

Um Paradoxo Instrutivo

(An instructive paradox)

Eduardo Rino Alberto Segre, Manuel Fernando Ferreira da Silva

*Departamento de Física, Universidade da Beira Interior,
6200 Covilhã, Portugal*

Recebido em 10 de junho, 1999

É apresentado e resolvido um paradoxo hidrostático, tendo em mente um propósito didático.

I Introdução

A Fig. 1 representa esquematicamente um reservatório de água na parede do qual foi adaptada uma roda cilíndrica, de tal forma que ela pode girar em torno do seu eixo horizontal (que passa por O); as intersecções em A e B são de espessura desprezável, apenas suficiente para não haver contacto e não permitindo que a água passe através delas. O paradoxo é descrito a seguir.

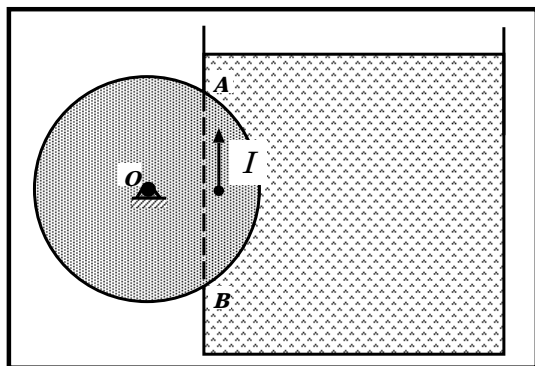


Figura 1. Esquema geral do dispositivo.

De acordo com o princípio de Arquimedes, a roda estaria submetida, em primeira análise, a uma impulsão vertical \vec{I} de magnitude igual ao peso do líquido deslocado. Esta impulsão, atuando para cima, estaria aplicada no centro de gravidade da massa de água deslocada.

Resulta claro que esta força daria origem a um momento não nulo em relação ao eixo, pelo que esta montagem poderia ser usada para produzir trabalho sem qualquer gasto de energia.

No que se segue, este paradoxo é resolvido, com objectivos didáticos.

II Análise

Percebemos de imediato que qualquer coisa deve estar errada no raciocínio anterior, já que as forças de pressão exercidas pela água são normais à superfície da roda; elas não podem exercer qualquer momento de rotação relativamente ao eixo, já que as suas linhas de ação intersectam-no. Mas então, o que é que está errado na aplicação do princípio de Arquimedes? E o que aconteceria se a roda fosse deformada, de forma que as linhas de ação das forças de pressão já não intersectassem o eixo?

Analisemos a situação em detalhe. Sobre a roda, além do seu peso \vec{P} e das forças horizontal (\vec{R}_h) e vertical (\vec{R}_v) aplicadas pelo eixo, restam apenas as forças de pressão produzidas pela água (por simetria, a pressão atmosférica não dá origem a qualquer força resultante). As forças de pressão da massa líquida são, portanto, as únicas que poderiam produzir momentos em relação ao eixo da roda.

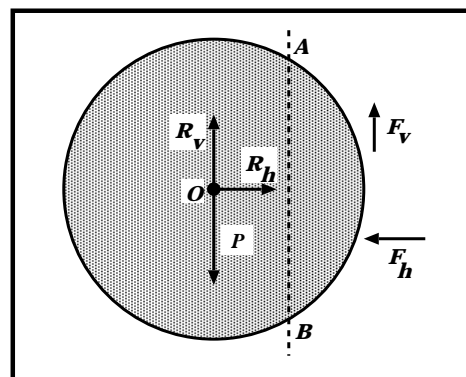


Figura 2. Diagrama das forças aplicadas à roda.

É evidente a partir da Fig. 1 que todas as forças de pressão têm uma componente horizontal que aponta para a esquerda, e uma componente vertical que aponta para cima ou para baixo. Por simetria, e dado que a

pressão aumenta com a profundidade, a força resultante de pressão terá uma componente horizontal \vec{F}_h (para a esquerda) e uma componente vertical \vec{F}_v (para cima), como se mostra na Fig. 2. Os pontos de aplicação destas forças são, por enquanto, desconhecidos.

A componente vertical será (provavelmente) a impulsão referida no princípio de Arquimedes, mas a componente horizontal (que o princípio de Arquimedes não menciona) não pode ser ignorada nesta situação.

O nosso objectivo é verificar que o momento resultante de \vec{F}_h e \vec{F}_v em relação a O é nulo.

III Cálculo

Não vale a pena levar em conta o líquido acima do nível A ; o efeito dessa porção de líquido é apenas o de adicionar um valor constante à pressão em todos os pontos da superfície da roda, tornando os cálculos menos transparentes. Para simplificar a álgebra, podemos também fazer que o peso específico μg do fluido seja igual a 1, o que equivale a medir o seu peso em unidades de volume.

A geometria do problema está representada na Fig. 3, onde se mostra apenas a parte da roda que está imersa.

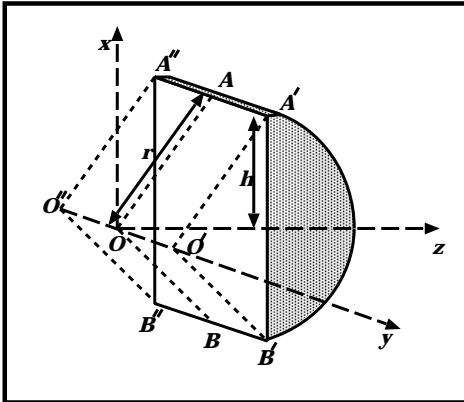


Figura 3. Geometria da porção imersa da roda.

A base é o rectângulo $A'A''B''B'$, o eixo da roda é $O'O''$ e OAB define o plano vertical de simetria do sistema. Introdzuem-se o eixo vertical x (paralela a BA que passa por O) e os dois eixos horizontais y e z , sendo este último o eixo de simetria que passa por O . Sejam \hat{i} , \hat{j} , \hat{k} os versores usuais ao longo de x , y e z , respectivamente. Seja h metade do comprimento do lado AB

do rectângulo, cuja largura ($\overline{A'A''}$) pode ser escolhida como igual a 1. Seja $r = \overline{OA}$ o raio da roda.

Começamos por calcular a componente vertical F_v da força resultante de pressão que a água exerce sobre a roda. Introdzindo a coordenada θ (ver Fig. 4), temos que a pressão num ponto genérico P será $p = h - x$ nas nossas unidades. O elemento de área será $dS = r d\theta$. Logo, a componente diferencial vertical da força será

$$dF_v = -pdS \sin \theta = -(h - r \sin \theta)r \sin \theta d\theta,$$

que deve ser integrada entre $-\theta_0$ e $+\theta_0$, onde $\theta_0 = \arcsin(h/r)$. Um cálculo direto fornece

$$\vec{F}_v = r^2(\theta_0 - \sin \theta_0 \cos \theta_0)\hat{i} = (r^2\theta_0 - rh \cos \theta_0)\hat{i}. \quad (1)$$

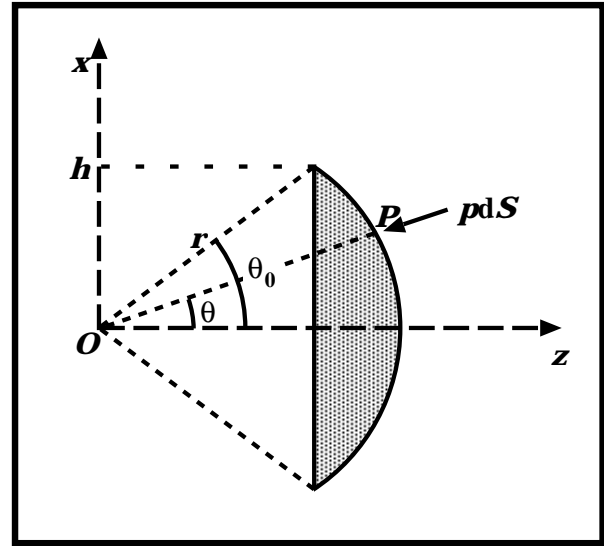


Figura 4. Coordenadas usadas nos cálculos.

$r^2\theta_0$ é o volume do “sector cilíndrico” $O'A'B'O''A''B''$ de raio r e ângulo central $2\theta_0$; $rh \cos \theta_0$ é o volume do prisma $A''A'B''B''O''O'$ (recorde-se que a dimensão transversal tem comprimento unitário). Assim, \vec{F}_v é, como era de se esperar, igual ao peso da água deslocada, nas nossas unidades.

O ponto de aplicação desta força de impulsão vertical F_v pode ser determinado somando todos os momentos elementares relativamente ao eixo $O'O''$:

$$\vec{\tau}_v = \int (-pdS \sin \theta)r \cos \theta \hat{j} = - \int_{-\theta_0}^{\theta_0} (h - r \sin \theta)r^2 \sin \theta \cos \theta d\theta \hat{j} \quad (2)$$

$$= 2r^3 \int_0^{\theta_0} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta \hat{j} = \frac{2}{3}h^3 \hat{j}. \quad (3)$$

O ponto de aplicação de F_v terá então como coordenada z_v o quociente entre τ_v e F_v :

$$z_v = \frac{2h^3}{3(r^2\theta_0 - rh \cos \theta_0)}, \quad (4)$$

que é a coordenada z do centro de massa do líquido deslocado, como é fácil comprovar.

Calculemos agora a componente horizontal \vec{F}_h das forças de pressão. Temos

$$\vec{F}_h = \int (-pdS \cos \theta) \hat{k} = - \int_{-\theta_0}^{\theta_0} (h - r \sin \theta) r \cos \theta d\theta \hat{k} \quad (5)$$

$$= -2hr \int_0^{\theta_0} \cos \theta d\theta \hat{k} = -2h^2 \hat{k}. \quad (6)$$

Para obter o ponto de aplicação desta força \vec{F}_h , seguimos um procedimento similar àquele que conduziu às equações (3) e (4) anteriores. Calculamos primeiro o momento total produzido pelas componentes horizontais individuais das forças de pressão, em relação ao eixo $O'O''$:

$$\vec{\tau}_h = \int (-pdS \cos \theta) r \sin \theta (-\hat{j}) = -\frac{2}{3} h^3 \hat{j}, \quad (7)$$

e agora a coordenada x_h do ponto de aplicação desta força:

$$x_h = -\frac{h}{3}. \quad (8)$$

Note que, de acordo com as equações (3) e (7), $\vec{\tau}_v + \vec{\tau}_h = \vec{0}$. A condição de equilíbrio é pois verificada.

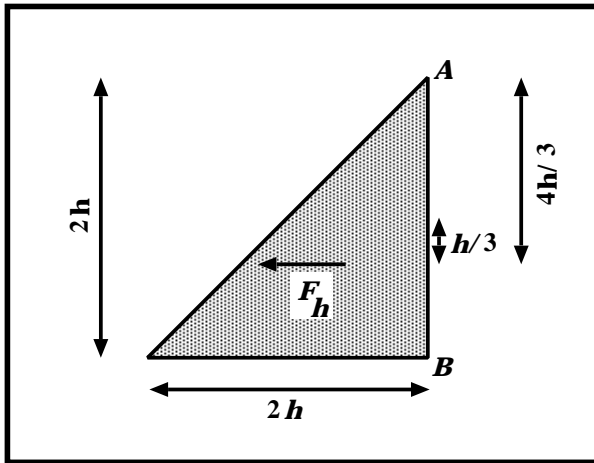


Figura 5. Análise da componente horizontal das forças de pressão.

Como era de esperar, os resultados (6) e (8) representam, respectivamente, o peso do prisma equilátero mostrado na Fig. 5, ou seja, $\frac{1}{2}(2h)(2h)$ nas nossas

unidades, e a coordenada x do centro de massa desse prisma.

Resumindo, calculamos (no espírito do princípio de Arquimedes), as forças aplicadas pelo resto do líquido sobre a “lente” de água deslocada pela roda. O equilíbrio desta “lente” de água está esquematizado na Fig. 6.

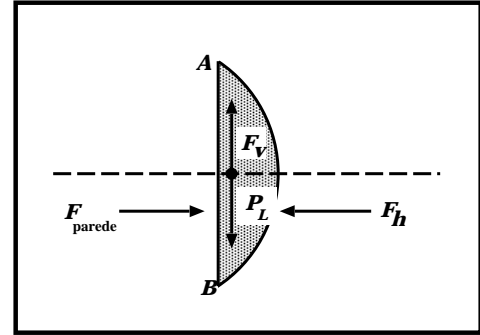


Figura 6. Diagrama das forças aplicadas à “lente” de água.

IV Outros exemplos

Este tipo de cálculos pode ser generalizado ao caso de uma “lente” líquida de forma arbitrária. Suponhamos, por exemplo, que a superfície da lente é gerada pela rotação de uma curva arbitrária em torno do eixo horizontal z , como na Fig. 7.

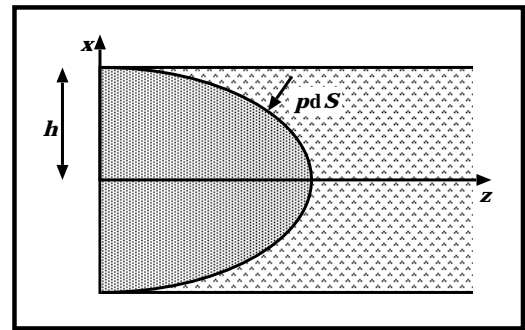


Figura 7. Geometria de uma “lente” líquida de revolução.

A equação da superfície é $z = z(\rho)$ no sistema de coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z) . O elemento diferencial de área da superfície vem dado pelo vector

$$d\vec{S} = \hat{n}dS = (\hat{k} - z'\hat{\rho})\rho d\rho d\varphi \quad \left(z' \equiv \frac{dz}{d\rho} < 0\right). \quad (9)$$

que aponta para o exterior da “lente”.

A força de pressão exercida pelo líquido é agora

$$\vec{F} = \int -pd\vec{S} = \int (\rho \cos \varphi - h)(\hat{k} - z'\hat{\rho})\rho d\rho d\varphi \quad (10)$$

$$= -2\pi h \hat{k} \int_0^h \rho d\rho - \int \rho^2 \cos \varphi z' (\cos \varphi \hat{i} + \sin \varphi \hat{j}) d\rho d\varphi \quad (11)$$

$$= -\pi h^3 \hat{k} - \pi \int_0^h \rho^2 \frac{dz}{d\rho} d\rho \hat{i}. \quad (12)$$

Integrando por partes, e levando em conta que $z(h) = 0$, obtemos:

$$\vec{F} = -\pi h^3 \hat{k} + 2\pi \int_0^h \rho z(\rho) d\rho \hat{i}. \quad (13)$$

A componente z desta força anula exatamente a força devida à parede, que é agora exercida sobre um disco de raio h (ver Fig. 8).

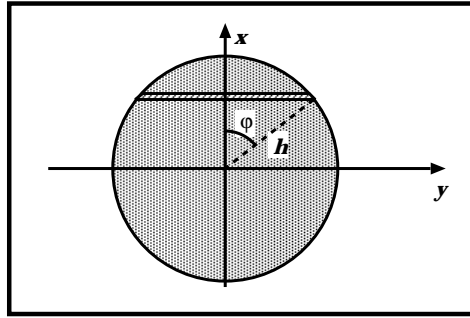


Figura 8. Visão frontal da base da “lente”.

Efetivamente, cada fatia estreita do disco, de espessura dx e comprimento $2h \sin \varphi$, está submetida a uma força horizontal aplicada pela parede

$$dF_{\text{parede}} = p(2h \sin \varphi) dx = (h - x) 2h \sin \varphi dx = -2h^3 (1 - \cos \varphi) \sin^2 \varphi d\varphi, \quad (14)$$

expressão que pode ser integrada entre 0 e π para dar

$$\vec{F}_{\text{parede}} = \pi h^3 \hat{k}. \quad (15)$$

Pode-se mostrar facilmente, usando métodos similares aos empregados anteriormente, que o ponto de aplicação desta força tem coordenadas

$$x_p = -\frac{h}{4}, \quad y = 0, \quad z = 0. \quad (16)$$

A componente x da força \vec{F} (ver equação (13)) compensa exatamente o peso da “lente” de água:

$$P_L = \int dV(-\hat{i}) = - \int \rho d\rho d\varphi dz \hat{i} = - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h \rho d\rho \int_0^{z(\rho)} dz \hat{i} \quad (17)$$

$$= -2\pi \int_0^h \rho z(\rho) d\rho \hat{i}. \quad (18)$$

Resta apenas verificar agora o equilíbrio dos momentos aplicados sobre a “lente” de água. Como uma alternativa ao método usado na Sec. III, podemos aqui somar todas as contribuições das forças de pressão apli-

cadas nos pontos P da superfície, para ρ fixo. Como se ilustra na Fig. 9, cada uma destas contribuições pode ser considerada aplicada num ponto bem definido C , de coordenada z_C , onde todas as normais aos elementos de

superfície intersectam o eixo z .

Partindo da condição $\vec{C}\vec{P} \times \hat{n} = \vec{0}$, em que \hat{n} é paralelo a $\hat{k} - z'\hat{\rho}$ (ver equação (9)), resulta

$$z_C = z + \frac{\rho}{z'}. \quad (19)$$

Por outro lado, a componente vertical da resultante des-

tas forças será, de acordo com a equação (12),

$$d\vec{F}_x = -\pi\rho^2 z' d\rho \hat{i}. \quad (20)$$

Somemos agora todos os momentos elementares que estas forças exercem em relação ao eixo y :

$$\vec{\tau}_y = \int z_C dF_x \hat{j} = -\pi \int_0^h \left(z + \frac{\rho}{z'}\right) \rho^2 z' d\rho \hat{j} \quad (21)$$

$$= -\pi \left(\int_0^h \rho^2 z z' d\rho + \int_0^h \rho^3 d\rho \right) \hat{j} = -\pi \left(\frac{h^4}{4} - \int_0^{z^{(0)}} \rho^2 z dz \right) \hat{j}, \quad (22)$$

após fazer uma mudança na variável de integração.

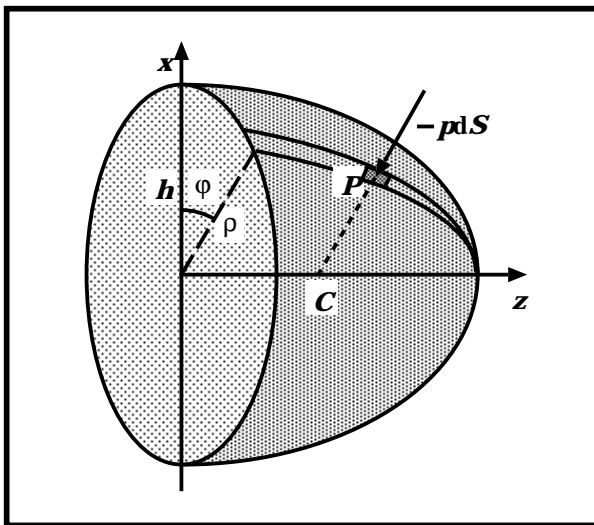


Figura 9. Perspectiva da “lente” de água.

Isto anula exatamente os momentos restantes. Com efeito, o primeiro termo na equação (22) compensa o momento produzido pela força exercida pela parede (ver equações (15) e (16)). E, se dividirmos a “lente” de água em fatias de espessura dz e raio ρ , o segundo termo compensa os momentos devido ao peso das fatias elementares (lembre que $\mu g = 1$):

$$\pi \int_0^{z^{(0)}} \rho^2 z dz = \int_0^{z^{(0)}} z(\pi\rho^2) dz. \quad (23)$$

V Conclusões

Do estudo efetuado anteriormente, cabe tirar uma conclusão simples: o princípio de Arquimedes não deve

ser aplicado de uma forma ligeira, como por vezes se faz. É importante perceber muito bem o significado do princípio. Um enunciado típico é o seguinte:

Um corpo imerso (total ou parcialmente) num fluido fica submetido a uma força vertical chamada impulsão. Esta força tem uma magnitude igual ao peso do fluido deslocado pelo corpo, aponta para cima, e actua no centro de gravidade do fluido deslocado.

Por que é que, no nosso problema, não podemos usar este princípio? A resposta tem a ver com o significado da palavra “imerso” ou, mais especificamente, “parcialmente imerso”.

Deve ser entendido que um corpo está parcialmente imerso num fluido quando a superfície que separa as partes imersa e emersa é a superfície livre do fluido, ou seja, a horizontal. Quando isto acontece, o volume de fluido deslocado pelo corpo estava previamente em equilíbrio estático sob a acção do seu peso e das forças de pressão do fluido circundante. É possível então substituir as forças de pressão pelo peso do fluido deslocado (invertendo apenas o sentido). No nosso problema, a superfície que separava as partes submersa e exposta da roda não era a superfície livre da água. A porção de água deslocada encontrava-se previamente em equilíbrio estático, mas esse equilíbrio resultava não apenas do seu peso e das forças de pressão da água restante: havia mais uma força, a força exercida pela parede vertical do reservatório.

Caso o leitor deseje usar o conteúdo deste artigo com os seus alunos, poderá também propor-lhes, adicionalmente, o seguinte problema, cujo objectivo é clarificar o significado da palavra “imerso”: Um objecto (Figs. 10A ou 10B) encontra-se em repouso, em contacto directo com o fundo do mar. Suponha que o objecto (o Titanic, por exemplo) vai ser levantado lentamente do fundo mediante um cabo (Fig. 10C). Faça um gráfico da tensão T durante o processo.

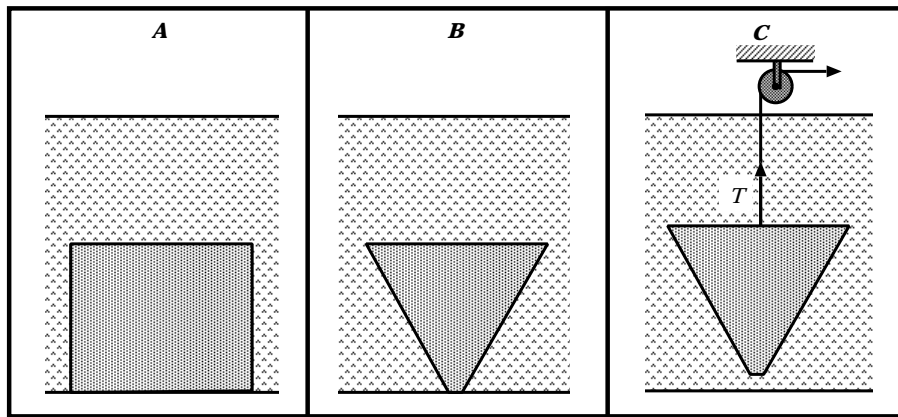


Figura 10. Esclarecendo o significado da palavra “imerso”.

Convém notar que, durante o processo de levantamento, a tensão do cabo sofre uma descontinuidade no instante em que o objecto deixa de estar em contacto com o fundo. O leitor poderá verificar que essa “queda de tensão” instantânea no cabo corresponde ao peso de uma coluna líquida com a mesma base horizontal

do objecto e altura igual à profundidade dessa base. Pretende-se assim esclarecer que o princípio de Arquimedes apenas poderá ser usado a partir do momento em que o objecto deixa efectivamente de estar em contacto com o fundo. Só então pode-se dizer que ele está “imerso”.