Estudo Simplificado do Movimento do Pião com Rotação Constante ou Variável

(A simplified approach to the motion of a top with constant or variable spin)

G. F. Leal Ferreira
Instituto de Física, Universidade de São Paulo
Caixa Postal 369, 13560-970, São Carlos, SP, Brasil

Recebido em 21 de janeiro, 2000. Aceito em 5 de outubro, 2000

O estudo do movimento do pião é muito simplificado se o substituimos por uma massa pontual dotada de momento angular próprio, de módulo constante e sempre dirigido ao ponto fixo, além do momento angular orbital da massa pontual. Com isto, a sua dinâmica pode ser abordada com a mecânica newtoniana do ponto material - o que, certamente, é de enorme ajuda didática -, com todos os aspectos essenciais preservados. Impondo-se leis de conservação, o problema é ainda mais simplificado e as equações de movimento são prontamente obtidas. Com adequado ajuste, o método pode ser usado para abordar-se o caso em que a rotação é variável no tempo.

The study of the top motion is greatly simplified if we alternatively choose to study that of a spinning point mass with a constant, in modulus, intrinsic angular momentum always pointing toward the fixed point, besides the orbital one due to the motion of the point mass. This allows us to use the Newtonian mechanics of the point mass - which certainly greatly helps teaching -, without spoiling its essential features. Imposing conservation laws the problem is further simplified and the equations of motion are readily obtained. With adequate changes the method may be used for the case of a top with variable spin.

I Introdução

Foi sugerido anteriormente que o estudo do movimento do pião com um ponto fixo tornar-se-ia bem mais accessível [1] fazendo-se o pião coalescer numa massa pontual dotada de rotação ('spin'), com módulo constante e direção sempre apontando para o ponto fixo. Ao contrário do que acontece nos tratamentos usuais - como o de Goldstein [2] realizado via Mecânica Analítica, ou como o de Synge e Griffith via Mecânica Racional do corpo rígido [3] - a idéia intuitiva da conservação do momento angular intrínseco de rotação é admitida de início, desanuviando parcialmente a física do problema. Com a simplificação de coalescer o pião no seu centro de massa e dotando o mesmo de momento angular de módulo constante e sempre apontando para o ponto fixo, o problema pode ser tratado newtonianamente, o que, sem dúvida, é de grande ajuda didática. Como de praxe, a ulterior imposição de leis de conservação encurta a solução , e diga-se de passagem, que esta emerge com um mínimo de perda formal em relação ao tratamento em que o pião é considerado um corpo rígido. O método pode ser estendido sem dificuldade ao caso em que o momento angular intrínseco varia no tempo, como na prática ocorre pelo atrito no ponto fixo. Para quem interessar, o estudo lagrangeano e hamiltoniano de um sistema de massas pontuais dotadas de spin pode ser encontrado em [4].

II O movimento newtoniano do pião

Na Fig. 1, o ponto M representa o centro de massa (c.m.) do pião e no texto M será a sua massa. R é a distância de M ao ponto fixo O. $\vec{L}_0$, o vetor momento angular intrínseco, tem módulo constante e está sempre orientado na direção OM. Na solução newtoniana estuda-se o movimento de M impondo-se que o momento do peso iguala a variação do momento angular total, composto de $\vec{L}_0$ e do momento angular orbital devido ao movimento de M. Entretanto, procedimento mais direto pode ser adotado, o de impormos duas leis de conservação, a do momento angular total ao longo do eixo vertical fixo Oz, paralelo à força peso, e a da energia. É interessante notar que nesta última somente a conservação da energia do movimento orbital, cinética e potencial, necessita ser considerada, um a vez que energia do movimento de rotação íntrínseco está prescrito, sendo constante no caso usualmente tratado em que não há atrito entre o eixo do pião e o ponto fixo. Um pouco de reflexão mostra que esse será também o caso se houver amortecimento da rotação, ou, em geral se esta variar no tempo, como se verá na seção IV.

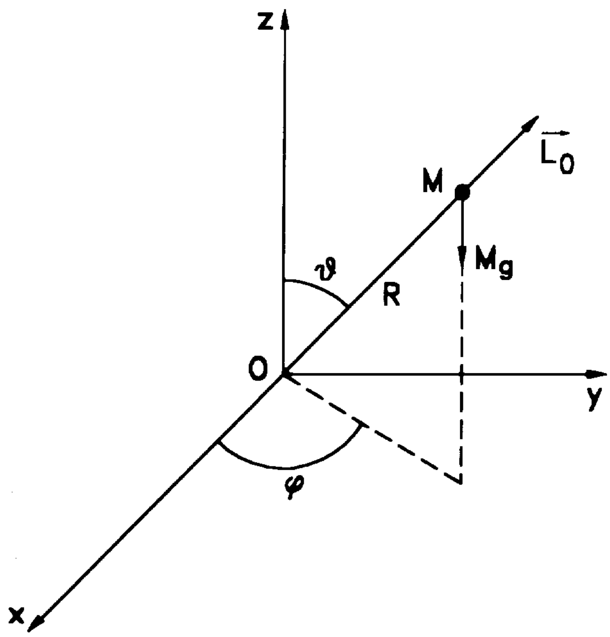

Figura 1. A massa pontual M, representando o pião, com movimento orbital em torno do ponto fixo O, é dotada de momento angular $\vec{L}_0$, apontando sempre na direção OM. ϑ e φ são coordenadas esféricas, OM=R e Mg é o peso de M.

III Leis de conservação

III.1 Momento angular em torno do eixo Oz

A velocidade orbital de M, $\vec{V}$, é

$$\vec{V} = R\dot{\vartheta}\tilde{\vartheta} + R\mathrm{sen}\vartheta\dot{\varphi}\tilde{\varphi} \tag{1}$$

sendo $\tilde{\vartheta}$ e $\tilde{\varphi}$ os versores esféricos usuais (não estão mostrados na figura). Para o momento angular orbital em torno de Oz somente a componente na direção $\tilde{\varphi}$ de $\vec{V}$ contribui. Considerando-se também a componente de L_0 tem-se

$$\frac{d}{dt}(MR^2\dot{\varphi}\mathrm{sen}^2\vartheta + L_0\mathrm{cos}\vartheta) = 0 \tag{2}$$

ou seja, com C_1 uma constante,

$$MR^2\dot{\varphi}\mathrm{sen}^2\vartheta + L_0\mathrm{cos}\vartheta = C_1 \tag{3}$$

III.2 A energia

Como dissemos, somente a energia do movimento orbital necessita ser considerada. Ela é, com C_2 uma outra constante,

$$\frac{1}{2}MR^2(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2\mathrm{sen}^2\vartheta) + MgR\cos\vartheta = C_2 \tag{4}$$

A única diferença que as Eqs. 3 e 4 mostram em relação às do pião 'encorpado' [2,3] é que nestas aparece o momento de inércia I_1 do pião em relação a um eixo perpendicular a OM, passando por O, em vez do termo MR^2. Esta é a deformação formal causada pelo tratamento simplificado, na verdade algo não importante. Daquí em diante usaremos I_1 no lugar de MR^2, com o que as Eqs.2 e 4 serão escritas como

$$I_1\dot{\varphi}\mathrm{sen}^2\vartheta + L_0\mathrm{cos}\vartheta = C_1 \tag{5}$$

$$\frac{I_1}{2}(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2\mathrm{sen}^2\vartheta) + MgR\mathrm{cos}\vartheta = C_2 \tag{6}$$

IV A precessão e a sustentação

Dadas as constantes C_1 e C_2, as Eqs.5 e 6 podem ser integradas, em princípio substituindo-se o valor de $\dot{\varphi}$ tirado da Eq.5 na Eq.6. Note-se que todo o efeito da rotação está no termo $L_0\cos\vartheta$ na Eq.5 e para aquilatarmos sua importância no movimento do pião, vamos supor que inicialmente $\dot{\vartheta}$ e $\dot{\varphi}$ sejam nulos. Se L_0 é nulo, C_1 na Eq.5 será nulo, e portanto $\dot{\varphi}$ também se anulará. A Eq. 6 mostrará que $\dot{\vartheta}$ crescerá no tempo.

Para analisarmos o que ocorre quando L_0 é diferente de zero, é melhor usarmos a Eq.2, que para $t = 0$ dá

$$I_1\ddot{\varphi}(0)\mathrm{sen}\vartheta_0 = L_0 \tag{7}$$

ou seja, que para tempos pequenos,

$$\dot{\varphi}(t) \cong \frac{L_0 t}{I_1\mathrm{sen}\vartheta_0} \tag{8}$$

(esqueçamos o 'bug' em ϑ_0), isto é o pião começa a precessionar no sentido de sua rotação. Como na Eq.6, $\dot{\varphi}$ aparece ao quadrado, o movimento inicial de ϑ não é alterado pela rotação, mas o será em tempos maiores já que com o crescimento de $\dot{\varphi}$, o termo $(I_1/2)\dot{\varphi}^2\mathrm{sen}^2\vartheta$ contribui negativamente para o crescimento de $\dot{\vartheta}$. Portanto, a rotação faz o peão precessionar ao mesmo tempo que o sustenta, freiando sua queda.

V Rotação com atrito

O caso do pião com rotação variada também pode ser abordado. Em vez de impormos a conservação do momento angular na Eq.2, estipulamos sua razão de variação. Seja esta em módulo $dL(t)/dt$. Temos então em vez da Eq.2

$$\frac{d}{dt}(I_1\dot{\varphi}\mathrm{sen}^2\vartheta + L(t)\cos\vartheta) = \frac{dL(t)}{dt}\cos\vartheta \qquad (9)$$

Como vamos supor que o movimento orbital se faz sem atrito, sua energia total é conservada e daí que a solução do problema pode ser encontrada usando-se as Eqs. 9 e Eq.6. Nas ilustrações que faremos vamos supor que o atrito faz o momemto angular decrescer de forma exponencial, $L = L_{00}\exp(-\lambda t)$, com λ constante e L_{00} o momento angular inicial.

Suponhamos que o atrito seja pequeno, isto é, que λ seja pequeno. Suponhamos também que o pião seja inicialmente rápido e que esteja em precessão lenta, ou seja, que

$$\dot{\varphi} \cong \frac{MgR}{L(t)} \qquad (10)$$

com $L(0) = L_{00} >> MgR$ e $\dot{\vartheta} \cong 0$. Podemos admitir que começando a agir o atrito a Eq.10 permaneça válida, com $\dot{\varphi}$ aumentando à medida que $L(t)$ diminui. Vamos achar como varia velocidade angular $\dot{\vartheta}$. Da Eq.9 obtemos

$$I_1\frac{d}{dt}(\dot{\varphi}\mathrm{sen}^2\vartheta) \cong \dot{\vartheta}L(t)\mathrm{sen}\vartheta \qquad (11)$$

e como a derivação de $\mathrm{sen}^2\vartheta$ dá termo em $\dot{\vartheta}\dot{\varphi}$, pequeno, temos

$$I_1\ddot{\varphi}\mathrm{sen}\vartheta \cong L(t)\dot{\vartheta} \qquad (12)$$

e usando a Eq.10 temos para $\dot{\vartheta}$

$$\dot{\vartheta} \cong \frac{I_1MgR\lambda\mathrm{sen}\vartheta}{L^2(t)} \qquad (13)$$

equação que pode ser integrada em ϑ, fornecendo

$$tg\frac{\vartheta}{2} \cong e^{[I_1MgR/2L_{00}^2](e^{\lambda t}-1)}tg\frac{\vartheta_0}{2} \qquad (14)$$

sendo ϑ_0 o ângulo inicial. A aproximação de pião rápido, Eq.10, deve valer até que o momento angular do pião caia ao valor do momento angular orbital, isto é, que

$$I_1\dot{\varphi} \approx L(t) \qquad (15)$$

ou seja, até t_m tal que

$$e^{-2\lambda t_m} \approx \frac{I_1MgR}{2L_{00}^2} << 1 \qquad (16)$$

o que quer dizer que a Eq.14 valerá até o ângulo igual a

$$\vartheta_m \cong 2arctg(etg\vartheta_0/2) \qquad (17)$$

com e a base neperiana. Na Fig. 2 mostramos ϑ_m como função de ϑ_0. Por exemplo, o pião rápido começando a 80^o permanece rápido até atingir o ângulo de cerca de 133^o, independentemente do valor de λ. Isto parece sugerir que a Eq.17 é válida mesmo que o atrito seja mais severo.

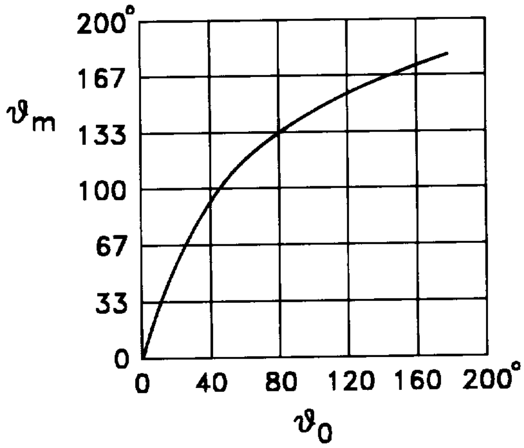

Figura 2. O ângulo máximo ϑ_m em que a aproximação de pião rápido é válida, Eq.17, em função do ângulo inicial ϑ_0.

VI Considerações finais

O método newtoniano tanto leva à simplicação do problema como a interpretações mais diretas. Sem dúvida, o fato de se admitir de início que, no caso sem atrito, o módulo do momento angular do pião em relação ao seu eixo se mantém constante, aviva a intuição enquanto que no tratamento lagrangeano [2] com os ângulos de Euler, aquele fato não fica às vezes claro. Isto porque na construção dos ângulos de Euler [2], a rotação final em torno do eixo OM, com velocidade angular $\dot{\psi}$, é chamada de spin [4-6], o que não é correto, já que a primeira rotação de eixo Oz, com velocidade angular $\dot{\varphi}$, tem componente $\dot{\varphi}\cos\vartheta$ ao longo de OM. Além disto, a separação feita entre o movimento interno e o orbital permitiu ver que na conservação da energia somente a do movimento orbital intervem, permitindo a abordagem do caso com 'spin' variável na seção 5.

Agradecimentos

O autor deve à colega, Dra. Mariângela T. de Figueiredo, a inclusão das referências 6 e 7 e ao árbitro do artigo, a da referência 4, a quem, pois, o autor agradece. E agradece também ao CNPq por bolsa de produtividade.

References

[1] G. F. Leal Ferreira, Rev. Ens. de Física, **3,** 16 (1981).

[2] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, Publ. Co., Reading, Massachussets (1980), p. 215.

[3] J. L. Synge e B. A. Griffith, *Mecânica Racional*, tradução de N. F. Furtado, Editora Globo (1960), p. 468.

[4] R. W.Ruijgrok e H. vander Vlist, Physica A **101**, 571 (1980).

[5] R. A. Becker, *Introduction to theoretical Mechanics,* McGraw-Hill Book Co., N.York (1954) p.303.

[6] F. P. Beer e E. R. Johnston, Jr., *Vector Mechanics for Engineerings*, Vol.II, McGraw- Hill Inc., Cap.18.

[7] R. C. Hibbeler, *Engineering Mechanics*, Vol.2, Macmillan Publ. Co. Inc., N. York (1978), Cap.20.