

# O Pêndulo Bifilar e as Figuras de Lissajous

(The two-wires pendulum and the Lissajous Figures)

Alexandre Marletta, João V. B. Ferreira e Francisco E. G. Guimarães

*Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, CP 369,  
CEP 13560-970, São Carlos - SP, Brasil, e-mail: marletta@if.sc.usp.br.*

Recebido em 03 de outubro, 1999. Manuscrito revisado recebido em 24 de julho 2000. // Aceito em 05 de outubro, 2000.

A superposição de movimentos harmônicos é encontrada em vários sistemas físicos, podendo ser estudada através das figuras de Lissajous. Geralmente estas figuras são apresentadas em experimentos utilizando osciloscópios no curso de Mecânica Clássica. Neste trabalho apresentamos uma montagem alternativa para o estudo da composição de movimentos harmônicos: o pêndulo bifilar.

Many physical systems exhibiting the superposition of harmonic oscillations can be investigated using the Lissajous figures. Usually, this concept is presented to the undergraduate students when attending the course of Classical Mechanics by the use of oscilloscope. In this work we present an alternative procedure to analyze the superposition harmonic oscillations: the two-wires pendulum.

## I Introdução

Em 1857 o físico francês Jules Antoine Lissajous apresentou um aparelho mecânico denominado harmonografo [1], cuja função era gerar harmonogramas: figuras que resultavam da superposição de dois movimentos harmônicos perpendiculares. Através de ajustes no aparelho, geravam-se curvas suaves com diferentes formas. O dispositivo e as figuras produzidas fizeram sucesso e outros pesquisadores criaram diferentes aparelhos mecânicos que desenhavam harmonogramas com os mais variados padrões como o da Fig. 1. Esses aparelhos chegavam a ser bastante sofisticados, mas sempre se baseavam no princípio da superposição de movimentos harmônicos independentes.

Nos dias atuais essas figuras são conhecidas como figuras de Lissajous e normalmente são apresentadas aos estudantes de graduação durante os cursos de Mecânica ou Vibrações e Ondas. Usualmente, o experimento utilizado para a apresentação das figuras de Lissajous é baseado em dois geradores de sinais elétricos. As figuras são formadas variando ou a razão entre as frequências ou as condições iniciais (amplitude e fase) dos sinais elétricos aplicados aos canais de entrada horizontal e vertical de um osciloscópio[2].

Independente do sistema físico em estudo, mecânico ou elétrico, as figuras de Lissajous são obtidas através da superposição de dois movimentos harmônicos. De posse de uma dessas figuras, é possível obter informações que caracterizam o sistema físico em estudo, sem conhecimento prévio do mesmo: de forma qualitativa pode-se afirmar se os movimentos estão em fase

ou não, ou avaliar a relação entre suas frequências e suas amplitudes. Por outro lado, quantitativamente é possível calcular a diferença de fase entre os modos estudados[3].

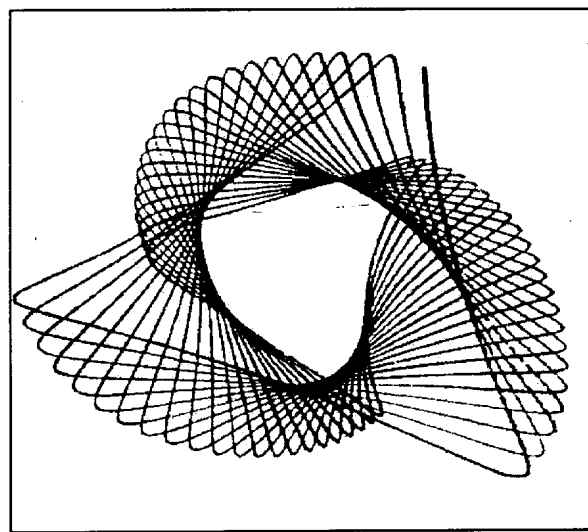


Figura 1. Exemplo de um harmonograma [1].

Neste trabalho apresentamos uma montagem mecânica alternativa e um estudo qualitativo da composição de movimentos harmônicos. O sistema utilizado é denominado de pêndulo bifilar e sua montagem está descrita na seção II. As figuras obtidas por este sistema são equivalentes às realizadas em experimentos utilizando osciloscópios e geradores elétricos durante o

curso de Mecânica Clássica, introduzindo os alunos de graduação de Física e Engenharia às Figuras de Lissajous. A utilização deste sistema demonstra o caráter geral do princípio de superposição de dois movimentos harmônicos independentes e ainda promove uma comparação com modos normais de vibração de uma corda presa pelas extremidades. As trajetórias obtidas estão descritas na seção III e a análise qualitativa dos resultados na seção IV.

## II O pêndulo bifilar

Um sistema mecânico alternativo para a superposição de dois movimentos harmônicos independentes e ortogonais é o pêndulo bifilar. Na Fig. 2 apresentamos um diagrama esquemático do pêndulo bifilar e do experimento para registrar as figuras de Lissajous. Trata-se de um corpo de massa  $m$  presa à extremidade de um fio, sendo que este fio num dado ponto é separado em dois segmentos na forma de um  $Y$  (bifurcação). O comprimento constante  $l$  é dado pela distância entre o centro de  $m$  e a bifurcação. As outras duas extremidades do fio são presas em um suporte horizontal. A distância entre o centro de  $m$  e o suporte é denominada de  $L$ , sendo variável.

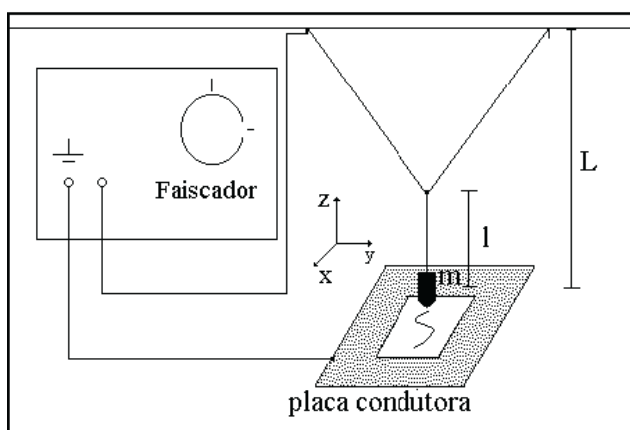


Figura 2. Diagrama do experimento com o pêndulo bifilar. A fonte gera uma tensão pulsada, cujos valores de pico são suficientes para produzir faíscas entre a massa  $m$  e a placa condutora. Colocada para oscilar, a trajetória espacial da massa  $m$  no plano  $xy$  é gravada por pontos em um papel de fax, devido às faíscas.

Se o corpo é colocado para oscilar no plano  $yz$ , observa-se que o ponto de bifurcação permanece imóvel, e o corpo oscila como se apenas fizesse parte de um pêndulo simples de comprimento  $l$  (modo de oscilação  $y$ ). Se o corpo é colocado para oscilar no plano  $xz$ , ele oscila como se fizesse parte de um pêndulo simples de comprimento  $L$  (modo de oscilação  $x$ ). Quando o corpo é colocado para oscilar fora dessas duas condições, o movimento resultante é uma combinação desses dois modos de oscilação. Como o comprimento  $L$  é ajustável, pode-se obter diferentes movimentos resultantes.

Para registrar o movimento de  $m$  no plano  $xy$  o pêndulo bifilar é montado utilizando um fio condutor capaz de suportar altas tensões. Liga-se uma das extremidades superiores a um dos terminais de um faiscador, que é um gerador de pulsos de alta tensão de frequência variável. A massa  $m$  é constituída de material condutor (latão) e sua base inferior tem forma de ponta. Assim as descargas elétricas ocorrerão preferencialmente por este ponto. Logo abaixo de  $m$ , mas sem tocá-la, é colocado um papel termo-sensível (por exemplo: papel de fax) sobre uma placa condutora (alumínio) formando o plano horizontal  $xy$ . Esta placa é conectada ao outro terminal do faiscador, formando um circuito elétrico. Colocando o corpo em movimento e ligando o gerador, faíscas saltam de  $m$  para a placa, atravessando e impressionando (queimando) o papel de fax em diferentes pontos. Desse modo, registra-se o movimento de  $m$  no plano  $xy$ .

Diferentes figuras de Lissajous foram obtidas de duas formas: variando a diferença de fase entre os dois modos de oscilação (mudando a posição inicial em que  $m$  é solto) ou mudando a razão entre as frequências dos modos (variando  $L$ ). Na condição em que  $l$  é igual a  $L$  o pêndulo bifilar é equivalente a um Pêndulo Simples de comprimento  $l$ , e a figura obtida é uma reta, uma circunferência ou uma elipse simplesmente [2].

No experimento foi utilizado um gerador de pulsos de tensão Ealing Timing Pulse & SPark Source - Model 33-026. Ele permite ajustar a frequência dos pulsos de saída de 5 a 60 Hz. A frequência usada foi 60 Hz para uma boa resolução das figuras impressas no papel de fax. O fio condutor que constitui o pêndulo bifilar deve ser fino para não atrapalhar o movimento de  $m$  e capaz de suportar os picos de tensão do gerador.

Durante o experimento não houve preocupação com a precisão das medidas e subsequente tratamento de erros. O objetivo deste trabalho é apresentar o pêndulo bifilar como uma montagem mecânica para uma discussão qualitativa da superposição de movimentos harmônicos utilizando figuras de Lissajous. Deste modo, as medidas apresentadas a seguir indicam aproximadamente (imprecisão de 10 a 20%) os comprimentos necessários para a formação das figuras. Apesar de não serem necessários, os períodos de oscilação foram medidos para comparação com valores teóricos.

## III Figuras de Lissajous

As figuras de Lissajous são obtidas em função de  $L$ , que para o pêndulo bifilar é sempre maior ou igual ao comprimento  $l$ . Os casos em que  $L$  é muito próximo a  $l$  não são fáceis de serem obtidos experimentalmente, devido a fatores como elasticidade do fio, rigidez na região de bifurcação causada pela fita isolante para altas tensões,

etc. Estes empecilhos sobressaem à medida que  $L$  se aproxima de  $l$ . No caso limite  $L = l$  estas dificuldades são contornadas substituindo o pêndulo bifilar por um pêndulo simples de comprimento  $l$ . Nas Figs. 3.a e 3.b são apresentadas duas impressões obtidas com um pêndulo simples com  $l = 130\text{cm}$  e  $m$  de 230 gramas, variando apenas as condições iniciais (posição e velocidade iniciais). Na Fig. 3 a trajetória de  $m$  é indicada por um ponto inicial  $P_o$  e um ponto final  $P_1$  após um período de oscilação na direção  $x$  ( $T_x$ ). É importante notar que nas Figs. 3.a e 3.b os períodos dos modos de oscilação  $x$  e  $y$  são iguais ( $T_x/T_y = 1$ ) o que significa que após um período de oscilação em qualquer uma das direções o corpo  $m$  volta para o ponto de partida ( $P_o = P_1$  na Fig. 3.a).

A seguir são apresentados os resultados da impressão das figuras de Lissajous em papel tipo fax utilizando um pêndulo bifilar com os parâmetros:  $m$  de 147 gramas,  $l$  constante com o valor aproximado de 30cm ( $T_y \cong 1,0\text{ s}$ ) e  $L$  variando de 30 a 300cm. Nas Figs. 3.c e 3.d, cada uma correspondendo a uma condição inicial, são apresentados os resultados do movimento de  $m$  para  $L = 60\text{cm}$  ( $T_x \cong 1,5\text{ s}$ ). Nesta condição tem-se  $T_x/T_y \cong 3/2$ . É importante notar que após um período de oscilação  $T_x$  (movimento de  $P_o \rightarrow P_1$  na Fig. 3.c) o pêndulo não volta ao seu ponto de partida ( $P_o \neq P_1$ ), por isso não é formada uma figura regular como a circunferência ou elipse (Figs. 3.a e 3b). Entretanto, após 2 ciclos em  $x$  e 3 ciclos em  $y$  a massa  $m$  volta ao ponto de partida formando uma figura fechada e completando um ciclo do movimento, tendo assim um período total de  $2T_x \cong 3T_y$ .

Nas Figs. 3.e e 3.f são apresentadas duas figuras de Lissajous (duas condições iniciais distintas) para  $L = 140\text{cm}$  ( $T_x \cong 2,1\text{ s}$ ). Observamos a formação de uma figura regular onde há apenas um ponto de cruzamento da trajetória de  $m$  durante seu movimento, semelhante ao nó do segundo modo vibracional de uma corda fixa nas duas extremidades. Agora temos a razão  $T_x/T_y \cong 2$ , onde um período é múltiplo inteiro do outro e após um período de oscilação do pêndulo a massa  $m$  volta ao ponto de partida ( $P_o = P_1$ ), formando uma figura regular e fechada.

Para valores de  $L$  entre 140 e 300 cm obtém-se padrões parecidos com aqueles das Figs. 3.g e 3.h. Nestas figuras  $L$  tem o comprimento aproximado de 190cm ( $T_x \cong 2,6\text{ s}$ ) e como no caso das Figs. 3.c e 3.d a razão entre os períodos não é um número inteiro ( $T_x/T_y \cong 5/2$ ). Observa-se ainda que após um período

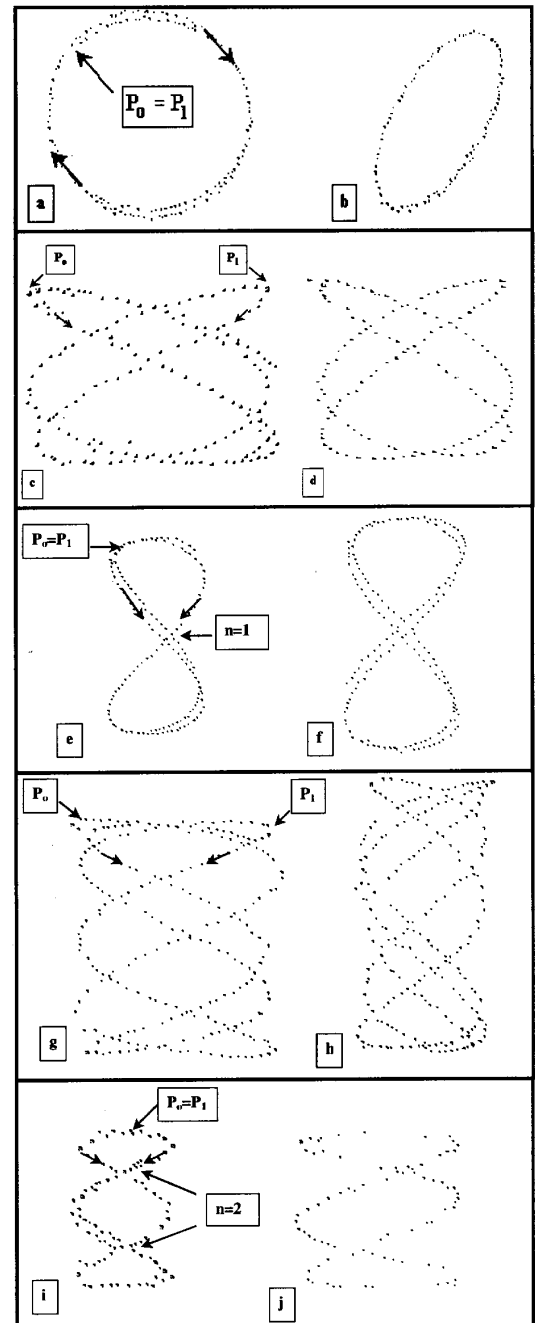


Figura 3. Figuras de Lissajous. Em cada caso são apresentadas duas impressões com condições iniciais de movimento distintas, por exemplo (a) e (b). Considerando o referencial da Fig. 2, na vertical tem-se o eixo  $x$  e na horizontal o eixo  $y$ . (a) e (b) Pêndulo Simples de comprimento  $l = 130\text{cm}$ . As seguintes figuras referem-se ao Pêndulo Bifilar com  $l = 30\text{cm}$  ( $T_y \cong 1,0\text{ s}$ ): (c) e (d)  $L = 60\text{cm}$  ( $T_x \cong 1,5\text{ s}$ ), (e) e (f)  $L = 140\text{cm}$  ( $T_x \cong 2,1\text{ s}$ ), (g) e (h)  $L = 190\text{cm}$  ( $T_x \cong 2,6\text{ s}$ ) e (i) e (j)  $L = 290\text{cm}$  ( $T_x \cong 3,1\text{ s}$ ). Nas figuras regulares (a), (e) e (i), onde a razão  $T_x/T_y$  é um múltiplo inteiro estão indicados os pontos equivalentes aos nós de uma corda vibrante presa pelas extremidades. O ponto  $P_o$  representa o ponto inicial do movimento e o ponto  $P_1$  o ponto final do movimento na trajetória após um período de oscilação na direção  $x$  ( $T_x$ ). As setas sobre a trajetória indicam o movimento executado pela massa  $m$ .

de oscilação  $T_x$  o pêndulo não volta ao seu ponto de partida e  $P_o \neq P_1$ . Entretanto após completar um ciclo de movimento a figura torna-se fechada.

A situação equivalente àquela encontrada nas Figs. 3.e e 3.f é apresentada nas Figs. 3.i e 3.j, onde  $L = 290\text{cm}$  ( $T_x \cong 3,1\text{s}$ ). Novamente a razão entre os períodos é um número inteiro ( $T_x/T_y \cong 3$ ) e assim a figura formada é regular e fechada após um período de oscilação na direção  $T_x$  ( $P_o = P_1$ ). Neste caso há o aparecimento de dois pontos de cruzamento fixos durante o movimento de  $m$ .

Os erros estimados nas medidas dos períodos ( $T_{\text{exp}}$ ) estão listados na tabela 1. Os valores teóricos ( $T_{\text{teo}}$ ) foram obtidos dos comprimentos  $l$  e  $L$  usando a expressão para pêndulo simples. Como foi mencionado, o valor de erro encontrado não compromete a análise qualitativa das figuras de Lissajous.

Tabela 1. Estimativa dos erros nas medidas dos períodos referentes aos valores teóricos esperados a partir dos valores de  $l$  e  $L$ . O valor de  $g$  utilizado foi de  $9,8 \text{ m s}^{-2}$ .

<b>L</b> cm	$T_{\text{teórico}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ seg	$T_{\text{exp}}$ seg	$\frac{(T_{\text{exp}} - T_{\text{teórico}})}{T_{\text{teórico}}}$ %
30	1,1	1,0	10
60	1,6	1,5	7
140	2,4	2,1	17
190	2,8	2,6	8
290	3,4	3,1	10

## IV Análise

Para a análise matemática que é apresentada a seguir, considera-se a situação ideal que a massa e a resistência mecânica do fio são desprezíveis. Também é considerado que a amplitude do movimento do corpo  $m$  na direção  $x$  ou  $y$  é muito menor que  $l$  (menor comprimento característico do sistema), ou seja, o movimento restringe-se a pequenos ângulos. Nessas condições pode-se considerar o modo de oscilação  $x$  e o modo de oscilação  $y$  como movimentos harmônicos. O movimento resultante do corpo  $m$  pode ser considerado uma combinação destes movimentos. Para uma análise cuidadosa da influência da massa do fio no movimento de um Pêndulo Simples, sugere-se o trabalho de Palanganá e Pedreira [4] e com relação ao comportamento deste para ângulos não pequenos indica-se o trabalho de Oliveira [5].

O modo de oscilação  $y$  pode ser compreendido como um Pêndulo Simples de comprimento  $l$ , enquanto o modo de oscilação  $x$  pode ser compreendido como um pêndulo simples de comprimento  $L$ . O período de cada modo é facilmente determinado, pois se trata de dois

pêndulos simples de comprimentos  $l$  e  $L$ , e a razão entre eles é dada pela equação:

$$\frac{T_x}{T_y} = \sqrt{\frac{L}{l}}$$

Para que a trajetória descrita pela massa  $m$  seja similar aos padrões apresentados pelas Figs. 3.a, 3.e e 3.i é necessário que  $T_x$  seja um múltiplo inteiro de  $T_y$ . Logo a razão entre  $L$  e  $l$  deve ser também um número inteiro. Mais precisamente, a razão entre  $L$  e  $l$  deve ser proporcional ao quadrado de  $n$ , onde  $n$  representa um número inteiro positivo (1,2,3...). Quando  $n = 1$  se obtém o caso onde a trajetória é um círculo, uma elipse ou uma reta, dependendo das condições iniciais movimento do pêndulo. Este caso está mostrado nas Figs. 3.a e 3.b, que representa o caso limite  $L = l$ , onde as frequências de oscilação do Pêndulo simples nas direções ortogonais  $x$  e  $y$  são iguais. Estes modos são equivalentes ao primeiro modo normal de vibração de uma corda com as extremidades fixas. Para  $n = 2$  a trajetória de  $m$  é dada pelas Figs. 3.e e 3.f, onde se observa um ponto de cruzamento fixo. Este ponto surge devido à composição dos dois modos de oscilação com frequências múltiplas, tal como o primeiro modo (direção  $y$  - período fixo) e o segundo modo (direção  $x$ ) de vibração de uma corda presa pelas extremidades. É importante ressaltar a equivalência entre o ponto fixo na Fig. 3.e e o “nó” característico do segundo modo de vibração de uma corda. Nas Figs. 3.i e 3.j, ou seja  $n = 3$ , aparecem dois pontos equivalentes aos dois nós do terceiro modo vibracional da corda presa pelas extremidades, resultantes da superposição do primeiro modo (direção  $y$ ) e terceiro modo (direção  $x$ ). As figuras descritas acima apresentam assim trajetórias regulares quando comparadas às figuras onde  $n$  não é um número inteiro. Usando os valores de  $L$  e  $l$  dos casos onde as figuras são regulares, constrói-se o gráfico da razão entre estes comprimentos e  $n$  (razão entre os períodos). Como mostrado na Fig. 4, os dados coincidem perfeitamente com o gráfico de uma função linear. No trabalho de Tong [3] encontra-se uma análise matemática rigorosa das formas das figuras de Lissajous, que podem ser comparadas com as obtidas experimentalmente neste trabalho.

Nos casos onde  $n$  não é um número inteiro, ou seja, onde  $T_x$  não é um múltiplo inteiro de  $T_y$ , as figuras de Lissajous descrevem padrões mais complicados de serem analisados. Entretanto se a razão  $T_x/T_y$  for um número racional as figuras serão fechadas mas não regulares como apresentado nas Figs. 3.c e 3.e. No caso em que esta razão for um número irracional (como  $\pi/2$ ) estas figuras serão abertas.

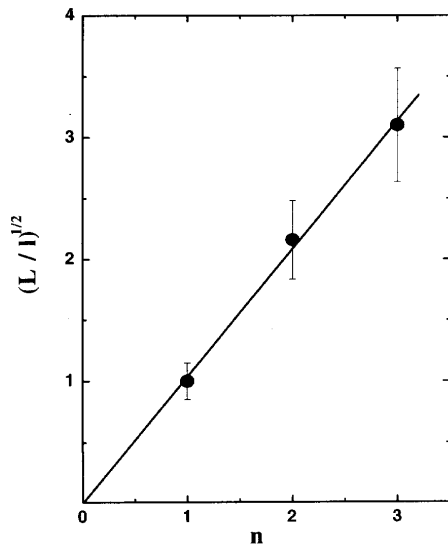


Figura 4. Dependência da razão  $(L/l)^{1/2}$  e  $n$  das trajetórias regulares apresentadas na Fig. 3. Os dados (círculos fechados) foram ajustados com uma função polinomial de primeira ordem (linha sólida).

## V Conclusões

Foi apresentada neste trabalho uma maneira diferente de se obter figuras de Lissajous. O uso do pêndulo

bifilar mostrou-se enriquecedor na compreensão da formação de diferentes trajetórias e sua relação com parâmetros físicos do sistema, no caso, os comprimentos  $L$  e  $l$ . A utilização do pêndulo bifilar permite a apresentação da superposição de movimentos harmônicos alternativamente à maneira tradicional, que é usando geradores de sinais elétricos e osciloscópio.

## Agradecimentos

Os autores agradecem aos técnicos Antenor F. P. Filho, Ércio Santoni e Marcos J. Semenzato do Laboratório de Ensino de Física do Instituto de Física de São Carlos, USP, pelo auxílio na montagem deste experimento.

## Referências

1. C. L. Stong, *The Amateur Scientist*, Aug. 1973, pg. 104.
2. Berkeley Physics Laboratory, Part A Experiment A7.
3. E. Y. Tong, *The Physics Teacher* **35**, 491 (1997).
4. A. J. Palangana e P. R. B. Pedreira, *Rev. Bras. Ens. de Física* **17**, 3 (1995).
5. Paulo M. C. Oliveira, *Rev. Bras. Ens. de Física* **17**, 1 (1995).