

A Teoria de Renormalização no Cálculo dos Potenciais Escalar Elétrico e Vetorial Magnético

(Renormalization theory in the electrostatic and vector potential calculation)

Wesley Spalenza e José Alexandre Nogueiras

Departamento de Física, Centro de Ciências Exatas,

Universidade Federal do Espírito Santo,

29.060-900 - Vitória-ES - Brasil,

E-mail:nogueira@cce.ufes.br

Recebido em 14 de junho, 1999

Neste trabalho tentamos mostrar de uma maneira clara e simples as idéias fundamentais da Teoria de Renormalização. Neste intuito usamos dois problemas bem conhecidos dos alunos de graduação de Ciências Exatas, os cálculos do potencial elétrico escalar e magnético vetorial de um fio infinito de carga e corrente elétrica, respectivamente. Diferentes métodos de regularização (por corte, dimensional e função zeta) são usados e o aparecimento do parâmetro de escala é discutido.

In this work we attempt to show, in a clear and simple manner, the fundamental ideas of the Renormalization Theory. For this purpose, we use two well-known problems of Physics undergraduate students, the calculation of the electrostatic and vector potential of a infinite line charge density and current, respectively. We still employ different regularization methods (cut-off, dimensional and zeta function) and the existence of the scale parameter is discussed.

I Introdução

Nos dias atuais a Teoria Quântica de Campos é largamente empregada em diversas áreas da física, tais como, Física de Altas Energias, Mecânica Estatística, Matéria Condensada, etc. Como a Teoria Quântica de Campos lida fundamentalmente de aspectos perturbativos, ela sofre de graves problemas de divergências. O tratamento destas divergências têm sido um enorme desafio para os físicos. A natureza matemática do problema é bem conhecida. Divergências ocorrem nos cálculos perturbativos porque duas distribuições não podem ser multiplicadas em um mesmo ponto. Vários métodos tem sido propostos para solucionar este problema. Entretanto somente é possível eliminar estes infinitos de uma maneira física e consistente para absorvê-los nos parâmetros livres da teoria (massa e constante de acoplamento).

O procedimento usual para sanar o problema das divergências é empregar um método de regularização (por corte, dimensional, zeta, etc.), tornando a teoria finita através do uso de um regulador (parâmetro de regularização) a fim de isolar as divergências e, então, restabelecer a teoria original com a eliminação do regu-

lador usando uma prescrição de renormalização, subtração dos pólos ou adição de contra-termos.

De maneira geral o entendimento do procedimento de renormalização empregado fica prejudicado devido à complexidade da Teoria Quântica de Campos. A fim de contornar esta dificuldade, vamos tratar aqui de dois problemas simples e bem conhecidos por qualquer aluno de graduação em Física e possivelmente dos demais cursos da área de Ciências Exatas.

Os problemas aos quais nos referimos é o da determinação do potencial escalar elétrico e do potencial vetor magnético de um fio infinito de carga e de corrente, respectivamente. Tais problemas, de um modo geral, parecem ambíguos para os alunos, pois escondido neles existe um procedimento de renormalização, como apontou Hans em seu artigo [1]. Uma maneira encontrada para se evitar diretamente as divergências nos cálculos dos potenciais, é primeiramente determinar os campos elétrico e magnético e em seguida calcular os potenciais elétrico escalar e magnético vetorial do fio infinito.

O artigo está organizado com segue. Na seção II tratamos do cálculo do potencial elétrico de um fio infinito com densidade linear de carga λ e do potencial magnético de um fio infinito de corrente constante, que

nos conduzirá a uma integral divergente. Nas seções III, IV e V nós regularizamos a integral divergente obtida na seção anterior usando os métodos, por corte [3], dimensional [4] e função zeta [5] respectivamente. Na seção VI usando as prescrições de renormalização, determinamos os potenciais renormalizados, discutimos o parâmetro de escala e apresentamos as idéias básicas da teoria de Renormalização em Teoria Quântica de Campos.

II Potencial Escalar Elétrico e Potencial Vetor Magnético

O potencial elétrico $\Phi(\vec{r})$ gerado por um fio infinito com densidade linear de carga λ em um ponto qualquer do espaço exceto no fio é dado por [2-3]

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{z^2 + \rho^2}}, \quad (1)$$

onde temos colocado o fio sobre o eixo z e ρ é a distância do ponto ao fio, coordenada radial cilíndrica.

O potencial magnético $\vec{A}(\vec{r})$ produzido por um fio infinito de corrente elétrica constante i , é dado por [3]

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} \hat{k}, \quad (2)$$

onde temos usando a mesma geometria anterior.

Uma análise dimensional da integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{z^2 + \rho^2}}, \quad (3)$$

que aparece nas equações dos potenciais, mostra que ela é dimensional e portanto sofre de uma divergência logarítmica.

Assim, vemos que para estes dois problemas simples devemos empregar um procedimento de renormalização a fim de obtermos os potenciais renormalizados, isto é, “observados” (a diferença de potencial entre dois pontos, pois ele é uma grandeza relativa e não absoluta).

A fim de tornar a teoria finita e assim manuseável, devemos empregar um método de regularização. Isto vai nos permitir separar a parte finita da divergente. Porém, a teoria fica dependente de um parâmetro de regularização e uma prescrição de renormalização deverá ser empregada para restabelecermos a teoria original. Vamos utilizar diferentes métodos de regularização e mostrar que, embora cada um forneça um resultado diferente, a teoria final, isto é, renormalizada (física) é independente do método de regularização usado.

III Regularização por Corte

Esse método de regularização se baseia no emprego de um corte nos limites da integral, isto é, trocamos o

limite infinito por um valor finito Λ (parâmetro regularizador).

Com a inclusão do corte tornamos a teoria finita, porém dependente de Λ . Portanto, para restabelecermos a teoria original, devemos ao final tomar o limite com Λ tendendo a infinito.

Na integral da eq.(3) vamos introduzir um corte

$$I_\Lambda = \int_0^\Lambda \frac{dz}{\sqrt{z^2 + \rho^2}}. \quad (4)$$

Uma vez que tomaremos o limite, é conveniente obtermos o resultado da integral da eq.(4) em potências de Λ e de $\frac{1}{\Lambda}$ de forma a permitir a separação do(s) pólo(s) da parte finita. Vamos dividir a integral da eq.(4) em duas partes

$$I_\Lambda = \int_0^\rho \frac{dz}{\rho\sqrt{\frac{z^2}{\rho^2} + 1}} + \int_\rho^\Lambda \frac{dz}{z\sqrt{\frac{\rho^2}{z^2} + 1}}, \quad (5)$$

para considerarmos os casos em que $z < \rho$ e $z > \rho$. Realizando as expansões em série de Taylor dos integrandos da eq. (5) e depois integrando termo a termo obtemos

$$I_\Lambda = C + \ln\left(\frac{\Lambda}{\rho}\right) + O\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right), \quad (6)$$

onde C é uma constante.

Podemos observar que quando tentamos restabelecer a teoria original, ou seja, tomamos o limite de Λ tendendo a infinito, presenciamos uma divergência logarítmica, como já esperávamos.

IV Regularização Dimensional

Este método de regularização consiste em modificar a dimensão da integral através de uma continuação analítica de forma a torná-la finita. Consegue-se isto trocando a dimensão do diferenciando por uma outra complexa, através da inclusão de um parâmetro regularizador complexo, ω

$$I(\rho, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^{1-\omega} z}{\sqrt{z^2 + \rho^2}}. \quad (7)$$

A integral (7) agora é finita e pode ser realizada usando a relação [4]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(k^2 + a^2\right)^{-\alpha} d^m k = \pi^{\frac{m}{2}} \frac{(\alpha - \frac{m}{2})}{(\alpha)} \left(a^2\right)^{\frac{m}{2} - \alpha}, \quad (8)$$

obtendo

$$I(\rho, \omega) = \pi^{-\frac{\omega}{2}}, \left(\frac{\omega}{2}\right) (\rho)^{-\omega}. \quad (9)$$

Para separarmos a parte finita da divergente quando ω vai a zero, vamos fazer uma expansão em potências de ω da eq.(9), para isto usamos para $|\omega| \ll 1$ as seguintes relações

$$\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{2}{\omega} - \gamma + O(\omega), \quad (10)$$

e

$$\rho^{-\omega} = 1 - \frac{\omega}{2} \ln(\rho^2) + O(\omega^2), \quad (11)$$

onde γ é o número de Euler. Então temos

$$I(\rho, \omega) = \pi^{-\frac{\omega}{2}} \left[\frac{2}{\omega} - \gamma - \ln\left(\frac{\rho^2}{\mu^2}\right) + O(\omega) \right], \quad (12)$$

onde temos incluído um parâmetro de escala μ com dimensão de comprimento, a fim de tornar o argumento do logaritmo adimensional.

V Regularização por Função Zeta

A função zeta generalizada associada a um operador M é definida como

$$\zeta_M(s) = \sum_i \lambda_i^{-s}, \quad (13)$$

onde λ_i , são os auto-valores do operador M e s um parâmetro complexo.

Definimos, para o nosso caso, a função zeta como

$$\zeta(s + 1/2) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{z^2}{\mu^2} + \frac{\rho^2}{\mu^2} \right)^{-s-1/2} d\left(\frac{z}{\mu}\right) \quad (14)$$

e a integral (3) torna-se

$$I(\rho, s) = \zeta(s + 1/2). \quad (15)$$

O parâmetro de escala μ , com dimensão de comprimento, foi incluído para tornar a função zeta adimensional para todo s .

Usando a relação (8) obtemos

$$\zeta(s + 1/2) = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s + 1/2)} \left(\frac{\rho^2}{\mu^2}\right)^{-s} \quad (16)$$

que com a aproximação

$$2\sqrt{\pi} \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s - 1/2)} \approx -\frac{1}{s}, \quad (17)$$

para $|s| \ll 1$, conduz a

$$\zeta(s + 1/2) = -\frac{\left(\frac{\rho^2}{\mu^2}\right)^{-s}}{2s(s - 1/2)}. \quad (18)$$

A continuação analítica para s igual a zero da eq.(18) é obtida multiplicando a equação por s e em seguida derivando em $s = 0$ [5]. Assim

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{\rho}{\mu}\right), \quad (19)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \hat{k} - \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln\left(\frac{\rho}{\mu}\right) \hat{k}. \quad (20)$$

VI Condições de Renormalização

Como podemos observar os potenciais obtidos através dos resultados dados pelas eq.(6) e (12) são ainda divergentes. Portanto, devemos lançar mão de uma prescrição de renormalização a fim de eliminar a parte divergente (pólo).

Como prescrição de renormalização, usaremos a condição física de que os potenciais não são grandezas absolutas e sim relativas, isto é, somente diferenças de potenciais podem ser observadas. Assim, usando as eq.(6) e (12) obtemos

$$\Phi(\vec{r}) - \Phi(\vec{r}_0) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{\rho}{\rho}\right) \quad (21)$$

e

$$\vec{A}(\vec{r}) - \vec{A}(\vec{r}_0) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) \hat{k} \quad (22)$$

Agora tomando o potencial nulo no ponto de referência \vec{r}_0 , temos

$$\Phi_R(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) \quad (23)$$

e

$$\vec{A}_R(\vec{r}) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) \hat{k}. \quad (24)$$

Note que o ponto de referência \vec{r}_0 é completamente arbitrário.

Embora os resultados obtidos nas eq.(19) e (20) sejam finitos, eles ainda não representam os resultados físicos, pois não sabemos se o que retiramos da parte divergente foi mais que o necessário. Uma renormalização finita deve ser realizada para que os potenciais obtidos sejam aqueles que representem a física do problema.

Novamente usando a diferença de potencial como condição de renormalização, obtemos, das eq.(19) e (20), os mesmos resultados obtidos nas eq.(23) e (24).

É importante comentarmos a presença do parâmetro de escala μ nas eq.(12), (19) e (20).

A prescrição de renormalização usada aqui fornece imediatamente o resultado físico, isto é, o potencial no ponto \vec{r} medido em relação aquele medido no ponto de referência \vec{r}_0 . Se desejássemos como primeira etapa obter um resultado finito para as eq.(6) e (12) poderíamos usar como prescrição a subtração do termo divergente (pólo). A fim de separarmos a parte divergente da finita na eq.(6), devemos multiplicar e dividir o argumento do logaritmo por um parâmetro arbitrário finito, o parâmetro de escala μ .

$$I(\rho, \mu, \Lambda) = C + \left[\ln\left(\frac{\rho}{\mu}\right) - \ln\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) \right] + O\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right). \quad (25)$$

Agora usando como prescrição a subtração do pólo, obtemos, para a regularização, por corte

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{\rho}{\mu}\right) + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} C, \quad (26)$$

e para regularização adimensional

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{\rho}{\mu}\right) + \frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0}. \quad (27)$$

Então, notamos que no caso da regularização dimensional e zeta, esta separação já foi realizada de alguma forma escondida dentro dos procedimentos usados.

Uma maneira mais elegante e formal de introduzirmos o parâmetro de escala é fazendo com que a integral inicial (3) seja adimensional, isto é,

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\left(\frac{z}{\mu}\right)}{\sqrt{\frac{z^2}{\mu^2} + \frac{\rho^2}{\mu^2}}}. \quad (28)$$

E desta forma tornamos a eq.(7) adimensional para qualquer ω .

É claro que a continuação analítica usada no método da função zeta é a prescrição de renormalização necessária para se obter o resultado finito e é equivalente à subtração do pólo. Isso fica claro se tivéssemos realizado a expansão em série de Laurent da eq.(18),

$$I(\rho, s) = \frac{a_{-1}}{s} + \ln\left(\frac{\rho}{\mu}\right) + O(s), \quad (29)$$

onde a_{-1} é o resíduo.

Note que os resultados das eq.(19),(26) e (27) diferem por uma constante e são dependentes do parâmetro de escala. Como já dissemos, embora os resultados destas equações sejam finitos eles ainda não representam a física da teoria. Isto é obvio, pois, não podemos ter os

resultados físicos (observados) dependentes do método de regularização. Uma renormalização finita deve ser feita para ajustar os potenciais obtidos àqueles observados (diferenças). Esta condição de renormalização nos permite escrever os potenciais em função daqueles observados em um determinado ponto. Ela também permite que o parâmetro de escala seja escrito em função do ponto de referência ρ_0 . É claro que o ponto de referência é arbitrário e portanto também o parâmetro de escala.

Agora estamos aptos a sintetizar como funciona a renormalização. Os potenciais dados pelas eq.(6), (12) e (19), não são aqueles físicos (observáveis) sendo até mesmo divergentes. Para torná-los aqueles observados devemos ajustá-los. Assim, medimos (na verdade aqui definimos um valor qualquer, em geral zero) o potencial em um ponto de referencial qualquer \vec{r}_0 que no caso da Teoria Quântica de Campos é chamado ponto de renormalização ou subtração. Por fim escrevemos o potencial físico (observado) como função daquele medido no ponto de referência (ponto de renormalização). Este procedimento então absorve a divergência do potencial original não físico.

Em resumo:

i) Potencial original não físico

$$\Phi_d(\vec{r}) = D + C + \Phi_F(\vec{r}), \quad (30)$$

onde D é o termo divergente separado por um método qualquer de regularização, e C é uma constante que depende do método de regularização e $\Phi_F(\vec{r})$ é o potencial.

ii) Potencial medido no ponto de referência (renormalização)

$$\Phi_0 = D + C + \Phi_F(\vec{r}_0). \quad (31)$$

Neste caso para Φ_0 é determinado um valor arbitrário e não realmente medido.

Agora escrevemos

$$D + C = \Phi_0 - \Phi_F(\vec{r}_0), \quad (32)$$

e substituindo na eq.(30), fica

$$\Phi_R(\vec{r}) = \Phi(\vec{r}) - \Phi(\vec{r}_0) + \Phi_0, \quad (33)$$

onde $\Phi_R(\vec{r})$ é o potencial renormalizado.

Note que mesmo no caso de um método de regularização que forneça um resultado finito, ainda temos de ajustar este resultado àquele físico.

Finalmente, podemos analisar como funciona a renormalização na Teoria Quântica de Campos. A teoria original depende de alguns parâmetros em geral divergentes, tais como m e λ . Tais parâmetros não representam a massa (m) e a constante de acoplamento λ observados da teoria e sim são ajustados através das condições de renormalização a estas quantidades físicas renormalizadas, medidas em caso de teorias realistas,

ou definidas no caso de teorias não realistas, em um determinado ponto, chamado ponto de renormalização ou subtração. Este ponto, pode ser o quadri-momento da teoria ou um determinado estado do sistema, em geral o de menor energia, ou estado de vácuo, embora qualquer ponto seja tão bom quanto outro. Ou seja, o ponto de renormalização é arbitrário.

Escrevendo agora a teoria original em função não mais dos parâmetros originais m e λ e sim das quantidades físicas renormalizadas (“observadas”) m_R e λ_R , as divergências são absorvidas de forma semelhante ao que ocorreu com o potencial.

Uma maneira alternativa usada é tomar os parâmetros m e λ da teoria original como sendo realmente aqueles observados (renormalizados) e absorver as divergências da teoria em contra-termos δm e $\delta \lambda$ incluídos na teoria. Tais contra-termos, é claro, devem conter termos de mesma potência nos campos que aqueles de m e λ . Então, usando as condições de renormalização os contra-termos são determinados de forma a anular as divergências e fornecer a física da teoria.

VII Conclusão

Através de um exemplo simples do cálculo dos potenciais escalar e vetorial de um fio infinito de carga e de corrente, respectivamente, podemos apresentar as divergências que sofrem algumas teorias, os métodos usados para lidar com estas divergências (separá-los da parte finita) e o procedimento usado para transformar tais teorias em teorias físicas (renormalização).

References

- [1] M. Hans, Am. J. Phys., **51**(8), 694 (1983).
- [2] D. Halliday and R. Resnick, *Física, Livros Técnicos e Científicos*, Rio de Janeiro (1984)
- [3] J. R. Reitz, F. J. Milford and R. W. Christy, *Fundamentos da Teoria Eletromagnética*, Editora Campus, Rio de Janeiro (1982).
- [4] E. Myers, Phys. Rev. Lett. **54**, 165 (1987).
- [5] A. Salam and J. Strathdee, Nucl. Phys. **B90**, 203 (1975).