um Experimento de Oscilador Forçado Amortecido

A Forced Damped Oscillator Experiment

D. Tomasi\* e E.C. Caparelli

Escuela de Ciencia y Tecnologia, Universidad Nacional de General San Martin  
Alem 3901, 1651 San Andres, Buenos Aires, Argentina.

Recebido em 15/12/2000. Aceito em 26/01/2001

Este trabalho apresenta um experimento apropriado para as aulas de laboratório que são normalmente oferecidas em cursos de graduação. Este experimento está baseado em oscilações forçadas amortecidas de uma agulha magnética e permite a observação do fenômeno de ressonância, que ocorre quando a frequência do campo magnético dependente do tempo coincide com a frequência de oscilações livres da agulha de uma bússola, que por sua vez depende da magnetização e do momento de inércia da agulha. As oscilações da agulha foram monitoradas com uma sonda Hall e um microcomputador, e os resultados experimentais foram comparados com a teoria através da análise de Fourier dos dados. Estes resultados apresentaram boa concordância com as previsões teóricas.

This work presents an experiment suitable for intermediate laboratory instruction, which is based on the forced damped oscillations of a magnetic needle. This allows the observance of a resonance phenomenon, which occurs when the frequency of the time dependent magnetic field matches the frequency of free oscillations of the compass needle that depends on the magnetization and moment of inertia of the needle. The compass needle oscillations were monitored using a Hall sensor and a PC. Theory and experiment were compared using a Fourier analysis of the data. The results are in good agreement with the theoretical expectations.

## I Introdução

O movimento de um oscilador harmônico simples tem sido amplamente estudado em cursos de física experimental devido à possibilidade de se utilizar dois instrumentos simples: o pêndulo e o sistema massa-mola. Estes estudos experimentais geralmente são baseados na medição do período, a partir do qual são derivados os parâmetros dinâmicos.

Nos últimos anos vários experimentos foram propostos para estudar o movimento de um oscilador harmônico simples forçado amortecido [1-5]. Por exemplo, os coeficientes de viscosidade do ar e do óleo podem ser determinados a partir de oscilações livres de uma bola sustentada por uma mola [1, 3].

Recentemente, devido ao aumento de capacidade dos computadores pessoais (PC), a aquisição e análise dos dados foram incluídos dentro do arranjo experimental, tornando possível fazer comparações mais precisas entre os dados experimentais e as previsões teóricas [4,5].

Neste trabalho apresentamos um experimento para estudar as oscilações forçadas amortecidas da agulha de uma bússola. A aquisição de dados é feita através de um microcomputador e a análise de Fourier é utilizada

para estudar o movimento oscilatório.

As duas seções a seguir contêm a teoria das oscilações forçadas amortecidas de uma agulha imantada e os detalhes do experimento proposto.

## II Teoria

A seguir vamos considerar uma agulha imantada em uma região do espaço onde existem dois campos magnéticos perpendiculares, um campo magnético estático,  $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{\mathbf{i}}$ , e um campo magnético harmônico,  $\mathbf{B}_1 = B_1 \cos \omega t \hat{\mathbf{j}}$ , como ilustrado na Fig. 1, onde  $\omega$  é a frequência angular do campo harmônico. O vetor campo magnético total  $\mathbf{B}$  é dado pela superposição dos dois campos e pode ser escrito como

$$\mathbf{B} = (B_0, B_1 \cos \omega t, 0). \quad (1)$$

O torque,  $\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$ , devido a interação magnética entre os campos e o momento magnético da agulha,  $\boldsymbol{\mu}$ , é responsável pela mudança do momento angular da agulha,  $\mathbf{L}$ , na seguinte forma [6]

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}. \quad (2)$$

\*Correspondências ao autor: Dr. Dardo Tomasi, e-mail: Dardo.Tomasi@unsam.edu.ar

Como  $L = \mathcal{I}\ddot{\theta}$  [7], esta equação diferencial pode ser expressa como uma equação diferencial de segunda ordem

$$\mathcal{I}\ddot{\theta} = \mu B_1 \cos \theta \cos \omega t - \mu B_0 \sin \theta \quad (3)$$

onde  $\ddot{\theta}$  representa a derivada de segunda ordem do ângulo polar  $\theta$  entre a agulha e  $\mathbf{B}_0$ , sendo  $\mathcal{I}$  o momento de inércia da agulha. Como é usual, consideramos apenas pequenos desvios na posição de equilíbrio da agulha, o qual são definidos por  $\sin \theta \approx \theta$ . Neste caso a Eq. (3) se transforma em uma equação linear de segunda ordem

$$\ddot{\theta} + \frac{\mu B_0}{\mathcal{I}} \theta = \frac{\mu B_1}{\mathcal{I}} \cos \omega t, \quad (4)$$

que define um oscilador harmônico forçado de frequência natural

$$\omega_0 = \sqrt{\mu B_0 / \mathcal{I}}. \quad (5)$$

Como também é usual, consideramos o processo de relaxação, induzido pelo atrito da agulha, que é dependente da velocidade, incluindo termos de primeira ordem na equação linear (4)

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{T} \dot{\theta} + \frac{\mu B_0}{\mathcal{I}} \theta = \frac{\mu B_1}{\mathcal{I}} \cos \omega t, \quad (6)$$

onde o tempo de relaxação,  $T$ , no termo de primeira ordem, é uma constante temporal do decaimento exponencial da solução homogênea da Eq. (6), que é dada por

$$\theta_H(t) = \exp\left(-\frac{t}{T}\right) [A \exp(i\omega^* t) + B \exp(-i\omega^* t)]. \quad (7)$$

Aqui  $\omega^* = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{T^2}}$  é a frequência natural das oscilações amortecidas e  $A$  e  $B$  são coeficientes constantes, que estão associados às condições iniciais  $\theta(t=0)$  e  $\dot{\theta}(t=0)$ . A solução geral da Eq. (6) é a soma das soluções homogênea, (7), e particular, que é dada por

$$\theta_p(t) = \frac{\omega_1^2 T^2}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 T^2 + 4\omega^2]} \left\{ (\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega t + \frac{2\omega}{T} \sin \omega t \right\}. \quad (8)$$

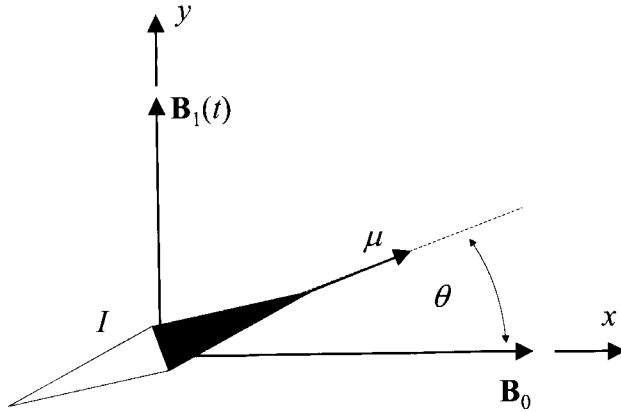


Figura 1. Orientação da bússola e os campos magnéticos.

Entretanto devido ao decaimento exponencial de  $\theta_H(t)$ , para  $t \ll T$  a solução geral é dominada pela solução particular (8), cuja amplitude apresenta um comportamento ressonante em  $\omega_0 = \omega$  caracterizado pela função de Lorentz

$$\frac{1}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\omega/T)^2]}, \quad (9)$$

a qual atinge seu valor máximo para  $\omega_0 = \omega$ , e tem uma largura de  $4\omega/T$ .

### III Experimento

O objetivo desta seção é testar a teoria acima usando um arranjo experimental simples, cujos resultados são apropriados para introduzir o fenômeno de ressonância magnética a estudantes de graduação.

O arranjo experimental está mostrado na Fig. 2. O campo magnético estático,  $B_0$ , é produzido por uma corrente contínua  $I$  em um par de Helmholtz, que consiste de duas bobinas circulares constituídas de 100 espiras de cobre cada uma, com 24 cm de diâmetro e separadas por uma distância de 12 cm. Estas bobinas foram conectadas em série para produzir um campo magnético uniforme em seu isocentro, dado por

$$B_0(0,0,0) = \frac{8\mu_0 N I}{5^{3/2} R}, \quad (10)$$

onde  $R$  é o raio das  $N$  espiras e  $\mu_0$  é a permeabilidade magnética do vácuo. Estas bobinas estão orientadas para produzir um campo magnético paralelo ao campo magnético da Terra.

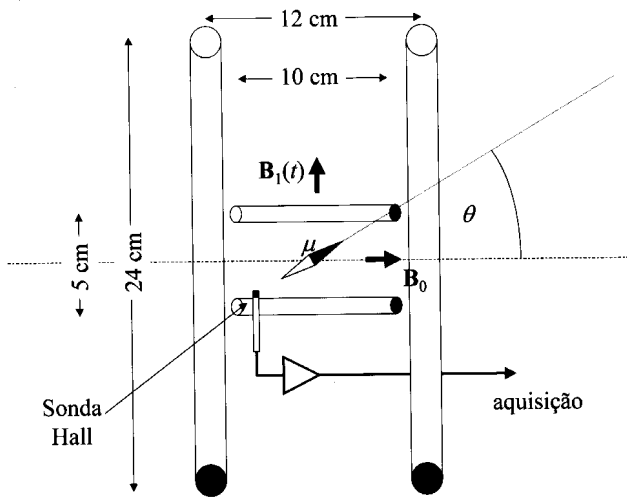


Figura 2. O arranjo experimental descrito no texto.

O campo harmônico  $B_1$ , foi produzido por uma corrente alternada (AC) tipo seno conduzida em um par de Helmholtz, similar àquele descrito acima, feito com 200 espiras de cobre de 10 cm de diâmetro. Este par foi colocado perpendicularmente ao par que produz o campo  $B_0$ . A corrente AC nestas bobinas foram ajustadas para minimizar a amplitude das oscilações forçadas para satisfazer a expressão  $\text{sen}\theta \approx \theta$ . A agulha magnética foi colocada no isocentro do sistema e suas oscilações foram monitoradas usando um sensor de campo magnético baseado no efeito Hall, o qual foi posicionado para medir a componente  $x$  do campo magnético, como mostra a Fig. 2. O sinal da sonda Hall foi amplificado, digitalizado e adquirido usando o programa MPLI para Windows<sup>1</sup> e um microcomputador.

Como podemos observar a partir da Fig. 3b, a componente  $x$  do campo magnético oscila quando a corrente de  $(1,10 \pm 0,01)$  A é aplicada ao par de Helmholtz que produz o campo  $B_0$ , o qual usando a equação (10) corresponde ao valor de  $(8,26 \pm 0,08)$  Gauss. Neste caso a frequência angular do campo  $B_1$  foi colocada em 25.46 rad/s. Este dado foi adquirido um minuto depois que o campo  $B_1$  foi ligado, para evitar o comportamento transiente de frequência natural  $\omega^*$  característico das soluções homogêneas dadas pela Eq. (7). Para valores mais altos ou mais baixos de  $B_0$  o movimento oscilatório da agulha é reduzido enfatizando o comportamento ressonante da agulha, que é sustentado pela teoria acima. A densidade espectral  $A(\nu)$ , graficada como função da frequência  $\nu$  na Fig. 3a, é o sinal na frequência dominante e foi obtida usando a transformada de Fourier rápida dos dados da Fig. 3b. A seta observada nesta figura, em  $\nu = (4,05 \pm 0,02)$  Hz, corresponde à frequência de oscilações forçadas da agulha magnética.

<sup>1</sup>O program MPLI para Windows é uma marca registrada do software do Vernier.

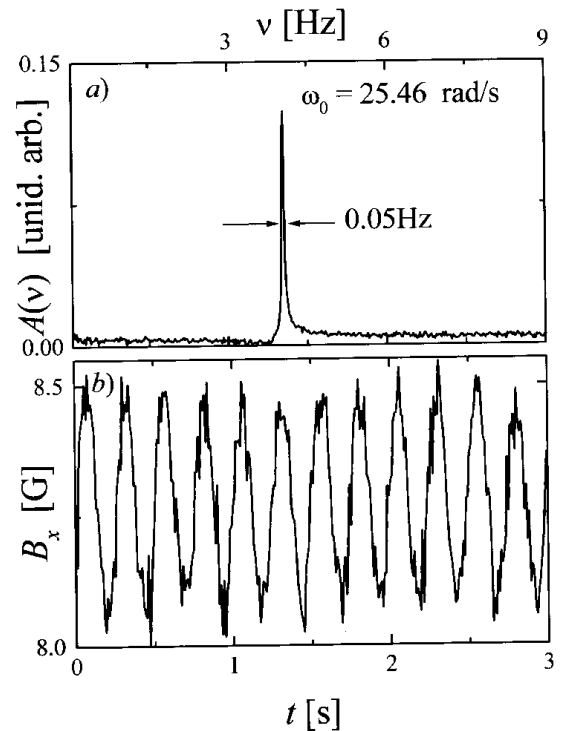


Figura 3. Oscilações forçadas de uma agulha magnética. [a] Sinal lido pela sonda Hall no domínio de frequências. [b] O mesmo no domínio temporal.

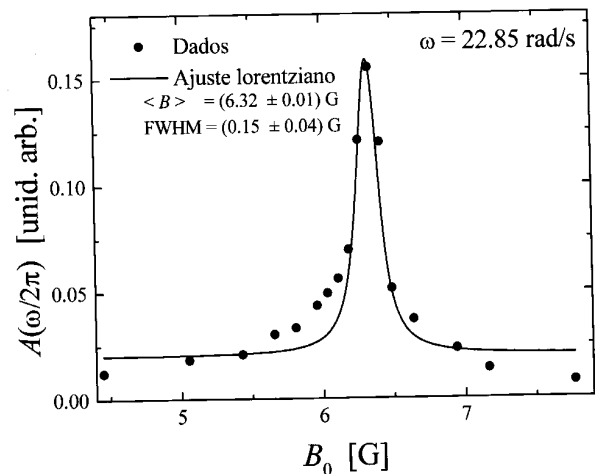


Figura 4. Amplitude das oscilações forçadas como função da intensidade de  $B_0$ . O círculo cheio representa o valor do pico do sinal lido pela sonda Hall no domínio das frequências. A linha representa um ajuste de Lorentz dos dados.

A Fig. 4 mostra o valor máximo da densidade espectral como função de  $B_0$ , quando é usada baixa amplitude do campo  $B_1$ , de frequência  $\nu = (3,63 \pm 0,01)$  Hz, para forçar o oscilador magnético. A ressonância da agulha torna-se evidente, nesta figura, pelo pico observado em  $B_0 = 6,3$  Gauss. Esta figura também mostra uma curva de Lorentz para este conjunto de dados comparando a teoria com os resultados experimentais [veja Eq. (9)]. A largura do pico ressonante encontrado nesta curva é de  $(0,15 \pm 0,04)$  Gauss.

A partir da Eq. (9) vemos que, quando  $B_0$  satisfaz a condição de ressonância,  $\omega_0 = \omega$ , a amplitude das oscilações forçadas é máxima, tornando possível a transferência de energia do campo harmônico  $B_1$  para a agulha magnética. Nesta condição de ressonância a frequência natural de oscilações está relacionada com a intensidade do campo magnético estático  $B_0$  pela Eq. (5).

Para explorar mais detalhadamente a validade da Eq.(5), repetimos o procedimento acima para encontrar o valor do campo magnético que maximiza a amplitude das oscilações da agulha, utilizando valores para a frequência de  $B_1$  que variam desde 1 a 4 Hz. A Fig. 5 mostra os valores de  $\omega_0^2$  e os valores medidos de  $B_0$ . A dependência linear entre  $\omega_0^2$  e  $B_0$ , observado nesta figura, está de acordo com a Eq. (5), e fornece um suporte experimental para a teoria.

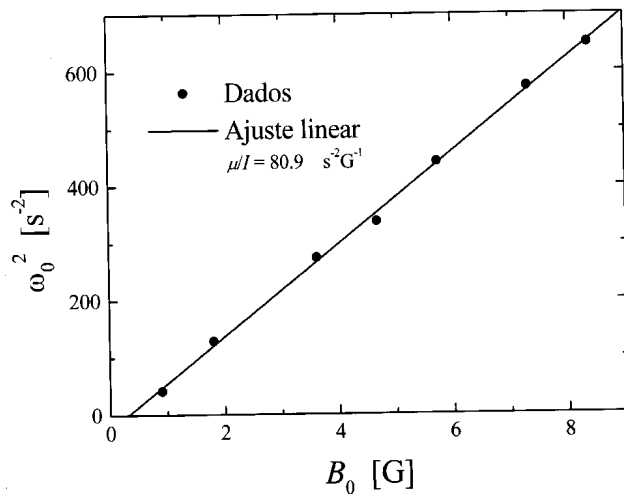


Figura 5. Frequência de ressonância como função da intensidade de  $B_0$ . O círculo cheio corresponde ao quadrado da frequência de  $B_1$  que maximiza a amplitude de oscilação dada por  $B_0$ . A linha representa um ajuste linear dos dados.

A razão  $\mu/I$ , que é uma propriedade da agulha magnética, foi obtida a partir de uma regressão linear destes dados, cuja inclinação da curva resultante é  $\mu/I = (81 \pm 2) \text{ G}^{-1} \text{ s}^{-2}$ . A largura do pico de ressonância, usado para fazer a Fig. 5, não depende da intensidade do campo  $B_0$ , conforme é esperado a partir da teoria.

O conhecimento do valor de  $\mu/I$  nos permite fazer uma estimativa do tempo de relaxação da agulha, usando a largura do pico de ressonância e a Eq. (9), obtendo-se  $T = (7 \pm 2) \text{ s}$ .

Para fazer uma medida direta de  $T$ , pulsamos uma corrente constante na bobina de Helmholtz que produz o campo  $B_1$  em lugar de utilizar uma corrente alternada do tipo seno, utilizada anteriormente. Quando é pulsada a corrente nesta bobina o campo estático  $B_1$  produz um deslocamento angular na agulha da bússola, e quando esta corrente é desligada a agulha volta ao seu movimento oscilatório amortecido de frequência  $\omega^*$

dado pela Eq. (7). Fixamos o valor do período da corrente pulsada a 60 s para assegurar o estado estacionário inicial da agulha.

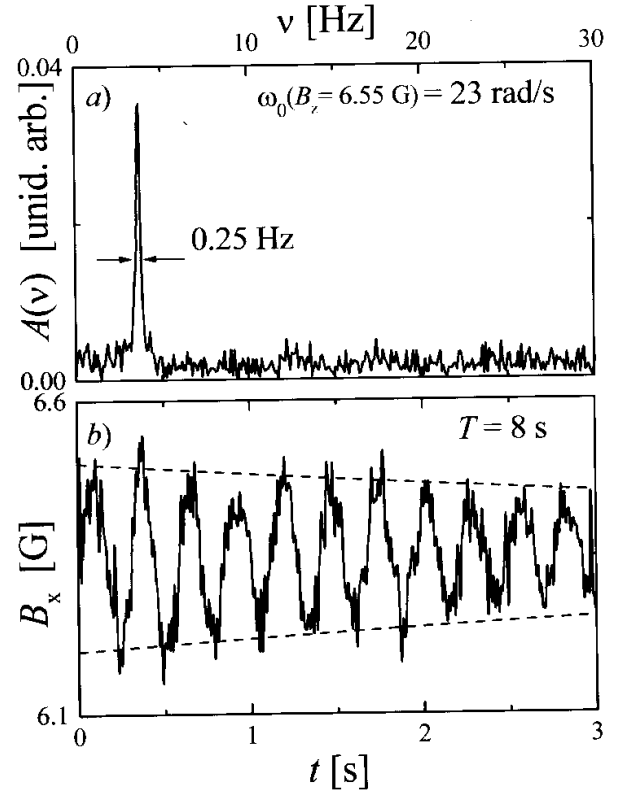


Figura 6. Oscilações amortecidas da agulha magnética. [a] O sinal lido pela sonda Hall no domínio das frequências. [b] o mesmo no domínio do tempo.

A Fig. 6b mostra o campo magnético dependente do tempo gerado pelo movimento da agulha quando  $B_0 = (6,55 \pm 0,05) \text{ Gauss}$  e o campo estático  $B_1$  é desligado. Nesta figura podemos ver que a amplitude das oscilações da agulha mostra um decaimento exponencial para um tempo de relaxação  $T = (8 \pm 1) \text{ s}$  de acordo com Eq. (7). Nota-se que esta medida direta de  $T$  está de acordo com o resultado já obtido usando a largura do pico de ressonância.

A densidade espectral na Fig. 6a corresponde ao sinal em frequência e foi obtida a partir da transformada de Fourier rápida dos dados que se encontram na Fig. 6b, analogamente ao caso anterior. O único pico observado no espectro para  $\nu = 3,63 \text{ Hz}$  é mais largo que o pico observado na Fig. 3a devido ao decaimento exponencial do sinal na Fig. 6b. O valor da frequência para as oscilações amortecidas  $\omega^*$  é próxima a  $\omega_0$  neste caso, devido ao grande valor de  $T$ .

## IV Conclusões

Como foi mostrado neste trabalho, um experimento simples usando uma bússola padrão pode ser utili-

zado para produzir um fenômeno ressonante, apropriado para introduzir alunos de graduação ao fenômeno da ressonância. O experimento proposto requer o uso de bobinas que possuem uma geometria simples para produzir o campo magnético necessário.

O principal aspecto das pequenas oscilações da uma bússola foram estudados pela aquisição digital e análise de Fourier dos dados. Os resultados experimentais estão de acordo com a teoria.

### Agradecimentos

Agradecemos ao Dr A. Valda pelos frutíferos comentários que nos encorajaram a escrever este trabalho.

### References

- [1] V. K. Gupta, G. Shanker, and N. K. Sharma. Experiment on fluid drag and viscosity with an oscillating sphere. *Am. J. Phys.* **54**, 619-622, 1986.
- [2] P. J. Ouseph and J. P. Ouseph. Electromagnetically driven resonance apparatus. *Am. J. Phys.* **55**, 1126-1129, 1987.
- [3] R. C. Greenhow. A mechanical resonance experiment with fluid dynamic undercurrents. *Am. J. Phys.* **56**, 352-357, 1988.
- [4] L. McCarthy. On the electromagnetically damped mechanical harmonic oscillator. *Am. J. Phys.* **64**, 885-891, 1996.
- [5] B. Pecori, G. Torzo and A. Sconza. Harmonic and anharmonic oscillations investigated by using a microcomputer-based Atwood's machine. *Am. J. Phys.* **67**, 228-235, 1999.
- [6] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (Wiley & Sons, New York, 1975).
- [7] H. Goldstein, *Classical Mechanics* (Addison-Wesley publishing inc., New York, 1959).

[1] V. K. Gupta, G. Shanker, and N. K. Sharma. Expe-