A Energia Mínima Irradiada na Criação de Distribuição Neutra de Cargas

The minimum energy irradiated for creating a neutral charge distribution

G.F. Leal Ferreira
guilherm@if.sc.usp.br
Instituto de Física de São Carlos, USP
CP 369, 13560-970, SP. São Carlos

Recebido em 04 de dezembro de 2001. Aceito em 26 de janeiro de 2001

Obtém-se a expressão da energia dipolar total irradiada na criação de uma distribuição neutra de cargas e propõe-se método do tipo variacional de Ritz para se obter a energia mínima. Esta é explicitamente obtida em aproximação de segunda ordem.

The expression of the total dipolar energy irradiated for the creation of a neutral charge distribution is obtained and a variational method of the Ritz type is proposed in order to derive the minimum energy. This is presently obtained in a second order calculation.

I O problema

Cria-se uma distribuição neutra de cargas, de momento de dipolo não nulo. Qual a energia irradiada na sua formação dada uma escala de tempo, de que maneira a formação da distribuição deveria ser conduzida para que a energia irradiada fosse mínima? Procuraremos responder a estas perguntas no que segue.

II O campo elétrico na região de radiação

O campo elétrico $\vec{E}$ na região de radiação criada por um dipolo p, situado na origem e orientado ao longo do eixo z, pode ser obtido utilizando [1], mas sendo já conhecido da literatura [2], preferimos usá-lo desta. No ponto r, e coordenadas polares φ,

$$\vec{E} = \frac{\ddot{p}(t - r/c)\mathrm{sen}\varphi\hat{\varphi}}{c^2 r} \tag{1}$$

sendo c a velocidade da luz. $\ddot{p}$ significa a aceleração de p e a equação está escrita no sistema CGS. Para os nossos fins o retardo na Eq. 1 pode ser ignorado. Sendo $\hat{r}$ o versor da direção radial, o campo magnético, $\vec{B}$ é,

$$\vec{B} = \vec{E} \times \hat{r} \tag{2}$$

A potêcia irradiada pelo dipolo, $P(t)$, pode ser achada do vetor de Poynting integrado na esfera de raio r,

$$P(t) = \frac{c}{4\pi}\oint \vec{B}x\vec{B}da = \frac{2\ddot{p}^2}{3c^3} \tag{3}$$

A energia total irradiada W será a integral no tempo de $P(t)$. É intuitivo que devemos procurar funções $p(t)$ analíticas se desejamos gastar menos energia na criação do dipolo. Para isso é preciso admitir, embora com certa irrealidade, que sua criação se dá entre $-\infty$ e $+\infty$. Então

$$W = \frac{2}{3c^3}\int_{-\infty}^{+\infty} \ddot{p}^2(t)dt \tag{4}$$

Além do mais, devemos fixar uma escala de tempo quando queremos comparar a energia irradiada por sistemas evoluindo com diferentes funções do tempo ao mesmo valor final do momento de dipolo. Por exemplo, seja $p_1(t)$ dado por

$$p_1(t) = \frac{p_0}{2}(1 + tgh\gamma t) \tag{5}$$

com $p_1(t)$ analítico e γ^{-1} fixando a escala de tempo. Usando esse $p_1(t)$ na Eq. 4, obtém-se a energia W_1

$$W_1 = \frac{2p_0^2}{3c^3}\gamma^3 A_1 \tag{6}$$

em que A_1 é dado por

$$A_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} (sech\ x)^5 (senh\ x)^2 dx = 0,267 \tag{7}$$

sendo A_1 calculado no MathCad Plus 6.0. No Sistema MKS, o lado direito da Eq. 6 recebe o denominador $4\pi\epsilon_0$, sendo ϵ_0 a permissividade do vácuo.

Note-se que o fator γ^3 na Eq. 6 vem do fato de se ter fixado a escala do tempo na definição do momento de dipolo como γt. Se em vez da escolha como na Eq. 5, pusséssemos em geral $p(t) = p_0 g(\gamma t)$, com $g(-\infty) = 0$ e $g(+\infty) = 1$, obteríamos para a energia irradiada a Eq. 6 com A, em vez de A_1, dado por

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \ddot{g}^2(x)dx \tag{8}$$

É claro que a Eq. 6, com A em vez de A_1, será a energia dipolar irradiada também para uma distribuição macroscópica neutra de cargas, daí haver interesse em saber qual seria a menor energia irradiada na formação da distribuição. Portanto, desejamos saber qual a função $g_m(x)$ que minimiza A na Eq. 8.

III Em busca da energia mínima

Em vez de usarmos a função $g(x)$, vamos usar a sua derivada $f(x) = \dot{g}(x)$. Com isso, temos que minimizar

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{f}^2(x)dx \tag{9}$$

sujeito à condição

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \tag{10}$$

A equação de Euler [3] para Eq. 9 satisfazendo a Eq. 10 leva somente a soluções não normalizáveis, isto é, não funciona, e a razão disso ocorrer não foi esclarecida. Tomando outro caminho, vamos supor que desenvolvêssemos $f(x)$ no conjunto completo das soluções do oscilador harmônico, que são funções finitas e definidas no intervalo $-\infty, +\infty$. A Eq. 9 estaria então expressa em função dos coeficientes do desenvolvimento e minimizar-se-ia A, sujeita à condição da Eq. 10 também expressa em termos dos coeficientes, em relação a cada um desses coeficientes. Na verdade trata-se do método de Ritz [4], e tomando-se número crescente de funções do conjunto completo aproximar-nos-íamos cada vez mais da solução exata. Aqui vamos nos limitar a tomar duas funções do conjunto de soluções do oscilador harmônico, correspondente a $n = 0$ e 2 (já que $f(x)$ deve ser par).

IV Aproximação de 2a ordem

Seja então $f(x)$ dada por

$$f(x) = b_0\varphi_0(x) + b_2\varphi_2(x) \tag{11}$$

em que b_0 e b_2 são coeficientes a determinar. A derivada de $f(x)$ será

$$\dot{f}(x) = b_0\dot{\varphi}_0(x) + b_2\dot{\varphi}_2(x) \tag{12}$$

As funções de onda do oscilador são [5]

$$\varphi_n(x) = N_n \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) H_n(x) \tag{13}$$

em que $H_n(x)$ são polinômios de Hermite e N_n fatores de normalização. Temos em geral

$$N_n = \left(\frac{1}{\pi^{1/2}}\frac{1}{2^n n!}\right)^{1/2} \tag{14}$$

As derivadas $\varphi_n(x)$, segundo a Eq. 13, conterão dois termos. O correspondente a $H_n(x)$ pode ser expresso em função de $H_{n-1}(x)$ [5], ou seja,

$$\dot{H}_n(x) = 2nH_n(x) \tag{15}$$

Com isto teremos $\dot{\varphi}_0(x) = -x\varphi_0(x)$ e $\dot{\varphi}_2(x) = -x\varphi_2(x) + \sqrt{2}\varphi_1(x)$ que devem ser introduzidas na Eq. 12 e quadradas para a obtenção de $\dot{f}^2(x)$. Em $\dot{f}^2$ aparecem termos do tipo $x^2\varphi_0^2$, $x^2\varphi_0\varphi_2$, $x\varphi_0\varphi_1$, $x^2\varphi_2^2$, $x\varphi_1\varphi_2$, e φ_1^2 tendo b_0^2, $b_0\, b_2$ e b_2^2 como possíveis coeficientes, que devem ser integrados como na Eq. 9. Estas integrais são conhecidas para quaisquer índices [6], dando, no nosso caso, respectivamente, 1/2, $\sqrt{2}/2$, $\sqrt{2}/2$, 5/2, 1 e 1. Devemos agora minimizar A (Eq. 9), sujeita à Eq. 10, isto é, sendo λ um multiplicador de Lagrange, devemos minimizar $I = A + \lambda\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ em relação a b_0 e b_2, coeficientes de $f(x)$. Feitas as contas, temos dá

$$I = \frac{b_0^2}{2} + b_0 b_2(\sqrt{2}-2) + b_2^2\frac{9-4\sqrt{2}}{2} - \lambda(q_0 b_0 + q_2 b_2) \tag{16}$$

em que q_0 e q_1 são, respectivamente, $q_0 = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_0(x)dx = 1,883$ e $q_2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_2(x)dx = 1,331$, valores obtidos por integração no MathCad. Achando-se $\partial I/\partial b_0$ e $\partial I/\partial b_2$ e igualando-os a zero, vê-se que b_0 e b_2 são proporcionais a λ e definindo b_0' e b_2' como b_0/λ e b_2/λ, b_0' e b_2' podem ser determinados. O sistema gerado é

$$b_0' = -0,5858 b_2' = 1,883$$

$$-0.5858 b_0' + 3,3432 b_2' = 1,331 \tag{17}$$

fornecendo $b_0' = 2{,}358$ e $b_2' = 0{,}716$. Usando-se agora a Eq. 10, λ é obtido $\lambda = 0{,}1854$. Retorna-se à Eq. 9 para a obtenção do valor mínimo de A, nesta aproximação, que é 0,09102, inferior, portanto, ao valor fornecido pelo $p_1(t)$ dado na Eq. 5. Retornamos agora à Eq. 15 e obtemos

$$f(x) = 0,1393e^{-x^2/2}(1,852 + 1,0126x^2) \tag{18}$$

que integrada de $-\infty$ a $+\infty$ dá efetivamente 1. O momento de dipolo normalizado a 1 seria

$$g(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy \tag{19}$$

Na Fig. 1 mostramos $f(x)$, Eq. 18, e $f_1(x) = 0,5(sech\ x)^2$ correspondente à Eq. 5. Surpreendentemente $f(x)$ apresenta um ligeiro mínimo em $x = 0$, talvez uma anomalia proveniente da aproximação de baixa ordem.

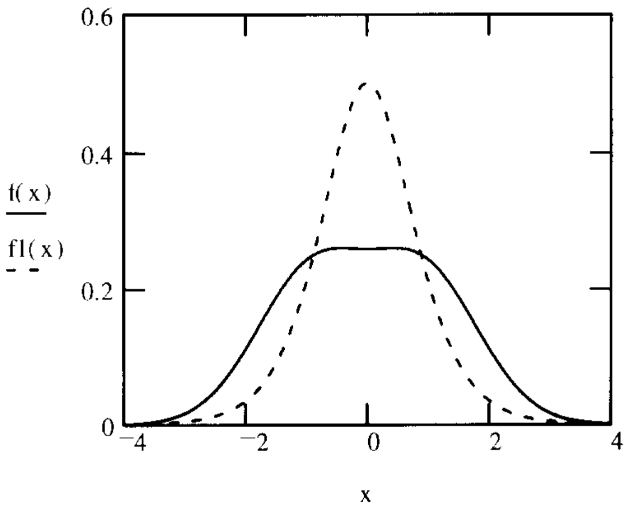

Figura 1. As derivadas no tempo normalizado do momento de dipolo da função tangente hiperbólica, Eq. 5, como $f1(x)$ e a de mínima energia, na aproximação de segunda ordem, $f(x)$, Eq. 18. Uma oscilação muito suave ocorre nas vizinhanças de $x = 0$, para $f(x)$.

V Energia irradiada na carga de um condensador

Voltemos à Eq. 6 e estimemos a energia irradiada na carga a um potencial V de um condensador plano, capacidade C, carregado através de resistência R, fixando a escala de tempo em $\gamma = 1/RC$. Admitindo que A é cerca de 1, a energia W no sistema MKS será

$$W = \frac{k\nu V^2}{6\pi c^3 R^3 C^2} \tag{20}$$

em que k é a constante dielétrica do dielétrico usado no condensador e ν o seu volume. Por exemplo, tomemos um condensador em que as placas estão separadas por uma folha de polímero de 10 μm, com área de 10 cm^2, $k = 2$. Sua capacidade será cerca de 2×10^{-9} F. Se $V = 1$ kV, a energia eletrostática, $1/2CV^2$, será 10^{-3} J. A energia irradiada, pela Eq. 20, seria $5 \times 10^{-12}/R^3$ J. Mesmo que R fosse 0,1 Ω, com $RC = 2 \times 10^{-10}$ s, a energia irradiada teria sido 5 milionésimos da energia eletrostática. Na verdade, a estimativa da energia irradiada na carga do condensador através de uma resistência - processo que não é suficientemente suave no início - valeria para para o resto do processo.

VI Conclusões

A Fig. 1 mostra que para irradiar a menor energia, a aceleração e a desaceleração (derivadas de $f(x)$) se concentram em duas regiões do tempo entre as quais ela é praticamente nula (entre aproximadamente -1 e +1). Os números da seção anterior mostram quão pequena é a energia irradiada em comparação com a eletrostática armazenada.

Agradecimentos

O autor agradece ao CNPq a bolsa de produtividade.

References

[1] G.F. Leal Ferreira, Ver. Bras. Ens. Fís., **20**, 201 (1998).

[2] R.P. Feynman, R.B. Leighton e M. Sands, *The Feynman Lectures*, Vol. 1, Addison- Wesley, Reading (1966).

[3] L.E. Elsgolc, *Calculus of Variations*, Pergamon Press e Addison-Wesley, Londres e Reading, respectivamente, (1962).

[4] Ref. 3, Cap. V.

[5] L. Pauling e E.B. Wilson Jr. *Introduction to Quantum Mechanics*, McGraw-Hill Book, Nova York (1935) Cap. III.

[6] E. Durand, *Mécanique Quantique*, Vol. 1, Masson, Paris (1970) Cap.7.