Os Grandes Números

The Great Numbers

José Plínio Baptista e Laércio Ferracioli
plinio@cce.ufes.br; laercio@cce.ufes.br
Departamento de Física, Universidade Federal do Espírito Santo
Campus de Goiabeiras, 29060-900, Vitória, ES

Recebido em 03 de julho de 2000. Aceito em 22 de de novembro de 2000

O artigo aborda os trabalhos de dois grandes personagens da história da ciência, Arquimedes e Dirac, que trataram independentemente, e de formas diversas, a chamada questão dos grandes números. O desenvolvimento destes trabalhos revela o talento destes cientistas que foram precursores de concepções científicas avançadas: no caso de Arquimedes, propondo uma nova representação numérica utilizando, para comprovação de sua eficácia, a concepção de sistema heliocêntrico proposta por Aristarco, e no caso de Dirac, lançando as bases que possibilitaram sérias tentativas de construção da Gravitação Quântica.

This paper deals with the work written by two notable scientists, Archimedes and Dirac, who independently dealt with the theme so called the question of the great numbers. The development of their work reveals their talent related to the construction of advanced scientific conceptions: Archimedes presenting a new numeric representation using for the sake of efficacy the heliocentric conception proposed by Aristharco; Dirac introducing the basis which gave grounds for attempts for the construction of Quantum Gravitation.

I Introdução

Os cálculos realizados hoje em dia, seja no campo da tecnologia como no campo da ciência pura, envolvem quase sempre números que representam medidas de algumas grandezas que podem ser tanto muito pequenas, relativas à dimensão atômica ou menor, quanto bastante grandes como é o caso da dimensão de uma galáxia ou mesmo do universo atual. Assim, pode-se citar:

Tempo de Planck[1]	10^{-43} segundos
Massa do elétron	10^{-23} kg
Velocidade da luz	10^{8} m/s
Idade atual do universo	10^{10} anos

Estes números, quando escritos na forma natural, se apresentam como números contendo muitos algarismos antes da vírgula ou um número muito grande de casas decimais, como é o caso do Tempo de Planck escrito abaixo:

$$10^{-43} = 0,0000000000000000000000000000000000000000001$$

Atualmente, mediante o uso da chamada notação científica ou notação de engenheiro, encontrada em qualquer calculadora científica, estes números são facilmente expressos ou representados como mostram os exemplos acima. Em geral estes números expressam a ordem de grandeza de uma medida e não a medida propriamente dita. Na verdade, no emprego destes números, o que importa não é o valor exato deles e sim a ordem de grandeza, podendo as diferenças de unidades na expressão final do número serem desprezadas. Assim, utilizando as regras de arredondamento praticadas na física, o tempo de Planck poderia ter a parte

[1]Na evolução do universo a partir do *Big-Bang*, o tempo de Planck - (t_{PL}) marca uma época de transição. Para $t > t_{PL}$ as interações gravitacionais são descritas pela Relatividade Geral, ao passo que para $t < t_{PL}$ seria necessário o emprego da Gravitação Quântica para a descrição das interações. A unidade de tempo de Planck pode ser definida formalmente como $t_{PL} = \sqrt{\frac{hG}{2\pi c^5}}$. A densidade do universo para $t = t_{PL}$ é da ordem de 10^{90} g/cm^3.

diferente de zero expressa por qualquer número menor que 5 e sua ordem de grandeza permaneceria a mesma: 10^{-43}.

Neste contexto, são números desta ordem de grandeza que são aqui denominados de grandes números, e que serão abordados a partir dos trabalhos desenvolvidos por dois cientistas que muito contribuíram para o progresso científico ao longo da história do saber humano. Esses cientistas são:

1. Arquimedes (c.287-212 a.C.) matemático e físico grego, escreveu sobre os fundamentos da geometria, aritmética e mecânica. Nascido em Siracusa, Sicília, no século III a.C., foi educado em Alexandria, Egito, voltando a viver a maior parte de sua vida na Sicília;

2. Paul André Maurice Dirac (1902-1984) físico inglês, um dos responsáveis pela Mecânica Quântica e criador da estrutura de representação formal da física quântica. Viveu no século 20 e durante a maior parte de sua vida pesquisou e ensinou em Cambridge, Inglaterra, vivendo os últimos anos de sua vida ligado à Universidade da Flórida, nos Estados Unidos.

A ligação entre estes dois importantes personagens da história da física reside no fato que, enquanto Dirac com sua conhecida genialidade interpreta o significado dos grandes números da física Moderna de uma maneira inesperada e original, Arquimedes utiliza todo o seu lendário talento na construção de um sistema de representação de grandes números nos primórdios da filosofia natural, como era denominada a física em seu tempo. Dessa forma, a questão dos grandes números é abordada de maneira distinta e em diferentes perspectivas, como é relatado a seguir.

II O sistema numérico para representação de grandes números de arquimedes de siracusa

Arquimedes figura na história da ciência como um dos mais talentosos personagens que surpreendeu o mundo de sua época pelas suas conquistas tanto na matemática como na ciência da mecânica, teórica e aplicada. Na matemática pura, antecipou muitas das descobertas da ciência moderna, tal como o cálculo integral, através de seus estudos sobre as áreas e volumes de figuras sólidas e áreas de figuras planas. Assim, ele demonstrou a fórmula para o cálculo do volume de uma esfera em função do volume de um cilindro que a circunscreve a partir do famoso teorema relacionando os volumes do cone, da esfera e do cilindro, com o qual demonstra que os volumes do cone, da semi- esfera e do cilindro estão na razão 1:2:3.

Na mecânica, foi autor do primeiro tratado teórico sobre as alavancas e da descoberta da lei da hidrostática, denominada de Princípio de Arquimedes. Durante a invasão romana, empregou sua genialidade na mecânica aplicada construindo e fazendo funcionar máquinas bélicas em defesa de Siracusa, impedindo sua conquista por dois longos anos[2]. Todos os trabalhos de Arquimedes apresentaram o rigor e a imaginação de seu pensamento matemático.

Dessa forma, Arquimedes emprega toda essa genialidade na resolução do problema da representação dos grandes números, tarefa assumida por ele próprio e descrita a seguir.

II.1 O Contexto histórico: A numeração alfabética grega

O grande problema na época de Arquimedes era a inexistência da notação moderna posicional para a representação dos números. Até que a humanidade atingisse este nível técnico, o ser humano experimentou inúmeros métodos de contagem ou de representações numéricas [2].

A representação dos números usada na Grécia antiga, à época de Arquimedes, era constituída das letras do alfabeto que era formado de 24 letras, acrescido de 3 letras arcaicas. Estas 27 letras davam possibilidade de se nomear três ordens de grandeza. São elas:

- as unidades: de 1 a 9 e representadas pelas primeiras nove letras do alfabeto;
- as dezenas ou múltiplos de 10: de 10 a 90 e representadas pelas nove letras seguintes, da 10ª a 18ª letra;
- as centenas ou múltiplos de 100: de 100 até 900 representadas pelas nove letras seguintes, da 19ª a 27ª letra.

A Quadro 1 apresenta um resumo desta representação com a utilização das letras minúsculas e maiúsculas [2].

[2] Uma descrição detalhada destas proezas foi minuciosamente relatada pelo próprio general romano Marcelo, comandante do exército invasor [1].

Quadro 01: *Representação Alfabética dos Números na Grécia Antiga*

Ordem de Grandeza	Representação									
Unidades	α	β	γ	δ	ε	ϛ	ζ	η	θ	Letras Minúsculas
Dezenas	ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ϙ	
Centenas	ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ	
Unidades	A	B	Γ	Δ	E	Ϛ	Z	H	Θ	Letras Maiúsculas
Dezenas	I	K	Λ	M	N	Ξ	O	Π	Ϙ	
Centenas	P	Σ	T	Y	Φ	X	Ψ	Ω	Ϡ	

A representação dos números acima de 1.000 era realizada por combinações de elementos do quadro acima acrescentado de um sinal que identificava os milhares, conforme mostrado no Quadro 2.

Quadro 02: *Representação Alfabética dos Milhares na Grécia Antiga*

	1.000	2.000	3.000	4.000	5.000	6.000	7.000	8.000	9.000
Minúscula	͵α	͵β	͵γ	͵δ	͵ε	͵ς	͵ζ	͵η	͵θ
Maiúscula	ꞮA	ꞮB	ꞮΓ	ꞮΛ	ꞮE	ꞮϚ	ꞮZ	ꞮH	ꞮΘ

Existia, ainda, uma notação especial para a representação da ordem dos milhares, como mostra o Quadro 3.

Quadro 03: *Representação Alfabética Alternativa dos Milhares na Grécia Antiga*

1.000	2.000	3.000	4.000	5.000	6.000	7.000	8.000	9.000
ιρ	κρ	λρ	μρ	μρ	ξρ	ορ	πρ	ϙρ

O nome especial para o número 10.000 era a *myriade*, representada pela letra M ou $\overset{\alpha}{\mu}$.

Por conseguinte, neste sistema de numeração só era possível distinguir claramente os números até a *myriade* de *myriades*, ou seja, 10.000 x 10.000 ou 100.000.000. Uma conseqüência incômoda era, é claro, que os matemáticos gregos jamais poderiam expressar numericamente grandezas cujas magnitudes ultrapassassem os cem milhões. Apolônio de Perga[3], contemporâneo de Arquimedes, propôs um sistema que mais tarde foi adotado por muitos astrônomos. Entretanto, o foco do presente artigo será o sistema proposto por Arquimedes, pois o tratado escrito por ele sobre os grandes números contém informações de muito interesse para a história da ciência [3].

II.2 A motivação

O interesse de Arquimedes na representação dos grandes números originou-se de uma discussão ocorrida na corte do rei Gelon de Siracusa, onde algumas pessoas teriam afirmado ao rei ser impossível contar os grãos de areia das praias da Sicília, pois, ainda que este número não fosse infinito, seria tão grande que não haveria uma maneira de representá-lo.

A dificuldade levantada pelos interlocutores do rei repousava sobre a limitação do sistema de numeração grega, então em uso, que representava enorme dificuldade ao cálculo quando se tratava de números de magnitudes muito elevadas, conforme descrito na seção anterior.

Arquimedes propos, então, demonstrar que esta contagem era realizável e que, além do mais, era

[3]Matemático grego viveu durante o final do séc. III a.C e início do séc. II a.C. Nasceu em Perga, Pamphylia, hoje Turquia. Escreveu o célebre *Tratado Sobre as Seções Cônicas*, originalmente escrito em 8 livros. Fez importante contribuição à astronomia grega com a introdução dos epiciclos e excêntricos no estudo do movimento dos planetas.

possível imaginar uma numeração adequada que permitisse não somente resolver o problema em questão como também exprimir numericamente qualquer quantidade finita.

Para que as conclusões de sua demonstração resultassem incontestáveis por parte de seus interlocutores, Arquimedes passou a considerar as situações mais desfavoráveis aos seus propósitos, trazendo ainda maiores dificuldades ao problema inicial. Assim sendo, Arquimedes afirmou inicialmente que mediante raciocínios geométricos os números que ele propunha representar poderiam ultrapassar não somente o número de grãos de areia de todas as praias da Sicília, como também o número de grãos de areia contido no volume igual de toda a Terra. E mais ainda, afirmou que estes números recém imaginados poderiam ultrapassar inclusive o número de grãos de areia contido no volume de uma esfera do tamanho do mundo!

No entanto, ainda não satisfeito com o grau de dificuldades que se atribuiu, Arquimedes vai ainda mais longe, adotando posteriormente a definição de mundo, não a que estava em voga em sua época, mas a definição de Aristarco de Samos (c. 310-230 a.C.), primeiro astrônomo a propor uma Teoria Heliocêntrica. Em seu trabalho escrito e dirigido ao rei Gelon, ele declara ter tomado conhecimento desta teoria pela leitura dos livros publicados por Aristarco [4]. Assim sendo, as definições de mundo eram:

> *Mundo* aceito na época de Arquimedes, era o nome dado pelos astrônomos à esfera cujo centro seria coincidente com o centro da Terra e cujo raio seria igual à distância Terra-Sol - Sistema Geocêntrico;
>
> *Mundo de Aristarco* de Samos seria a esfera com centro no Sol e com raio igual à distância Sol-Estrelas Fixas. Neste sistema, tanto o Sol quanto as estrelas fixas permaneceriam em repouso enquanto os outros corpos celestes girariam em torno do Sol, tendo este como centro de suas órbitas circulares - Sistema Heliocêntrico[4].

Em outras palavras, Arquimedes se propõe a mostrar que seus números poderiam exprimir a quantidade de grãos de areia contida no volume de uma esfera expressivamente maior que a esfera do mundo da época. Ele propõe calcular esta quantidade considerando a esfera do mundo de Aristarco.

II.3 Os elementos geométricos e numéricos da solução

Para demonstrar o proposto, Arquimedes desenvolveu um argumento baseado em uma seqüência de cálculos dos volumes de esferas cujos raios estariam relacionados, começando por esferas com raios cujas medidas pudessem ser feitas com facilidade. Assim, o cálculo dos volumes começa por relacionar geometricamente volumes de esferas em ordem crescente de tamanho, partindo de uma esfera de raio igual a um *dedo*[5] até uma esfera de raio igual ao raio do mundo de Aristarco.

A demonstração é feita a partir de um procedimento básico desenvolvido mediante a aplicação repetida de uma relação entre os volumes de duas esferas e seus raios, dada pelo teorema já conhecido na época:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{R_1^3}{R_2^3} \tag{1}$$

onde R_1 é o raio da esfera de volume V_1 e R_2 é o raio da esfera de volume V_2.

Além desta relação básica, Arquimedes utiliza alguns elementos cujo conhecimento prévio é necessário para o desenvolvimento dos cálculos por ele elaborados. Estes elementos se constituem em teoremas relativos a círculos e polígonos já demonstrados por ele anteriormente em outras obras, medidas astronômicas realizadas por ele mesmo e medidas e relações entre grandezas astronômicas estabelecidas por outros estudiosos. Assim, é necessário enumerar:

1. Relação entre o diâmetro do Sol e da Terra

De Aristarco [4], considerando que D_S e D_T são respectivamente os diâmetros verdadeiros do Sol e da Terra, Arquimedes adota

$$D_S \approx 30 D_T \tag{2}$$

2. Perímetro da circunferência da Terra

Apesar do cálculo feito por Eratóstenes[6] (c. 276-196 a.C.), obtendo para o perímetro da circunferência da Terra o valor de 250.000 estádios[7] já ser do conhecimento dos estudiosos da época, Arquimedes adota

[4]Aristarco foi quem primeiro afirmou que a Terra girava ao redor do Sol, quase dois mil anos antes do astrônomo polonês Nicolau Copernico (1473-1543) publicar sua obra *Sobre a Revolução dos Corpos Celestes*. Sua crença na Teoria Heliocêntrica é conhecida somente através dos escritos de Arquimedes, uma vez que nenhum de seus tratados sobre o assunto foi conservado. A única obra de Aristarco que sobreviveu foi *Sobre as Dimensões e Distâncias do Sol e da Lua*, onde descreve um método para estimar a distância relativa do Sol e da Lua a partir da Terra. Embora seu método estivesse essencialmente correto, suas estimativas não foram corretas devido, sobretudo, à falta de instrumentos precisos. Ver referência [4].

[5]Provavelmente o equivalente da polegada moderna.

[6]Matemático, astrônomo, geógrafo e poeta grego, que mediu a circunferência da Terra com extraordinária precisão pela determinação astronômica da diferença de latitude entre as cidades de Syene, hoje Aswâon, e Alexandria, no Egito: sua medida foi 15% maior do que o valor hoje aceito.

[7]O estádio é uma antiga unidade grega de distância igual à distância entre as linhas de partida e de chegada da pista de corrida de fundos do estádio de Olímpia e que media aproximadamente 194 metros.

um valor, exageradamente superior, de 3.000.000 de estádios. O quer dizer que ele atribui o valor de 582.000 quilômetros para a circunferência da Terra[8]. Dessa forma, Arquimedes utilizou o valor abaixo para o perímetro da circunferência da Terra,

$$P_T \approx 3.000.000 \text{ estádios} \tag{3}$$

3. Diâmetro da Terra

Os teoremas demonstrados por Arquimedes sobre o círculo, que estabelece a razão entre a circunferência e seu diâmetro, juntamente com o dado numérico de (3) permitem escrever,

$$D_T \leq 1.000.000 \text{ estádios} \tag{4}$$

4. Diâmetro do Sol

Por meio de uma dedução geométrica bem elaborada [3;5] fica demonstrado que o diâmetro verdadeiro do Sol é maior que o lado de um polígono regular de 1.000 lados inscrito no círculo do Mundo:

$$D_S > \ell_{1.000} \tag{5}$$

5. Relação geométrica

Outro teorema de Arquimedes estabelece que o diâmetro de qualquer círculo é menor que o terço do perímetro de qualquer polígono regular inscrito neste círculo e que tenha mais de seis lados

$$D < \frac{1}{3}P(> 6) \tag{6}$$

Portanto, utilizando a relação (6) aplicada ao círculo do mundo, tal que D_M e P_M são respectivamente seus diâmetro e perímetro, e tendo em conta as relações (2), (3), (4) e (5) pode-se escrever:

$$D_M < \frac{1}{3}P_M(> 6) \quad \Rightarrow$$

$$D_M < \frac{1}{3}1.000 \times \ell_{1000} \Rightarrow$$

$$D_M < \frac{1}{3}1.000 \times 30D_T \Rightarrow$$

$$D_M < \frac{1}{3}1.000 \times 30 \times 1.000.000 \text{ estádios} \quad \Rightarrow$$

$$D_M < 100 \times 10.000 \times 10.000$$

Donde pode-se escrever a seguinte relação:

$$R_M < 100 \text{ myriades de myriades de estádios} \tag{7}$$

Finalmente Arquimedes deduz, a partir dos escritos de Aristarco, a relação final:

$$\frac{\text{raio da terra}}{\text{raio do mundo}} \approx \frac{\text{raio do mundo}}{\text{raio da esfera das estrelas fixas}} \tag{8}$$

Com estes dados Arquimedes pôde calcular progressivamente as quantidades de grãos de areia contidas nas esferas a partir de uma esfera de diâmetro previamente escolhido até o número de grãos de areia contido na esfera do mundo heliocêntrico.

II.4 O sistema numérico de arquimedes

O número 10.000 em grego era, como já descrito, denominado de myriade e representado pela letra M ou $\overset{\alpha}{\mu}$. Na seção II.1 foi também visto que, para Arquimedes, os nomes dos números iam desde a unidade até a myriade, sendo portanto possível exprimir um número com clareza até 10.000 myriades, o que, na nossa notação moderna de potências de dez, daria 10^8. No entanto, estes números e esta representação não eram suficientes para o seu propósito, levando-o a propor um novo sistema de números[9].

Inicialmente, Arquimendes considerou uma progressão geométrica de razão igual a 10, denominada de progressão décupla:

$$10^o, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6, 10^7, 10^8, 10^9, 10^{10}, 10^{11}, 10^{12} ...$$

Em seguida, a dividiu em classes de ordens constituídas, cada uma, por 8 números, as quais denominou de oitavas: a primeira começando do 1 até 10^7 e denominada de números primeiros; a segunda de 10^8 até 10^{15}, denominada de números segundos, e assim por diante e sucessivamente. Dessa forma, pode-se escrever:

$$\begin{array}{cccccccccl}
10^0 & 10^1 & 10^2 & 10^3 & 10^4 & 10^5 & 10^6 & 10^7 & \rightarrow & \text{Números primeiros } \{1^{\text{os}}\} \\
10^8 & 10^9 & 10^{10} & 10^{11} & 10^{12} & 10^{13} & 10^{14} & 10^{15} & \rightarrow & \text{Números segundos } \{2^{\text{os}}\} \\
10^{16} & 10^{17} & 10^{18} & 10^{19} & 10^{20} & 10^{21} & 10^{22} & 10^{23} & \rightarrow & \text{Números terceiros } \{3^{\text{os}}\} \\
10^{24} & 10^{25} & 10^{26} & 10^{27} & 10^{28} & 10^{29} & 10^{30} & 10^{31} & \rightarrow & \text{Números quartos } \{4^{\text{os}}\} \\
... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & & .... \\
10^{56} & 10^{57} & 10^{58} & 10^{59} & 10^{60} & 10^{61} & 10^{62} & 10^{63} & \rightarrow & \text{Números oitavos } \{8^{\text{os}}\} \\
... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & & ....
\end{array}$$

[8]O valor do perímetro da Terra calculado a partir do valor do raio igual a 6.370 km é de aproximadamente 40.000 km.

[9]Vide L'Arenaire em [3], p.365.

No próximo passo Arquimedes denominou de números da **Primeira Série** os números que vão da primeira *oitava* até a $(10.000 \times 10.000)^a$ *oitava*; seqüencialmente aos números da $(10.000 \times 10.000)^a$ *oitava da primeira série* iniciava-se a **Segunda Série**. Estas seqüências podem ser estendidas ilimitadamente.

A partir desta construção, pode-se deduzir facilmente que o último número pertencente a última oitava da *primeira série* equivale à potência 10^8 elevada a um expoente igual a 10^8 ou $(10^8)^{(10)^8}$. Além do fato de que pode-se escrever:

10^0 é a unidade dos números $\{1^{os}\} = 1$;

10^8 é a unidade dos números $\{2^{os}\} = 10.000$ myriades $= 10.000\ \overset{\alpha}{\mu}$;

10^{16} é a unidade dos números $\{3^{os}\} = 10.000\ \overset{\alpha}{\mu}\overset{\alpha}{\mu}\overset{\alpha}{\mu}$ e assim por diante [5]. Cada número é expresso em uma unidade que corresponderá a um número tradicional expresso em myriades. Este é o engenhoso sistema numérico de Arquimedes.

II.5 Cálculo dos grãos de areia: A solução do problema

Uma vez definido o sistema numérico, Arquimedes iniciou os cálculos apoiando-se sistematicamente na relação entre os volumes das esferas, que estão relacionadas como na expressão (1). As unidades de medida iniciais tomadas por ele podem parecer um tanto estranhas, porém, são unidades em perfeito acordo com a época. Até hoje em dia ainda sobrevivem as unidades do tipo pés, polegadas, braças, palmos. O dedo ou polegada usado por Arquimedes é a largura de um dedo polegar que, no caso presente foi estimado como sendo de 2 cm. Assim, procedeu ao cálculo dos grãos por etapas.

Inicialmente Arquimedes estimou o número de grãos de areia contido em um grão de papoula em no máximo 10.000 grãos de areia! Ora, a medida de um dedo equivale a 40 grãos de papoula colocados em fileira. Portanto, o número de grãos de areia contido na esfera de diâmetro de um dedo será:

$$N_{\text{grãos}/1\ \text{dedo}} \leq (40)^3 \times 10.000 = 64.10^7$$

Este número fica entre 6 e 10 unidades de números $\{2^{os}\}$. Portanto, o número de grãos de areia contido na esfera de diâmetro de 1 dedo pode ser escrito,

$$N_{\text{grãos}/1\ \text{dedo}} \leq 10 \cdot \{2^{os}\} \tag{9}$$

Usando a fórmula (1), calculamos facilmente o número de grãos contidos nas esferas de volumes proporcionalmente maiores que as precedentes e cujo coeficiente de proporcionalidade é a razão entre os diâmetros. Assim, o número de grãos contidos na esfera de diâmetro igual a 100 dedos será[10]:

$$N_{100\ \text{dedos}} = \frac{(100)^3}{(1)^3} \cdot N_{1\ \text{dedo}} \leq (1.000.000)10 \cdot 2^{os} = 1000\ \overset{\alpha}{\mu} \cdot 2^{os}$$

ou seja[11],

$$N_{100\ \text{dedos}} \leq 1000\ \overset{\alpha}{\mu}\ 2^{os} \tag{10}$$

Igualmente,

$$N_{1000\ \text{dedos}} \leq 1000\ \overset{\alpha}{\mu}\ 3^{os} \tag{11}$$

Em seguida passa-se ao cálculo correspondente à esfera de raio igual a 1 estádio[12], cuja razão entre os volumes é dada[13]. Dessa forma, tem-se:

$$V_{1\ \text{estádio}} < V_{10000\ \text{dedos}} = \frac{R^3_{10000\ \text{dedos}}}{R^3_{1000\ \text{dedos}} V_{1000\ \text{dedos}}}$$

Por aplicações sucessivas da expressão (1) e usando as expressões (6), (7) e (8) chega-se finalmente a,

$$N_{\text{estrelas fixas}} \leq 1000\ \overset{\alpha}{\mu} \cdot 8^{os} \tag{12}$$

Este número é uma estimativa do número de grãos de areia contido na esfera de raio igual à distância Sol-Estrelas fixas, e que, traduzido para a notação de

[10] É indiferente o uso do diâmetro ou do raio, a razão permanece a mesma.

[11] Para localizar, na progressão décupla, o produto de dois números, Arquimedes lança mão de uma propriedade fundamental deste tipo de progressão: o produto de dois elementos desta progressão é igual a um outro elemento que estará localizado a uma posição relativa ao maior dos fatores, igual à posição do fator menor relativa ao primeiro termo.

[12] 1 estádio 9.600 dedos.

[13] Tendo em vista que as esferas são preenchidas homogeneamente com os grãos de areia, o número de grãos numa esfera é proporcional ao seu volume.

potências de dez, não é superior[14] a 10^{63}.

$N =$ {número de unidades: de 1 até 10.000$\times$ 10.000 } $\times$

{unidade de uma dada enésima oitava da emésima série}

Como pode ser facilmente visto na expressão acima, esta representação se aplica a qualquer número independente de sua magnitude, Dessa forma, Arquimedes conclui seu trabalho apresentando uma maneira de representar os grandes números em sua época.

Apesar da genialidade de sua criação, o sistema de representação numérica adotado pela maioria dos astrônomos da antigüidades não foi o de Arquimedes, mas sim aquele proposto por Apolônio de Perga, como dito anteriormente. Apolônio exerceu uma grande influência na Astronomia da época pela sua importante contribuição matemática e pelo fato de ter sido um dos responsáveis pela introdução dos epiciclos no estudo dos movimentos dos planetas. Talvez seja esta uma possível explicação para a preferência de seu sistema ao invés daquele proposto por Arquimedes.

III A hipótese dos grandes números de Dirac

P.A.M. Dirac, físico teórico inglês, estudou e desenvolveu seus trabalhos de pesquisa em Cambridge. Sua contribuição científica foi toda voltada para o aperfeiçoamento formal da Mecânica Quântica. Sua maior contribuição, e que lhe valeu o prêmio Nobel em 1933, foi a previsão da existência de uma partícula com massa e spin iguais aos do elétron porém com *carga positiva.* Das suas equações nasceu a primeira antipartícula, detectada experimentalmente mais tarde e que recebeu o nome de *pósitron*[15]. As equações descobertas por Dirac foram construídas para descrever o comportamento do elétron relativista, cujos estados quânticos se distribuem em um espectro de energias que surpreendentemente revelou a existência de estados de energia negativa! Dirac associou estes estados de energia negativa aos estados quânticos de uma anti-partícula. Sua genialidade transformou uma enorme dificuldade teórica para a época em uma original e espantosa previsão.

Armado de sua habilidade para as questões teóricas, Dirac partiu em busca de uma explicação racional para a existência de certas relações entre constantes fundamentais da física moderna e da construção de novos números admensionais a partir destas. Partindo da premissa de que não se tratava de mera coincidência, procurou uma interpretação para os valores e as ordens de grandeza desses números.

III.1 Números adimensionais que ocorrem naturalmente na física

As constantes fundamentais da física, tais como a constante de *Planck*, h, a *massa* do *elétron*, m, e a carga do *elétron*, e, nos fornece um conjunto de unidades absolutas para medidas de distância, tempo, massa. No entanto, existem muito mais dessas constantes do que é necessário para aquele fim, uma vez que ainda é possível construir, com a ajuda daqueles, outros números adimensionais que cumprem o mesmo propósito [6]. Estes números têm provocado o interesse de muitos pesquisadores que questionam o significado da sua existência e também a razão do aparecimento de um valor numérico bem determinado, como por exemplo:

- valor da razão entre as massas do próton e do elétron = 1840 ou ainda
- o inverso da constante de estrutura fina, $hc/e^2 = 137$.

Segundo Dirac [7], Arthur Eddington (1882-1944) chegou a propor uma teoria para obter, por via dedutiva, todos estes números. No entanto, segundo ele, a teoria de Eddington poderia ser, em princípio, correta, mas seus argumentos não eram muito rigorosos. Mais ainda, Dirac afirmava que a existência de enormes números adimensionais exigiria uma explicação inteiramente original.

À primeira vista este assunto sugere fortemente tratar-se de uma preocupação numerológica pitagórica. É um fato conhecido da história da ciência que entre os pitagóricos, cuja contribuição à ciência foi fundamental e inegavelmente decisiva para a construção deste maravilhoso edifício que é a ciência, os significados místicos dos números eram levados em alta consideração. Por exemplo, a *tetractys* - o número 4, e a *década* - o número 10, gozavam de uma primordial posição no conjunto dos valores que, segundo eles, encerravam o conhecimento dos segredos mais profundos do universo. Portanto, era imperioso o estudo exaustivo destes números por todos que aspirassem atingir o conhecimento daqueles segredos, e que uma vez conseguido, segundo os pitagóricos, elevaria o estudioso ao mais sublime estado de felicidade.

Porém, Dirac e os que o seguiram na mesma linha de raciocínio jamais estiveram motivados pela significação mística dos números, mas sim decididos a encontrar alguma explicação racional para a existência destes números e também pelos valores particulares que eles apresentam.

Dessa forma, como exemplos de grandes números dignos de nota pode-se citar:

- A razão entre a força de atração elétrica entre um próton e um elétron e a força de atração gravitacional

[14] Todos estes números pertencem ainda à *primeira série*.

[15] Dirac postulou a existência do pósitron em 1928, o qual foi experimentalmente descoberto em 1932 pelo físico norte-americano Carl David Anderson (1905-1991), quem também confirmou experimentalmente a existência do méson previsto pelo físico japonês Yukava Hideki (1907-1981). Em 1933, Dirac dividiu o Prêmio Nobel com o físico austríaco Erwin Schrödinger (1887-1961).

entre eles:

$$\frac{F_{\text{elétrica}}}{F_{\text{gravitacional}}} = 10^{39} \tag{13}$$

• A idade atual do universo, quando expressa em unidades atômicas:

$$t \approx 10^{39} \tag{14}$$

• O número estimado de nucleons no universo atual, que é dado pelo quociente entre o valor da massa total do universo e o valor da massa do próton,

$$N_{\text{nucleons}} = \frac{\text{Massa.total.do.universo}}{\text{massa.do.proton}} \simeq \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{m_p} \tag{15}$$

sendo $R = 9.10^{27}$ cm e $\rho = 2.10^{-29}$ g/cm^3 e $m_p = 1,67.10^{-24}$ g, valores fornecidos pelo chamado modelo cosmológico padrão. Obtém-se,

$$N_{\text{nucleons}} \sim 3.10^{79}\text{prótons} \tag{16}$$

III.2 A hipótese dos grandes números

Para Dirac [7] a igualdade das ordens de grandeza dos números expressos em (13) e (14) não se trata de uma mera coincidência, mas tem um significado específico.

A idéia básica de Dirac é que estes números devem estar ligados com o parâmetro t, a idade atual do universo, e que a razão entre as forças elétrica e gravitacional tem esta magnitude *agora*. Em outro momento este valor seria *diferente do atual*. Então, segundo o raciocínio de Dirac, a expressão (13) caracteriza a época presente de um modo natural, independente dos padrões estabelecidos pelo homem.

Dessa forma, os grandes números adimensionais da física estariam intimamente conectados com a idade do universo expressa em unidades atômicas[16], e, por conseguinte, variam conforme a variação de t. De um modo geral, de acordo com Dirac [7], pode-se escrever,

$$(10^{39})^n \sim t^n \tag{17}$$

Vê-se que o número adimensional expresso por (16), isto é, o número total de nucleons do universo atual, satisfaz a relação (17) para $n = 2$,

$$10^{79} \sim t^2 \tag{18}$$

Todavia, nem todos os grandes números satisfazem ao que afirma esta hipótese. Por exemplo, o raio máximo do universo fornecido por um modelo cosmológico pulsante independe da época atual e, portanto, não está incluído na Hipótese dos Grandes Números de Dirac. Por outro lado, uma vez adotada a Hipótese dos Grandes Números, este modelo, por ser incompatível com a hipótese, deve ser desconsiderado como um modelo possível. Em outras palavras, a Hipótese dos Grandes Números impõe severas restrições aos modelos de universos permitidos.

III.3 Conseqüências físicas da hipótese dos grandes números - HGN [7]

III.3.1 Criação de matéria

Tendo-se em conta a expressão (18), deve-se concluir que a HGN aponta para o fato de que o número de nucleons no universo cresce com o quadrado do tempo, colocando em 'cheque' o princípio da Conservação da Matéria, condição comum a quase todas as teorias físicas. A única teoria compatível com esta imposição do HGN é a chamada Teoria do Estado Estacionário proposta por Hoyle & Narlikar[17], a qual revelou-se posteriormente em desacordo com a observação.

Dirac [7], [8], especulando sobre as conseqüências destas conclusões, conclui pela existência de dois tipos de criação de matéria:

• criação aditiva: os nucleons seriam criados uniformemente pelo espaço, principalmente no espaço intergaláctico;

• criação multiplicativa: através de algum processo semelhante à radioactividade onde a taxa de criação de nucleons seria proporcional à quantidade de nucleons já existentes [18],[19].

III.3.2. A constante de gravitação Newtoniana - G

A razão entre as forças eletrica e gravitacional entre um próton e um elétron, como foi visto, é um número adimensional da ordem de 10^{39}, o qual, de acordo com a HGN,

$$\frac{e^2}{GM_p m_e} \sim t \tag{19}$$

Portanto, admitindo-se que tanto a carga elementar e quanto as massas do *próton* e do *elétron* são verdadeiramente constantes[20], a HGN prevê que:

---

[16] A expressão dada por 137 $\frac{h}{2\pi m_e c^3}$ tem a dimensão de tempo. Nesta, h é a constante de Planck, m_e é a massa do elétron e c é a velocidade da luz. Como são constantes atômicas, o valor desta expressão é tomado como unidade atômica de tempo. O valor aproximado deste tempo é $t_a \sim 10^{-20}$ segundos.

[17] Ver referências e discussão detalhada desta teoria em Weinberg [10].

[18] Mesmo para grandes cientistas a especulação exagerada conduz a situações bizarras. Dirac, com o intuito de tornar a sua teoria criacionista compatível com o princípio da conservação da matéria já incorporado em todas as teorias físicas modernas, supôs que a criação de nucleons prevista pela HGN, provocaria criação simultânea, e à mesma taxa, de antimatéria, inobservável.

[19] A criação multiplicativa sugere, segundo alguns intérpretes das idéias de Dirac, uma possível alteração na proporção de isótopos entre os elementos naturais. Vide [9].

[20] Sobre possíveis variações das constantes fundamentais ver também [9] mais adiante.

$$G \sim t^{-1} \tag{20}$$

Ou seja, de acordo com a HGN, a constante da gravitação universal não é uma verdadeira constante mas uma quantidade que varia com o tempo.

III.3.2.1 Conseqüências da variação da constante de gravitação G

O fato de que G varia como t^{-1} aponta para a existência de um efeito 'acelerativo' na expansão do universo descrita sob a perspectiva de uma teoria de gravitação newtoniana. Isto se deve ao fato de que G teria um valor extremamente alto nos instantes iniciais do *Big-Bang* para em seguida diminuir rapidamente com o tempo.

Ora, a ação gravitacional que normalmente atua como um freio à expansão seria intensamente atuante no começo e fracamente no futuro; este fato produz um efeito dela se processar cada vez mais livre à medida que o tempo flui. À mesma época, a expansão do universo descrita pelas teorias tradicionais seria diferente: a expansão se processaria com menos rapidez, enquanto que no presente caso, com G variável, a expansão se daria a uma taxa comparativamente maior, causando o efeito acima denominado de acelerativo.

Outra conseqüência notável é a tendência que teria o universo de se dissipar em poeira com o 'desmanchar' de todos os aglomerados de matéria, pois a velocidade de escape,

$$V_{\text{escape}} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \tag{21}$$

importante parâmetro associado ao processo de evaporação nos aglomerados, tenderia para zero! Mais ainda, além da variação da velocidade de escape, as dimensões das órbitas planetárias e lunares, por ação do mesmo fator, sofreriam alterações.

Como pode ser visto, as conseqüências que decorrem da HGN são muito importantes e de grande impacto, principalmente a que toca a não-conservação da matéria. O Princípio da Conservação da Energia é uma das peças mestras da física e só um pesquisador genial como Dirac, com sua autoridade, poderia especular sobre uma possível violação deste princípio. As teorias subseqüentes, elaboradas nesta linha de G variável, mantém-se estritamente dentro da ortodoxia, como veremos mais adiante.

III.4 Teorias propostas com a variabilidade de G

Segundo o próprio Dirac [7], [8], a HGN impõe um severo e rigoroso critério de seleção de modelos cosmológicos possíveis. Mas os modelos que sobrevivem à restrição imposta pela hipótese são essencialmente modelos estáticos. Isto vai de encontro à interpretação moderna, e geralmente aceita, do deslocamento para o vermelho das galáxias, segundo a qual elas estariam animadas de grandes velocidades de recessão.

Todavia, uma conseqüência direta das reflexões de Dirac a respeito dos grandes números foi o surgimento de outros enfoques relativos à mesma questão. Assim, pode-se obter a massa do *méson pion*, a partir das constantes atômicas e cosmológicas G, h, c e H_0, a constante de Hubble:

$$\left(\frac{h^2 H_0}{Gc}\right)^{1/3} \simeq m_\pi \quad (m_\pi \text{ é a massa do méson pion}) \tag{22}$$

É possível mostrar que a expressão acima é equivalente à expressão (19) substituindo h por e^2/c e $m_e^{2/3} m_p^{1/3}$ em lugar de m_π. Ou seja, a hipótese de que estas relações ocorram não somente devido à microfísica mas, também, devido à interferência cósmica é ainda aqui resguardada, admitindo, no entanto, outra interpretação, distinta da apresentada por Dirac:

> *as massas inerciais das partículas elementares não são mais constantes, porém, variam em função de ações cósmicas!* [21] *[10]*

Ou seja, esta nova maneira de ver estas relações envolvendo constantes atômicas fundamentais e o parâmetro de Hubble conduz, de uma maneira quase natural, a uma explicação machiana [11] para a massa inercial das partículas elementares!

Com respeito à Eq. (22), as palavras de Weinberg [10] são esclarecedoras:

> *Considerando possíveis interpretações da Eq. (22), devemos ser cuidadosos de distingui-la de outras 'coincidências'. A Eq. (22) relaciona um único parâmetro cosmológico H_0 com as constantes fundamentais G, h, c e m_π e isto é inexplicável! E claro que nós somos perfeitamente livres de ver a Eq. (22) como uma coincidência numérica sem significado, mas devemos notar que esta combinação peculiar fornece um valor muito próximo do valor da massa de uma partícula elementar típica, fato que não ocorre com outras combinações aleatórias destas constantes.*

Este novo enfoque favoreceu o aparecimento de novas teorias de gravitação e modelos cosmológicos generalizando a teoria da gravitação einsteniana, sem o inconveniente da violação do princípio da conservação da matéria. Além do mais, como decorre das considerações acima, este gênero de teoria se revelou compatível com

[21] Notar que $G \sim E^{-1}$ na Eq. (20).

o conhecido *Princípio de Mach* que atribui a inércia da matéria à interação com a matéria cósmica [11].

A teoria que teve maior sucesso nesta direção foi a teoria de gravitação de Brans-Dicke, na qual G é assimilado a um campo escalar ϕ que seria o intermediário da interação cósmica [10]. Esta teoria adota, além dos potenciais de gravitação previstos pela relatividade geral, e que em casos de alta simetria se restringem a dois, mais um potencial de gravitação representado pelo campo ϕ, controlado por equações propostas pela teoria. Estas equações se compõem de equações clássicas para os potenciais de gravitação einsteinianos e de uma equação específica para o potencial escalar ϕ.

A influência da variabilidade de G na expansão cosmológica mencionada acima é preservada e aqui representada pela intensidade do campo escalar ϕ: quanto mais intenso for este campo em dada época, menor é a ação freiadora da gravitação, ocorrendo, assim, o tal efeito acelerativo.

Uma teoria de gravitação ainda caracterizada como newtoniana, mas com G variável, foi proposta por McVittie [12] e o estudo da estabilidade de um modelo cosmológico original baseado nesta teoria foi elaborado por Baptista et al. [13]. Entretanto, estas tentativas se revelaram apenas como bons exercícios teóricos, pois o desempenho das mesmas é, na melhor das hipóteses, igual ao das teorias à G variável, ou à potencial escalar, já propostas.

Pode-se dizer, dessa forma, que a curiosa interpretação dada por Dirac à existência dos grandes números se revelou, em última análise, extremamente fecunda. Além de ter induzido a elaboração de teorias que generalizam a própria teoria da relatividade geral, permitiu ainda generalizações destas últimas sob forma de propostas de teorias multidimensionais que se revelaram muito promissoras para solucionar o grande problema do momento: a quantificação do campo de gravitação.

IV Uma comparação final

É interessante registrar um espantoso resultado nestes cálculos. As ordens de grandeza do número total de grãos de areia na esfera de Aristarco (R_A) e do número total de nucleons no universo visível (R) são muito próximas, o que é bastante curioso. Haveria algum significado profundo para este fato?

Para que se possa ter uma idéia mais precisa de quão espantoso é este fato, será necessário expressar estes resultados sob formas que permitam a sua comparação. Em outras palavras, os resultados finais dos cálculos poderão ser expressos em grãos de areia ou em número de nucleons. Por outro lado, para se tentar compreender as razões para este curioso resultado é necessário examinar e analisar o desenvolvimento dos cálculos. Inicialmente poderão ser comparadas as densidades numéricas de grãos de areia e de nucleons.

Da Eq. (9) tem-se que o número de grãos de areia por cm^3 será da ordem de:

$$n_{ga} = N_{\text{grãos de areia/cm}^3} \sim 10^8 \tag{23}$$

e da Eq. (15), juntamente com os dados subseqüentes, vê-se que o número de núcleons por cm^3 será da ordem de:

$$n_n = N_{\text{nucleons/cm}^3} \sim 10^{-5} \tag{24}$$

Da Eq. (8) pode-se calcular o raio da esfera de Aristarco em centímetros,

$$R_A \sim 10^{18}\text{cm} \tag{15}$$

e dos dados fornecidos pelo modelo padrão a ordem de grandeza do raio do universo visível é

$$R \sim 10^{28}\text{cm} \tag{26}$$

Portanto, o número total de grãos de areia fornecido pela fórmula (12) pode ser expresso agora em função da densidade numérica,

$$n_{ga}.R_A^3 \sim 10^{62} \tag{27}$$

e, semelhantemente para o número total de nucleons

$$n_n \cdot R^3 \sim 10^{79} \tag{28}$$

Ou seja, as ordens de grandezas anteriormente escritas são expressas agora em função das densidades numéricas. Este resultado mostra que a proximidade das ordens de grandezas mostradas em (27) e (28) decorre do fato de que a grande diferença entre as densidades é compensada pela grande diferença entre os raios R e R_A, o que significa que tudo não passa de uma simples coincidência!

Por outro lado, adotando-se o valor de 10^{-7} g para a massa de um grão de areia [14], o número de nucleons contidos num grão de areia pode ser estimado como

$$N_{\text{nucleons/grão de areia}} \sim \frac{\text{massa de um grão de areia}}{\text{massa de um proton}} = \frac{10^{-7}}{10^{-24}} = 10^{17} \tag{29}$$

Assim é possível expressar a Eq. (27) usando a densidade numérica equivalente em nucleons

$$N_{ga}.R_A^3 \sim 10^{79}\text{nucleons} \tag{30}$$

Então, o número de nucleons na esfera de Aristarco é da *mesma ordem de grandeza* que a ordem do número de nucleons na esfera do universo atual. A coincidência neste caso é ainda mais espantosa!

V Conclusão

Foi visto o tratamento dado à questão dos grandes números por dois pensadores de grande expressão científica: Arquimedes e Dirac. O que se encontra de comum nos dois trabalhos não é somente o fato de ambos terem abordado o mesmo tema, mas também a grande e fecunda criatividade demonstrada nos trabalhos.

De um lado Arquimedes, que, além de demonstrar seu talento, apresenta seu testemunho a respeito do sistema heliocêntrico, proposto primeiramente por Aristarco e não referenciado por Copérnico em sua obra máxima. No trabalho *O Contador de Areia*, no qual é baseado parte deste artigo, verifica-se que seu talento é mais amplo do que se julga a princípio, pois aí encontra-se a descrição de dispositivos mecânicos concebidos e construídos especificamente por ele para observações astronômicas. É extraordinária esta habilidade de um matemático grego, herdeiro de uma tradição platônica que abominava qualquer dispositivo mecânico na solução de problemas matemáticos.

De outro lado tem-se o gênio do cientista inglês que ousa propor hipóteses revolucionárias e delas tira grande proveito no sentido de provocar o aparecimento de novíssimas teorias de gravitação, abrindo possibilidades para soluções de problemas que desafiam os cientistas contemporâneos, que é a unificação dos campos e a quantificação do campo de gravitação.

Agradecimentos

Este trabalho foi financiado parcialmente pelo CNPq, CAPES e pelo FACITEC/CMT/PMV - Fundo de Apoio à Ciência e Tecnologia do Conselho Municipal de Ciência e Tecnologia do Município de Vitória, ES. Gostaríamos de agradecer ao bolsista Fernando Songheti De Mingo pela construção dos caracteres gregos da antigüidade.

References

[1] PLUTARCO (1991) *Vidas Paralelas.* Vol. II. São Paulo: Editora Paumape S.A.

[2] IFRAH, G. (1995) *História Universal dos Algarismos.* Rio de Janeiro: Editora Nova Fronteira.

[3] Ver EECKE, P. (1960) *Les Oeuvres Complétes d'Archimedes* (2 vls). Paris: Vaillant- Carmone.

[4] HEATH, T. (1981) *Aristarchus of Samos, the Ancient Copernicus.* New York: Dover Publications.

[5] BAPTISTA, J.P. (1997) O Contador de Areia ou Arquimedes e o Tamanho do Mundo. *Cadernos do ModeL@b,* Vitória, 1(2): 19p. http://www.modelab.ufes.br.

[6] DIRAC, P.A.M. (1937) The Cosmological Constants. *Nature,* New York, **20**:323.

[7] DIRAC, P.A.M. (1974) Cosmological models and the Large Numbers hypothesis. *Proceeding of the Royal Society of London A,* London, **338**:439-446.

[8] DIRAC, P.A.M (1973) Long range forces and broken symmetries. *Proceeding of the Royal Society of London A,* London, **333**:403-418;

[9] NOMAN, ERIC B. (1986) Are the fundamental constants really constant?. American *Journal of Physics,* **54**(4): 317-321.

[10] WEINBERG, S. (1972) *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity.* New York: John Wiley & Sons.

[11] BAPTISTA, J.P. e FERRACIOLI, L. (2000) A Construção do Princípio de Inércia e do Conceito de Inércia Material. *Rev. Bras. de Ens. de Física,* São Paulo, **22**(2): 272-280.

[12] McVITTIE, G.C. (1978) Newtonian Cosmology with a time-varying Constant of Gravitation. *Montly Notices of Royal Astronomical Society,* London, **183**:749.

[13] BAPTISTA, J.P., BATISTA, A.B. e FABRIS, J.C. (1984) Gravitational Instability in Newtonian Cosmology with Varying G. *Rev. Bras. de Física,* São Paulo, **14**(2): 208-220.

[14] HARRISON, E.R. (2000) *Cosmology the Science of the Universe.* Cambridge, UK: Cambridge University Press.