

Exemplo de Histerese com um Sistema de Massa-Mola

M. P. de Almeida e U. M. S. Costa

*Departamento de Física,
Universidade Federal do Ceará,
60455-960 Fortaleza-Ce, Brazil*

Recebido em 21 de Junho, 1999

É usado um modelo mecânico simples, composto por uma mola de comprimento unitário ligado a uma massa M , que se move sem atrito ao longo um trilho vertical retilíneo. A outra extremidade da mola está presa a um ponto fixo A . Este sistema é utilizado para exemplificar o fenômeno de histerese. Analisa-se também o diagrama de fase, a estabilidade dos pontos de equilíbrio e a existência de ponto crítico.

We use a simple mechanical model composed by a unitary length spring attached to a fixed point A and to a body M which moves without friction along a vertical straight rail. This system is used to exemplify concepts inherent to complex systems such as bifurcation and equilibrium stability phase transitions and hysteresis.

I Introdução

O conceito de histerese está ligado a sistemas não-lineares onde o comportamento depende tanto do estado de solicitação atual quanto de sua história passada. Este tipo de fenômeno aparece em várias áreas, tais como magnetismo, elasticidade, plasticidade, sistemas de spins, oscilações em redes cristalinas, etc. A sua característica fundamental consiste na existência de curvas, relacionando a solicitação (força, tensão, etc.) com a resposta do sistema (deslocamento, deformação, etc.), que dependem da história passada do sistema e que formam ciclos fechados quando a solicitação varia contínua e periodicamente com amplitude suficientemente grande. Isto é, quando se faz a solicitação variar ciclicamente, o sistema responde de modo que o aspecto do gráfico *resposta* \times *solicitação* seja uma curva fechada, onde o caminho seguido durante o carregamento (aumento na solicitação) não coincide com o do descarregamento (ver Fig. 5).

Sistemas simples podem ser usados como poderosos instrumentos na apresentação de conceitos para os estudantes nos cursos introdutórios de Física. A assimilação do aluno será mais efetiva se o sistema puder ser facilmente construído experimentalmente, e usado para demonstração e análise do fenômeno. Alguns exemplos de trabalhos neste sentido são listados nas referências bibliográficas [1, 2, 3, 4, 5]. Os sistemas compostos por massas e molas são usados freqüentemente para apresentar conceitos relativos às oscilações e vibrações lineares [6].

Neste trabalho, utiliza-se um modelo simples, com-

posto por uma mola e uma massa, para exemplificar o fenômeno da histerese. A particularidade do presente modelo é a restrição imposta ao movimento da massa, que deve se deslocar ao longo de um trilho reto sem atrito, fixado a uma distância d da outra extremidade da mola. Esta restrição geométrica introduz uma não-linearidade de onde decorre a histerese. Apesar da simplicidade do sistema, seu comportamento mecânico é rico o suficiente para apresentar ainda outros conceitos ligados a sistemas complexos, e.g., estabilidade, bifurcação de equilíbrio e ponto crítico.

Através de simulações numéricas constroem-se vários diagramas que descrevem o comportamento do sistema em resposta à mudança na solicitação externa. No diagrama de fase, que apresenta as curvas de força constante, caracterizam-se os pontos de equilíbrio estáveis e instáveis bem como o ponto crítico, onde o sistema tem uma mudança qualitativa no seu comportamento.

O artigo é composto desta Introdução e mais três seções: A segunda seção contém a descrição do modelo, a terceira traz os experimentos numéricos e a quarta as conclusões e discussões.

II Descrição

Seja o sistema massa-mola da Fig. 1, onde a mola tem comprimento unitário quando não solicitada por força externa. Um dos extremos desta mola é fixado a um ponto fixo A , o outro sendo preso a um corpo M que se move, sem atrito, ao longo de um trilho vertical retilíneo. A influência da gravidade é desconsiderada.

A distância horizontal entre o trilho e o ponto fixo A é o parâmetro d , cujo valor definirá como o sistema se comportará. Seja θ o ângulo formado pelo eixo da mola e a direção horizontal, o qual será usado para representar o estado do sistema (posição do corpo M). A distância vertical entre M e a horizontal que passa pelo apoio A é dada por $y = y(\theta) = d \tan \theta$. A mola tem um comportamento elástico linear dado pela lei de Hooke, $F_s = k\Delta l = k(l - 1)$, onde $l = d/\cos \theta$ e k representa a constante elástica da mola.

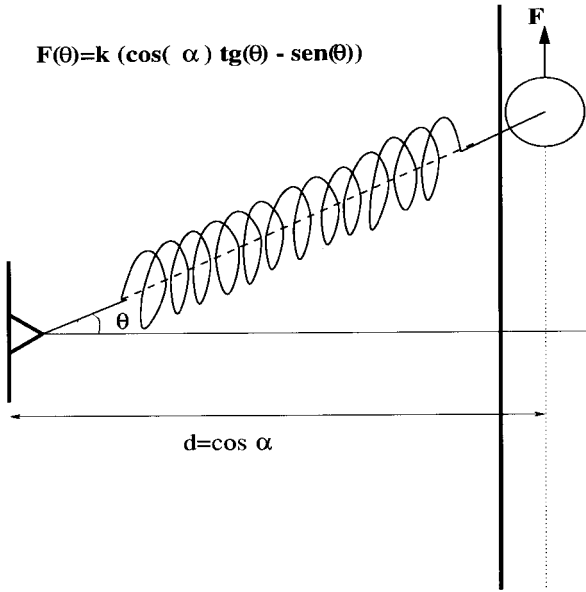


Figura 1. Modelo massa-mola com restrição geométrica. A mola tem comprimento unitário. A solicitação externa F é na direção vertical. A distância entre o apoio e o trilho é $d = \cos \alpha$.

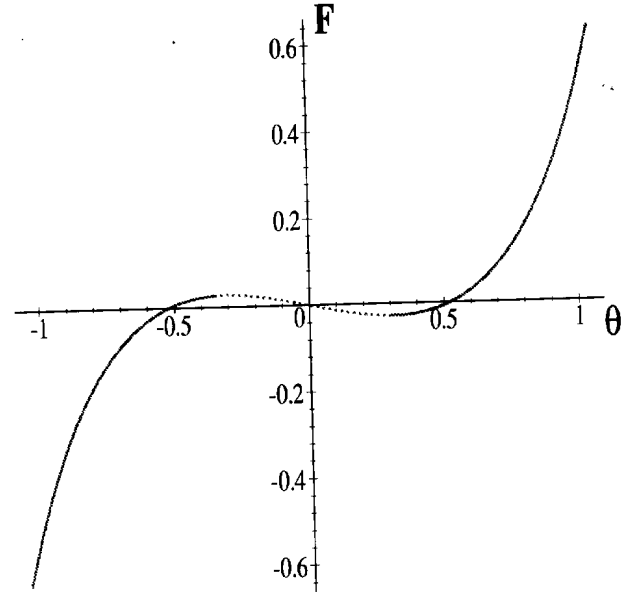


Figura 2. Diagrama da força contra θ para $\alpha = \pi/6$. A parte pontilhada representa os pontos de equilíbrios instáveis.

O comportamento qualitativo do sistema dependerá do valor de d . Se $d \geq 1$, i.e., a distância de A até o trilho for maior que o comprimento da mola, esta nunca será comprimida. Ao contrário, se $d < 1$, a mola será comprimida quando $|\theta| < \arccos(d)$.

Aplica-se uma força externa vertical F . O sinal de F indica o sentido da força, sendo positivo para cima e negativo para baixo. O valor de F necessário para manter o sistema em equilíbrio na configuração θ é denotado $F(\theta)$. Quando $F = 0$ o sistema poderá ficar em equilíbrio em qualquer das configurações dadas por $\theta = \pm\alpha$, onde α se relaciona com d através de $\alpha = \arccos(d)$ para $d < 1$, e $\alpha = 0$ quando $d \geq 1$. O caso $d > 1$, que equivale à situação de se ter a mola sempre distendida, não apresenta histerese.

Tomando-se $\theta = 0$ como o nível zero para energia potencial devido a F , tem-se que a energia potencial do sistema é dada por

$$U(\theta) = \frac{1}{2}k \left(\frac{\cos \alpha}{\cos \theta} - 1 \right)^2 - F \cos \alpha \tan \theta. \quad (1)$$

A força resultante que age sobre M , na configuração θ , é então dada por

$$F_R = -\frac{dU}{dy} = -\frac{dU}{d\theta} \left(\frac{dy}{d\theta} \right)^{-1} = F - k(\cos \alpha - \cos \theta) \tan \theta. \quad (2)$$

Pode-se então obter o valor da força externa F necessário para manter o sistema em equilíbrio na posição θ como sendo

$$F(\theta) = k(\cos \alpha - \cos \theta) \tan \theta. \quad (3)$$

O gráfico de $(F(\theta)/k) \times \theta$ para $\alpha = \pi/6$ é mostrado na Fig. 2.

A condição de equilíbrio estável, $dU/dy = 0$ e $d^2U/dy^2 > 0$, conduz à desigualdade $(\cos \alpha - \cos^3 \theta) > 0$, que é satisfeita quando a força externa é dada pela Eq. (3) e

$$\frac{\pi}{2} \geq |\theta| > \theta_{cr} = \arccos[(\cos \alpha)^{1/3}] = \arccos[d^{1/3}]. \quad (4)$$

A equação diferencial do movimento de M , $d^2y/dt^2 = F_R/M$, quando escrita em termos de θ fica

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \tan \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{k \cos^2 \theta}{M \cos \alpha} \left[\frac{F}{k} - (\cos \alpha - \cos \theta) \tan \theta \right]. \quad (5)$$

III Experimentos numéricos

Para se obter soluções numéricas convergentes e não oscilatórias, é introduzido na equação diferencial do movi-

mento (Eq. (5)) um termo de amortecimento ($cd\theta/dt$), obtendo-se

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \tan \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + c \frac{d\theta}{dt} = \frac{k \cos^2 \theta}{M \cos \alpha} \left[\frac{F}{k} - (\cos \alpha - \cos \theta) \tan \theta \right]. \quad (6)$$

Este termo representa uma dissipação viscosa que faz a solução numérica estabilizar, para tempos (passos de integração) grandes, nos valores de equilíbrio, sem alterar tais valores.

Os valores dos parâmetros usados nas simulações são $k = M = 1$, $c = 0,15$ e $\alpha = \pi/6$.

A estabilidade dos pontos de equilíbrio é testada através de perturbações nas condições iniciais, i.e., se $F = F(\theta)$ é a força necessária para manter o sistema em equilíbrio em θ , resolve-se a Eq. (6), para θ como função do tempo, com as condições iniciais $\theta(0) = \theta + \epsilon$ e depois com $\theta(0) = \theta - \epsilon$, onde $\epsilon = 10^{-4}$. Para posições de equilíbrio estável observa-se que o valor assintótico, $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t)$, é idêntico a θ . Nos pontos de instabilidade, observa-se que o sistema pode passar para outro estado de equilíbrio com $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) \neq \theta$. As Figuras 3 e 4 mostram estes comportamentos. Observe que os pontos de estabilidade correspondem à condição $|\theta| > \theta_{cr}$, e que os de instabilidade são obtidos quando $|\theta| < \theta_{cr}$. Note que o comportamento do sistema depende de θ_{cr} , que por sua vez depende de $\alpha = \arccos(d)$. Para o caso em que $\alpha = \pi/6$ o valor de θ_{cr} é $\theta_{cr} \approx 0,307199$. A Fig. 3 contém os gráficos de $\theta(t) \times t$ com $F = F(0,35)$ e condições iniciais $\theta(0) = 0,3500 \pm 0,0001$, o que equivale a uma condição estável. A Fig. 4 contém os gráficos de $\theta(t) \times t$ para $F = F(0,20)$, (cujo ângulo de equilíbrio é ligeiramente menor que θ_{cr}), com condição inicial $\theta(0) = 0,2001$,

cujas soluções assintóticas tendem para $\theta = 0,401506$ e com condição inicial $\theta(0) = 0,1999$, que tende para $\theta = -0,589114$.

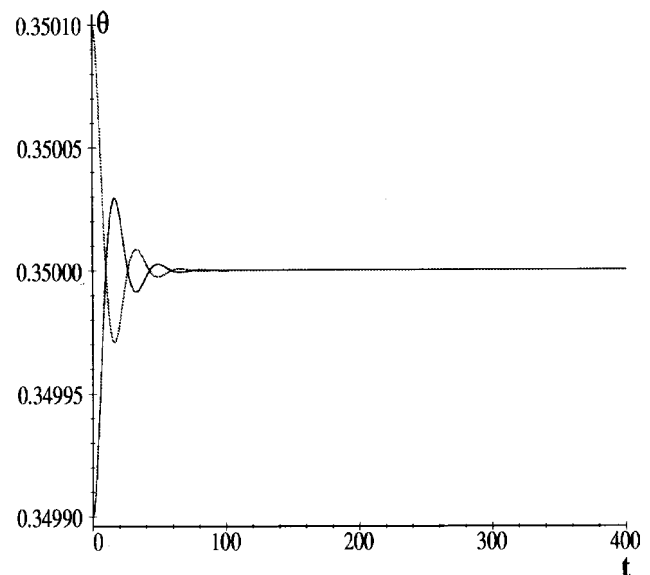


Figura 3. Exemplo de equilíbrio estável. Evolução temporal de θ para as condições $F = F(0,35)$, $\theta(0) = 0,3500 \pm 0,0001$, $\dot{\theta}(0) = 0$. e $\alpha = \pi/6$.

A histerese é simulada plotando-se os gráficos de $F \times \theta$, fazendo-se variar progressivamente o valor de F . Para cada valor de θ resolve-se numericamente a Eq. (6) com $F = F(\theta) + \delta F$ e condições iniciais $\theta(0) = \theta$, $\dot{\theta}(0) = 0$ e tomando para $\theta(F)$ o valor as-

sintótico $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t)$. Primeiro traça-se o gráfico fazendo F começar por um valor negativo e tomando-se incrementos positivos, depois faz-se o oposto, toma-se F positivo e o incremento negativo. Observa-se que $\theta(F)$ sofre uma grande variação quando o valor de F ultrapassa o valor $F(\theta_{cr})$. As curvas da Fig. 5 foram traçadas tomando-se os primeiros valores de F iguais a $F = \mp 0,5$ e incrementos $\delta F = \pm 10^{-3}$, respectivamente.

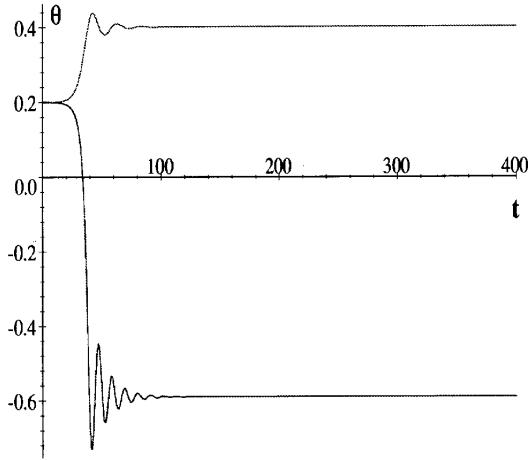


Figura 4. Exemplo de equilíbrio instável. Evolução temporal de θ para as condições $F = F(0,20)$, $\theta(0) = 0,2000 \pm 0,0001$, $\dot{\theta}(0) = 0$ e $\alpha = \pi/6$.

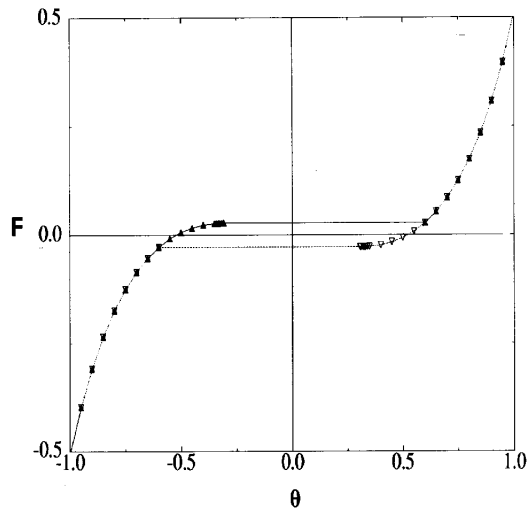


Figura 5. Curva de histerese para $\alpha = \pi/6$. A curva com Δ é seguida com valores crescentes de F e a com ∇ é obtida com valores decrescentes de F .

IV Discussões e conclusão

O sistema mostrado apresenta características típicas de sistemas complexos. Veja-se o exemplo de transição de fase. Considere que as posições de equilíbrio sejam as fases do sistema, cujo comportamento é controlado por

d que é o equivalente à temperatura de um sistema termodinâmico. O ângulo θ é o *parâmetro de ordem* e a força F representa o *campo externo*. A Fig. 6 mostra as isolinhas de força no diagrama de fase de $\theta \times d$.

Tomando-se a força dada pela Eq. (3) e desconsiderando a parte instável (trecho pontilhado da Fig. 2) pode-se dizer que o sistema apresenta transições de fase de primeira ordem quando $d < 1$, caracterizadas por variações descontínuas de θ em resposta a variações contínuas de F ; neste caso existe uma região de equilíbrio instável (sombreada na Fig. 6) no interior da curva de transições de primeira ordem, (que é mostrada na Fig. 6 por uma linha tracejada-pontilhada), que tem tangente vertical no ponto $d = 1$, que representa o ponto crítico.

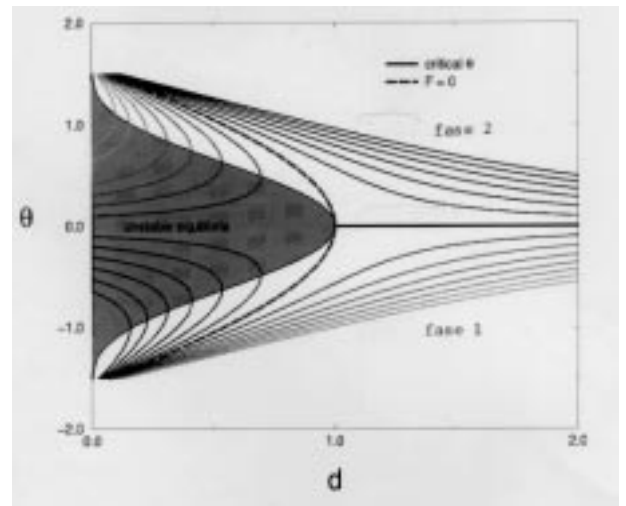


Figura 6. Diagrama de fase para $\theta \times d$ mostrando curvas de valores de F constante. A curva tracejada equivale a $F = 0$. A curva de transições de primeira ordem (tracejada-pontilhada) intercepta as curvas de força constante e delimita a região de pontos de equilíbrio instável (sombreada).

Quando $d > 1$, as variações de F provocam mudanças suaves entre fases.

As curvas com valores constantes de F também estão representadas na Fig. 6 – a curva $F = 0$ está tracejada. Algumas destas curvas não interceptam a linha crítica, e se a força tiver o valor relativo a uma destas o sistema nunca experimentará uma mudança de fase. Já as curvas que cruzam a linha crítica o fazem quando $dd/d\theta = 0$, e nestes pontos o sistema sofre a transição de fase.

O sistema apresentado na Fig. 1 e descrito na Seção 2 é conveniente para desenvolver as idéias de curvas de histerese, transição de fase e diagramas de fase em um nível elementar. Simulações numéricas podem ser facilmente implementadas para a construção dos diagramas e para testar a estabilidade de equilíbrios. Ademais, o sistema pode ser facilmente montado e usado para a demonstração experimental dos fenômenos discutidos.

References

- [1] P. M. C. de Oliveira, "Comportamento crítico no pêndulo simples," *Revista Brasileira de Ensino de Física* **17**, 21–26 (1995).
- [2] R. D. Peters, "Chaotic pendulum based on torsion and gravity in opposition," *Am. J. Phys.* **63**, 1128–1136 (1995).
- [3] R. B. Levien and S. M. Tan, "Double pendulum: An experiment in chaos," *Am. J. Phys.* **61**, 1038–1044 (1993).
- [4] D. L. Wagner, T. A. Walkiewicz, and D. A. Giltinan, "The partial ring pendulum," *Am. J. Phys.* **63**, 1014–1017 (1995).
- [5] J. S. Walker and T. Soule, "Chaos in a simple impact oscillator: The bender bouncer," *Am. J. Phys.* **64**, 397–409 (1996).
- [6] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, 2nd Ed., Addison-Wesley Publishing Co., 1980.