

# Introdução ao Estudo de Fotoabsorção em Divisores de Feixes

Celso Jorge Villas-Bôas\* e Norton Gomes de Almeida

Departamento de Física, Universidade Federal de São Carlos,  
Via Washington Luiz, Km 235, São Carlos, 13565-905 (SP), Brasil

Recebido em 27 de Abril, 2000. Aceito em 28 de Setembro, 2000

Divisores de feixe têm sido grandemente utilizados na óptica quântica, em especial na preparação de estados propagantes da radiação e em alguns testes de fundamentos da mecânica quântica. Recentes propostas envolvem ainda a construção de portas lógicas quânticas, as unidades básicas de um computador quântico. Com esta motivação, apresentamos neste trabalho uma revisão da álgebra necessária ao estudo de divisores de feixe (*beam splitters*), incluindo o caso em que há perdas tanto nos espelhos quanto nos detectores.

## I Introdução

Neste artigo apresentamos de forma didática a álgebra envolvida no tratamento de espelhos divisores de feixe, com enfoque especial para o caso em que a radiação incidente é quantizada. Embora sejam inúmeras as aplicações de espelhos divisores de feixe, podemos destacar o seu papel nas propostas de a) produção ou engenharia de novos estados do campo de radiação propagante [1]; b) teletransporte de estados propagantes do campo de radiação[2]; c) construção de portas lógicas quânticas [3] e d) reconstrução de estados quânticos do campo de radiação[4].

## II Divisores de Feixes

Nesta seção demonstraremos de forma detalhada a relação entre os sinais de entrada e de saída de um campo de radiação incidente em um divisor de feixes arbitrário (simétrico ou mesmo assimétrico), no qual não ocorrem perdas[5]. Mais especificamente, verificaremos a relação de fase entre os feixes transmitido e refletido. Sabemos que quando uma onda plana incide numa superfície separando dois meios homogêneos de diferentes propriedades ópticas, ela é subdividida em duas ondas: uma onda que é transmitida para dentro do segundo meio e outra onda refletida de volta para o primeiro meio. A existência da onda incidente e refletida pode ser demonstrada, por exemplo, das condições de contorno na solução da equação de onda[6]. Neste

artigo vamos utilizar uma abordagem matricial e fazer uso de relações genéricas, baseadas na propriedade de unitariedade da matriz que descreve a transformação do campo eletromagnético num divisor de feixes, para deduzir a relação de fase entre as ondas refletida e incidente.

O esquema geral de um divisor de feixes é mostrado na Fig.1.

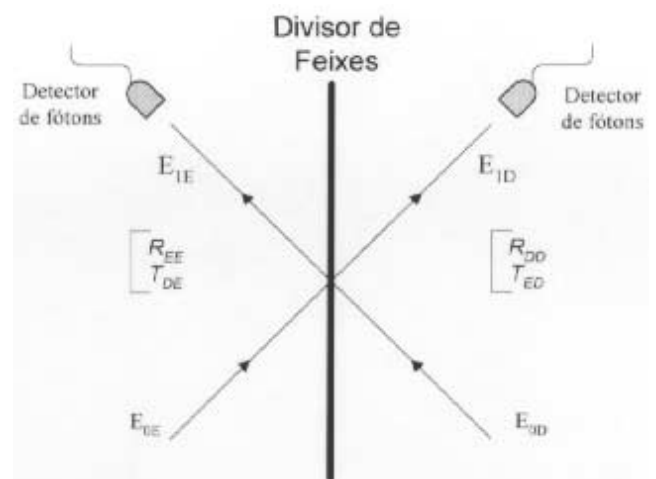


Figura 1. Esquema geral de um divisor de feixes juntamente com detectores de fótons.  $E_{0D}$  e  $E_{0E}$  ( $E_{1D}$  e  $E_{1E}$ ) são os feixes dos campos incidentes (emergentes) pelos lados direito e esquerdo, respectivamente.  $R_{DD}$  e  $T_{ED}$  ( $R_{EE}$  e  $T_{DE}$ ) são os coeficientes de reflexão e de transmissão referentes ao lado direito (esquerdo) do divisor de feixes.

Da Fig.1 vemos que os campos emergentes (representados pelas amplitudes complexas  $E_{1E}$  e  $E_{1D}$ )

\* celsov@df.ufscar.br

relacionam-se com os campos incidentes (representados pelas amplitudes complexas  $E_{0E}$  e  $E_{0D}$ ) segundo

$$E_{1E} = R_{EE}E_{0E} + T_{DE}E_{0D}, \quad (1)$$

$$E_{1D} = T_{ED}E_{0E} + R_{DD}E_{0D}, \quad (2)$$

em que  $R_{EE}$  representa a parte refletida, para o lado esquerdo, de um feixe que incide à esquerda do espelho;  $T_{ED}$  representa a parte transmitida, para o lado direito, de um feixe que incide do lado esquerdo;  $R_{DD}$  representa a parte refletida, para o lado direito, de um feixe que incide do lado direito e, finalmente,  $T_{DE}$  é a parte transmitida, para o lado esquerdo, de um feixe que incide do lado direito. Dessa forma, a Eq.(1) deve ser assim lida: a parte do feixe que emerge do lado esquerdo ( $E_{1E}$ ) é igual à fração refletida à esquerda do feixe que incide do lado esquerdo ( $R_{EE}$ ) mais a fração transmitida à esquerda do feixe que incide pelo lado direito ( $T_{DE}$ ). A Eq.(2) deve ser lida de modo análogo.

Como não há perdas envolvidas, da conservação da energia devemos ter

$$|\mathbf{E}_{1E}|^2 + |\mathbf{E}_{1D}|^2 = |\mathbf{E}_{0E}|^2 + |\mathbf{E}_{0D}|^2, \quad (3)$$

que nos diz que a soma das energias dos feixes emergentes à esquerda e à direita é igual à soma das energias dos feixes que incidem à direita e à esquerda. Para verificar essa relação basta somar o quadrado das Eqs.(1) e (2) impor as seguintes condições:

$$|R_{EE}|^2 + |T_{DE}|^2 = |T_{ED}|^2 + |R_{DD}|^2 = 1, \quad (4)$$

$$R_{EE}T_{ED}^* + T_{DE}R_{DD}^* = T_{ED}R_{EE}^* + R_{DD}T_{DE}^* = (6)$$

Em notação matricial as Eqs.(1) e (2) podem ser escritas como

$$\begin{pmatrix} E_{1E} \\ E_{1D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{EE} & T_{DE} \\ T_{ED} & R_{DD} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{0E} \\ E_{0D} \end{pmatrix} \quad (6)$$

ou, ainda,

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{R}\mathbf{E}_0 \quad (7)$$

com

$$\mathbf{E}_i = \begin{pmatrix} E_{iE} \\ E_{iD} \end{pmatrix}, (i = 0 \text{ ou } 1)$$

e

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_{EE} & T_{DE} \\ T_{ED} & R_{DD} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Toda a informação necessária para se obter os coeficientes de saída em função dos coeficientes de entrada está na matriz  $\mathbf{R}$ . Ainda, como não há perdas no divisor de feixes, podemos inverter a equação matricial para obter os feixes de entrada em função dos feixes de saída e vice-versa. Isto implica que a matriz  $\mathbf{R}$  deve possuir uma inversa, de modo que podemos multiplicar a Eq.(7) à esquerda por  $\mathbf{R}^{-1}$  para obter

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{E}_1. \quad (9)$$

No tratamento clássico, podemos interpretar a Eq.(6) como descrevendo uma rotação  $\mathbf{R}$  de um sistema de coordenadas (bidimensional)  $\mathbf{E}_0$  em relação a outro sistema de coordenadas ortogonal  $\mathbf{E}_1$ . Note que das Eqs.(4) e (5) segue que

$$\begin{aligned} \mathbf{R}\mathbf{R}^{-1} &= \begin{pmatrix} R_{EE} & T_{DE} \\ T_{ED} & R_{DD} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{EE}^* & T_{ED}^* \\ T_{DE}^* & R_{DD}^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} |R_{EE}|^2 + |T_{DE}|^2 & R_{EE}T_{ED}^* + T_{DE}R_{DD}^* \\ T_{ED}R_{EE}^* + R_{DD}T_{DE}^* & |T_{ED}|^2 + |R_{DD}|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (10)$$

A relação  $\mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}$  pode ser demonstrada de forma análoga, observando que  $|T_{DE}| = |T_{ED}|$ .

A seguir vamos estudar dois tipos de divisores de feixe: o *simétrico*, em que os coeficientes de transmissão e de reflexão dos feixes de um lado do espelho são iguais, respectivamente, aos coeficiente de transmissão e de reflexão dos feixes do outro lado; e o *assimétrico*, em que essa condição não é mais verdadeira [7].

a) *Divisor de feixes simétrico.*

Neste caso, por definição, podemos escrever,  $R_{EE} = R_{DD} = R$  e  $T_{DE} = T_{ED} = T$ . Escrevendo esses coeficientes na forma polar, isto é,  $R = |R|e^{i\theta_R}$  e  $T = |T|e^{i\theta_T}$ , e substituindo na Eq.(5) obtemos a seguinte relação:

$$\begin{aligned} TRe^{i(\theta_R - \theta_T)} + RTe^{-i(\theta_R - \theta_T)} &= 2TR\cos(\theta_R - \theta_T) = 0 \\ \therefore (\theta_R - \theta_T) &= \pm\pi/2, \end{aligned} \quad (11)$$

ou seja, em um divisor de feixes *simétrico*, a diferença de fase entre os feixes transmitido e refletido é de  $\pm\pi/2$ .

b) *Divisor de feixes assimétrico.*

Neste caso fazemos uso da analogia com o caso de rotações dos vetores no espaço de Hilbert para sistemas de dois níveis, como por exemplo um sistema de spin- $\frac{1}{2}$  em um campo magnético, ou, de maneira geral, fazemos uma analogia com a álgebra de spinores. O operador de rotação mais geral para um sistema de dois níveis (ou na álgebra de spinores) é dado por[10]

$$\hat{\mathbf{R}}_{\sigma} = e^{i\phi \vec{\sigma} \cdot \hat{n}} = \cos(\phi)\mathbf{1} + i \vec{\sigma} \cdot \hat{n} \sin(\phi). \quad (12)$$

sendo  $\phi$  o ângulo da rotação desejada,  $\hat{n}$  um vetor unitário dado por

$$\hat{n} = (a, b, c), \quad a^2 + b^2 + c^2 = 1 \quad (13)$$

e  $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  é um operador vetorial cujas componentes são as matrizes de Pauli:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Fazendo o produto escalar  $\vec{\sigma} \cdot \hat{n}$  na Eq.(12) o operador  $\hat{\mathbf{R}}_{\sigma}$  ainda pode ser escrito como

$$\hat{\mathbf{R}}_{\sigma} = e^{i\phi \vec{\sigma} \cdot \hat{n}} = \gamma_0 \mathbf{1} + i(\gamma_1 \sigma_1 + \gamma_2 \sigma_2 + \gamma_3 \sigma_3), \quad (15)$$

com os coeficientes dados por

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \cos(\phi), & \gamma_1 &= a \sin(\phi), \\ \gamma_2 &= b \sin(\phi), & \gamma_3 &= c \sin(\phi), \end{aligned} \quad (16)$$

ou, ainda, somando as matrizes,

$$\hat{\mathbf{R}}_{\sigma} = \begin{pmatrix} \gamma_0 + i\gamma_3 & i\gamma_1 + \gamma_2 \\ i\gamma_1 - \gamma_2 & \gamma_0 - i\gamma_3 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

A Eq.(17), quando comparada à Eq.(8), nos dá as seguintes relações

$$\left. \begin{aligned} \gamma_0 + i\gamma_3 &= R_{EE} \\ \gamma_0 - i\gamma_3 &= R_{DD} \end{aligned} \right\} \therefore R_{EE} = R_{DD}^* \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} i\gamma_1 + \gamma_2 &= T_{DE} \\ i\gamma_1 - \gamma_2 &= T_{ED} \end{aligned} \right\} \therefore T_{DE} = -T_{ED}^*. \quad (19)$$

Novamente, vamos escrever na forma polar os seguintes coeficientes

$$T_{DE} = |T_{DE}| e^{i\phi_{DE}}, \quad T_{ED} = |T_{ED}| e^{i\phi_{ED}}, \quad (20)$$

$$R_{DD} = |R_{DD}| e^{i\phi_{DD}}, \quad R_{EE} = |R_{EE}| e^{i\phi_{EE}} \quad (21)$$

lembrando que a notação para as fases é a mesma para os coeficientes de reflexão e transmissão ( por exemplo,  $\phi_{DE}$  representa a fase do feixe que é transmitido à esquerda tendo incidido pelo lado direito). Substituindo essas últimas equações nas Eqs. (18) e (19), obtemos a

seguinte relação entre as fases dos feixes de entrada e saída:

$$\phi_{DD} + \phi_{EE} = \pm n\pi, \quad n = 0, 2, 4, \dots (\text{par}) \quad (22)$$

$$\phi_{DE} + \phi_{ED} = \pm n\pi, \quad n = 1, 3, \dots (\text{ímpar}), \quad (23)$$

$$|T_{DE}| = |T_{ED}| = T \quad (24)$$

$$|R_{EE}| = |R_{DD}| = R. \quad (25)$$

As Eqs.(24) e (25) mostram que a porção transmitida à esquerda é igual à porção transmitida à direita, e que a porção refletida à esquerda é igual à porção refletida à direita. As Eqs.(22) e (23) nos dão uma relação entre as fases dos diversos feixes, e a seguir vamos simplificá-la para uma relação somente entre os feixes refletido e transmitido.

Denominando a diferença de fase entre os feixes refletido e transmitido do lado direito por  $\delta_D$ , e a diferença de fase entre os feixes refletido e transmitido do lado esquerdo por  $\delta_E$ , podemos escrever

$$\delta_D = \phi_{DD} - \phi_{DE} \quad (26)$$

$$\delta_E = \phi_{EE} - \phi_{ED}. \quad (27)$$

Substituindo essas duas últimas relações nas Eqs.(22) e (23), obtemos finalmente a relação para as diferenças de fase entre os feixes incidente e transmitido como sendo

$$\delta_D + \delta_E = \pm n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (28)$$

e podemos observar que para o caso simétrico  $\delta_D = \delta_E = \pm\pi/2$ , como deveria ser.

### III Importância do vácuo no tratamento quântico de divisores de feixe

Para ilustrar a importância que o vácuo algumas vezes adquire no tratamento quântico, vamos analisar a Fig.(2)[8]. Nessa figura consideramos um único modo  $E_{0E}$  incidente, que dá origem aos modos refletido  $E_{1E}$  e transmitido  $E_{1D}$ . Se no modo  $E_{0D}$  não há feixe incidente, então classicamente as Eqs.(1) e (2) resultam em ( $E_{0D} = 0$ )

$$E_{1E} = R_{EE} E_{0E} \quad (29)$$

$$E_{1D} = T_{ED} E_{0E}. \quad (30)$$

Da conservação da energia, Eq.(3), teremos

$$|E_{1E}|^2 + |E_{1D}|^2 = |E_{0E}|^2, \quad (31)$$

indicando que a energia do feixe incidente é conservada.

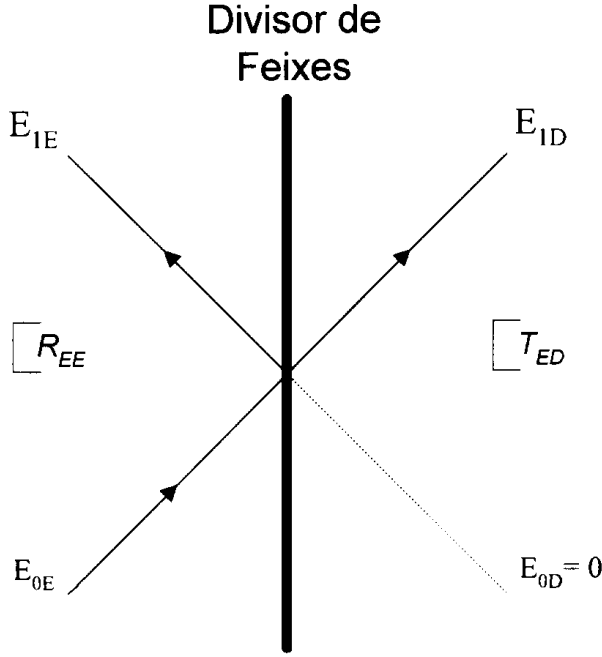


Figura 2. Divisor de feixes com entrada  $E_{0D} = 0$ .  $E_{0E}$ ,  $E_{1D}$  e  $E_{1E}$  são os feixes dos campos incidente pelo lado esquerdo e emergentes pelos lados direito e esquerdo, respectivamente.  $R_{DD} = T_{DE} = 0$ ,  $T_{ED}$  e  $R_{EE}$  são os coeficientes de transmissão e de reflexão referentes ao lado direito e esquerdo, respectivamente, do divisor de feixes.

Consideremos agora o caso quântico, e apliquemos um raciocínio similar no tratamento do campo quantizado. Ao fazermos isso, as amplitudes clássicas do campo eletromagnético  $E_{1E}$ ,  $E_{1D}$  e  $E_{0E}$  devem ser substituídas pelas amplitudes complexas dos operadores dos campos de entrada e saída. Façamos então a seguinte correspondência, chamando os modos de entrada de  $\hat{a}_i$ ,  $\hat{b}_i$  e os modos de saída de  $\hat{a}_0$ ,  $\hat{b}_0$ :

$$E_{0E} \rightarrow \hat{a}_i, E_{1E} \rightarrow \hat{b}_0, E_{1D} \rightarrow \hat{a}_0. \quad (32)$$

Esses operadores devem obedecer às relações canônicas para o campo quantizado:

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger] = [\hat{a}_0, \hat{a}_0^\dagger] = [\hat{b}_0, \hat{b}_0^\dagger] = 1; \quad (33)$$

$$[\hat{a}_0, \hat{b}_0^\dagger] = 0. \quad (34)$$

Essa última relação, diferente das relações dadas pela Eq.(33), reflete o fato de que os feixes de saída podem ser medidos sem que um perturbe o outro. Entretanto, se simplesmente fizermos a substituição indicada pela relação (32) na Eqs.(29) e (30), veremos que as relações de comutação (33) e (34) deixam de ser válidas para os feixes  $\hat{b}_0$  e  $\hat{a}_0$ , ou seja

$$\begin{aligned} [\hat{b}_0, \hat{b}_0^\dagger] &= |R_{DD}|^2 [\hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger] = |r|^2 \\ [\hat{a}_0, \hat{a}_0^\dagger] &= |T_{DE}|^2 [\hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger] = |t|^2 \\ [\hat{a}_0, \hat{b}_0^\dagger] &= T_{DE}^* R_{DD} [\hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger] = T_{DE}^* R_{DD}. \end{aligned}$$

A razão para a falha das relações de comutação é porque ignoramos a outra entrada do divisor de feixes da Fig.2, o que é justificável no tratamento clássico pois nenhum campo entra por ali. Entretanto, ainda que não haja fluxo de energia pelo modo  $E_{0D}$ , em um tratamento quântico da radiação há um campo no vácuo em um dos canais de entrada que contribui para os dois modos de saída. Isto nos força a escrever as Eqs.(29) e (30) em termos dos operadores do campo quantizado como (compare com as Eqs.(1) e (2))

$$\hat{b}_0 = R_{EE}\hat{a}_i + T_{DE}\hat{b}_i, \quad (35)$$

$$\hat{a}_0 = T_{ED}\hat{a}_i + R_{DD}\hat{b}_i, \quad (36)$$

com  $\hat{b}_i$  obedecendo relações de comutação idênticas às relações (33) e (34). Com isto podemos verificar, usando a Eq.(4), que

$$\begin{aligned} [\hat{b}_0, \hat{b}_0^\dagger] &= |R_{DD}|^2 [\hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger] + |T_{DE}|^2 [\hat{b}_i, \hat{b}_i^\dagger] \\ &= |R_{DD}|^2 + |T_{DE}|^2 = 1 \end{aligned} \quad (37)$$

e de forma similar verificaremos a relação para  $\hat{a}_0$ . Também, usando a Eq.(5) podemos verificar que

$$\begin{aligned} [\hat{a}_0, \hat{b}_0^\dagger] &= T_{DE}^* R_{DD}^2 [\hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger] + T_{DE} R_{DD}^* [\hat{b}_i, \hat{b}_i^\dagger] \\ &= T_{DE}^* R_{DD} + T_{DE} R_{DD}^* = 0, \end{aligned} \quad (38)$$

como deveria. Vemos portanto que o vácuo tem um papel fundamental no tratamento quântico de divisores de feixe, sendo necessário para preservar as relações de comutação. Também em outras áreas da eletrodinâmica quântica o vácuo tem algumas conseqüências que aparentemente não apresentam nenhum análogo clássico.

## IV Generalização para o caso de perdas nos divisores de feixes e nos fotodetectores

### IV.1 Perda nos divisores de feixe

Primeiramente, vamos escrever os coeficientes e os operadores correspondentes ao tratamento quântico das Eqs.(1) e (2) em função da frequência do campo de radiação, abrangendo o caso mais geral [9]. Os operadores do campo quantizado (ou bosônicos) referentes aos modos de entrada e saída do divisor de feixes obedecerão às seguintes relações de comutação

$$[\hat{a}(\omega), \hat{a}^\dagger(\omega')] = [\hat{b}(\omega), \hat{b}^\dagger(\omega)] = \delta(\omega - \omega') \quad (39)$$

$$[\hat{a}(\omega), \hat{b}^\dagger(\omega')] = [\hat{b}(\omega), \hat{a}^\dagger(\omega')] = 0, \quad (40)$$

em que a função delta de Dirac  $\delta(\omega - \omega')$  foi incluída para levar em conta um contínuo de modos da radiação. Se apenas uns poucos modos forem relevantes, devemos substituir a delta de Dirac por uma delta de Kronecker (caso discreto). Para simplificar, vamos denotar os coeficientes de transmissão e reflexão simplesmente por  $t(\omega)$  e  $r(\omega)$ , respectivamente, os quais ainda devem satisfazer as propriedades descritas nas equações (4) e (5), que decorrem das propriedades de unitariedade da matriz  $\mathbf{R}$ :

$$|t(\omega)|^2 + |r(\omega)|^2 = 1, \quad (41)$$

$$t(\omega)r^*(\omega) + t^*(\omega)r(\omega) = 0. \quad (42)$$

Na prática, alguma parte da luz incidente sobre um divisor de feixes não é nem transmitida e nem refletida, e sim absorvida. Essa é uma consequência inevitável da dependência na frequência dos coeficientes de transmissão e de reflexão. O material do divisor de feixes deve, por exemplo, tender à transparência,  $r(\omega) \rightarrow 0$ , quando  $\omega$  tende a infinito. A presença de fotoabsorção nos divisores de feixes não modifica as relações de comutação (39) e (40) quando consideradas *fora* do divisor de feixes, isto é, *para o campo livre*. Entretanto, as relações entre os sinais de entrada e de saída de um divisor de feixes, Eq.(35) e Eq.(36), assim como as relações (37,41) e (38,42), devem ser modificadas. Uma das formas de incluir as perdas no divisor de feixes é introduzir operadores de campo responsáveis pela fotoabsorção, de tal forma que para cada fóton destruído no campo incidente haverá um fóton criado nas paredes do divisor de feixe. Podemos então escrever uma relação geral entre os campos incidentes e emergentes, levando em conta as perdas, fazendo uso de mais um operador de campo:

$$\hat{a}_o(\omega) = t(\omega)\hat{a}_i(\omega) + r(\omega)\hat{b}_i(\omega) + \hat{F}_a(\omega), \quad (43)$$

$$\hat{b}_o(\omega) = t(\omega)\hat{b}_i(\omega) + r(\omega)\hat{a}_i(\omega) + \hat{F}_b(\omega), \quad (44)$$

sendo  $\hat{F}_a(\omega)$ ,  $\hat{F}_b(\omega)$  e seus correspondentes  $\hat{F}_a^\dagger(\omega)$ ,

$\hat{F}_b^\dagger(\omega)$  operadores que descrevem o processo de perda e ganho de fótons, respectivamente, pelas paredes do divisor de feixes. A Eq.(43) deve ser assim interpretada: a amplitude do campo correspondente ao modo de saída  $\hat{a}_o$  é igual à soma da amplitude incidente no modo de entrada  $\hat{a}_i$  com a amplitude incidente no modo de entrada  $\hat{b}_i$  mais a amplitude perdida por absorção para modo  $\hat{F}_a$  do divisor de feixes. A Eq.(44) tem uma interpretação análoga.

O processo de ganho e perda no divisor de feixes é em geral tratado de forma estocástica, de maneira que os operadores associados com as perdas obedeçam a determinadas correlações para certos valores médios. Por causa da analogia com o tratamento dado ao movimento Browniano por Langevin, os operadores  $\hat{F}_a(\omega)$ ,  $\hat{F}_b(\omega)$  são também chamados de *operadores de ruído de Langevin*, os quais são associados com as perdas aleatórias dentro do meio que forma o divisor de feixes. Entretanto, no tratamento descrito nesta seção veremos que todas as propriedades dos operadores  $\hat{F}_a(\omega)$ ,  $\hat{F}_b(\omega)$  necessárias para a inclusão das perdas podem ser deduzidas das relações de comutação para os operadores de campo livre, sem nenhuma hipótese adicional sobre seus valores médios e correlações.

Com a inclusão das perdas, uma constatação imediata é que a relação (41) deve ser substituída pela desigualdade

$$|t(\omega)|^2 + |r(\omega)|^2 \leq 1, \quad (45)$$

e, portanto, a propriedade de unitariedade da matriz  $\mathbf{R}$ , Eq.(10), deixa de ser válida, e dizemos então que o processo é irreversível.

Notando que os campos incidentes representados pelos operadores  $\hat{a}_i(\omega)$ ,  $\hat{b}_i(\omega)$  e as fontes de ruído dentro dos espelhos representados pelos operadores de Langevin  $\hat{F}_b(\omega)$ ,  $\hat{F}_a^\dagger(\omega)$  são independentes, e que portanto devem comutar entre si, podemos escrever

$$\left[ \hat{a}_i(\omega), \hat{F}_a(\omega) \right] = \left[ \hat{a}_i(\omega), \hat{F}_b(\omega) \right] = \left[ \hat{a}_i(\omega), \hat{F}_a^\dagger(\omega) \right] = \left[ \hat{a}_i(\omega), \hat{F}_b^\dagger(\omega) \right] = 0, \quad (46)$$

com relações similares para os operadores  $\hat{b}$ . Da mesma forma, a imposição das relações de comutação bosônicas para os operadores dos modos de saída do campo livre nas Eq.(43) e (44) nos conduz às requeridas relações de comutação para os operadores de ruído:

$$\begin{aligned} \left[ \hat{F}_a(\omega), \hat{F}_a^\dagger(\omega') \right] &= \left[ \hat{F}_b(\omega), \hat{F}_b^\dagger(\omega') \right] = \delta(\omega - \omega') \left[ 1 - (|t(\omega)|^2 + |r(\omega)|^2) \right] \\ &= \delta(\omega - \omega')\Gamma(\omega), \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \left[ \hat{F}_a(\omega), \hat{F}_b^\dagger(\omega') \right] &= \left[ \hat{F}_b(\omega), \hat{F}_a^\dagger(\omega') \right] = -\delta(\omega - \omega') (t(\omega)r^*(\omega) + r(\omega)t^*(\omega)) \\ &= -\delta(\omega - \omega')\Omega. \end{aligned} \quad (48)$$

Podemos notar que  $\Gamma(\omega) = 1 - (|t(\omega)|^2 + |r(\omega)|^2)$  é justamente a constante de amortecimento ou o fator de perda, e também que  $\Gamma(\omega)$  é zero para o caso ideal (ou reversível) em que  $|t(\omega)|^2 + |r(\omega)|^2 = 1$ .

Por simplicidade, vamos considerar apenas o caso em que os campos incidentes estão na faixa de frequências ópticas. Nesse caso o espelho não é capaz de criar fótons nessa frequência em nenhum dos modos envolvidos, sendo apenas responsável pela absorção. Isto significa que o estado do meio material que forma o divisor de feixes pode muito bem ser aproximado pelo estado de vácuo, mesmo a temperatura ambiente. Nesse caso devemos ter

$$\widehat{F}_a(\omega) |\mathbf{0}\rangle = \widehat{F}_b(\omega) |\mathbf{0}\rangle = \widehat{a}_i(\omega) |\mathbf{0}\rangle = \widehat{b}_i(\omega) |\mathbf{0}\rangle = 0, \quad |\mathbf{0}\rangle \equiv |0, 0, \dots, 0\rangle \quad (49)$$

e como consequência as médias quânticas dos operadores de Langevin são nulas:

$$\langle \widehat{F}_a(\omega) \rangle = \langle \widehat{F}_b(\omega) \rangle = \langle \widehat{F}_a^\dagger(\omega) \rangle = \langle \widehat{F}_b^\dagger(\omega) \rangle = 0. \quad (50)$$

Os únicos valores esperados não nulos para o meio-ambiente no estado de vácuo (ou fundamental) podem ser obtidos tomando-se a média das relações de comutação (47) e (48):

$$\langle \widehat{F}_a(\omega) \widehat{F}_a^\dagger(\omega') \rangle = \langle \widehat{F}_b(\omega) \widehat{F}_b^\dagger(\omega') \rangle = \delta(\omega - \omega') \Gamma(\omega), \quad (51)$$

$$\langle \widehat{F}_a(\omega) \widehat{F}_b^\dagger(\omega') \rangle = \langle \widehat{F}_b(\omega) \widehat{F}_a^\dagger(\omega') \rangle = -\delta(\omega - \omega') (t(\omega)r^*(\omega) + r(\omega)t^*(\omega)). \quad (52)$$

As Eqs.(50)-(52), aqui deduzidas das relações de comutação para os campos livres, são as mesmas impostas por Langevin para descrever o movimento de uma partícula browniana num fluido em termos de forças estocásticas[11].

## IV.2 Perda nos fotodetectores

As perdas nos fotodetectores em geral são estudadas através da função de distribuição de contagem de fótons (ver, por ex., ref.[8]). Entretanto, para unificar o tratamento com perdas através de operadores de Langevin, vamos fazer uso do método desenvolvido na ref. [2]. Para isto vamos introduzir operadores de saída que levem em conta a detecção de um dado campo nos modos de entrada  $a_0$ ,  $b_0$  que atingem os detectores, conforme a Fig.1, e escreveremos

$$\widehat{a}_{out} \longrightarrow \sqrt{\eta} \widehat{a}_{out} + \widehat{\mathcal{L}}_\alpha, \quad \alpha = a, b \quad (53)$$

sendo  $\eta$  a eficiência dos detectores. Diferentemente para o caso dos operadores de perda nos divisores de feixes, os operadores de Langevin para os detectores não acoplam modos diferentes do campo eletromagnético, o que pode ser visto impondo as relações de comutação para  $\widehat{a}_{out}$ ,  $\alpha = a, b$  na relação acima. Ao impormos as relações de comutação para  $\widehat{a}_{out}$ ,  $\alpha = a, b$  veremos que os operadores de Langevin  $\widehat{\mathcal{L}}_\alpha$ , além de satisfazerem todas as propriedades introduzidas na seção anterior, também obedecerão às relações de comutação

$$[\widehat{\mathcal{L}}_\alpha, \widehat{\mathcal{L}}_\alpha^\dagger] = 1 - \eta, \quad (54)$$

$$[\widehat{\mathcal{L}}_\alpha, \widehat{\mathcal{L}}_\beta^\dagger] = 0 \quad (55)$$

e os valores esperados para o produto de pares desses operadores, considerando por simplicidade o meio ambiente no estado fundamental, são

$$\langle \widehat{\mathcal{L}}_\alpha \widehat{\mathcal{L}}_\alpha^\dagger \rangle = 1 - \eta, \quad (56)$$

$$\langle \widehat{\mathcal{L}}_\alpha \widehat{\mathcal{L}}_\beta^\dagger \rangle = 0. \quad (57)$$

As relações (56) e (57) são análogas às relações (51) e (52). Aqui,  $1 - \eta$  desempenha o mesmo papel que  $\Gamma$  representou para as perdas nos divisores de feixe. A seguir mostramos como tratar de forma unificada as perdas nos divisores de feixe e nos detectores.

## IV.3 Relação geral para os erros

Vamos agora introduzir uma álgebra que leve em conta tanto as fontes de erro relativas à fotoabsorção nos divisores de feixes, Eqs.(43) e (44), quanto àquelas relativas à ineficiência dos detectores, Eq.(53).

Para fazer um tratamento unificado das perdas, observamos que os operadores de saída  $\widehat{a}_{out}$ ,  $\widehat{b}_{out}$ , os quais descrevem os campos que chegam nos detectores, podem ser descritos em função dos operadores de entrada  $\widehat{a}_{in}$ ,  $\widehat{b}_{in}$  na seguinte forma

$$\widehat{a}_{out} = \mathbf{t} \widehat{a}_{in} + \mathbf{r} \widehat{b}_{in} + \widehat{\mathbf{L}}_a, \quad (58)$$

$$\widehat{b}_{out} = \mathbf{t} \widehat{a}_{in} + \mathbf{r} \widehat{b}_{in} + \widehat{\mathbf{L}}_b, \quad (59)$$

com  $\mathbf{t} = \sqrt{\eta}t$ ,  $\mathbf{r} = \sqrt{\eta}r$  e  $\widehat{\mathbf{L}}_\alpha = \widehat{\mathcal{L}}_\alpha + \widehat{F}_\alpha$ ,  $\alpha = a, b$ . Essas equações devem ser interpretadas da seguinte forma: a amplitude do feixe detectado correspondente a um dado modo é igual à soma da fração transmitida do feixe que é detectada, mais a fração do feixe

que é refletida e chega ao detector, mais a parte absorvida pelas paredes do divisor de feixes e pelo detector. A partir das relações de comutação dos operadores de criação e de destruição de fótons para o campo livre ( $[\hat{\alpha}_{out}, \hat{\alpha}_{out}^\dagger] = 1$ , relações  $\alpha = a, b$  podemos deduzir as relações para os operadores de Langevin. Para o caso discreto, podemos escrever:

$$[\hat{\mathbf{L}}_\alpha, \hat{\mathbf{L}}_\alpha^\dagger] = [\hat{\mathbf{L}}_\beta, \hat{\mathbf{L}}_\beta^\dagger] = \eta\Gamma + (1 - \eta), \quad (60)$$

$$[\hat{\mathbf{L}}_\alpha, \hat{\mathbf{L}}_\beta^\dagger] = [\hat{\mathbf{L}}_\beta, \hat{\mathbf{L}}_\alpha^\dagger] = -\eta\Omega. \quad (61)$$

Como esperávamos, considerando  $\eta = 1$  em (60) e (61) recuperamos as relações (47) e (48), enquanto que para  $\Gamma = \Omega = 0$  recuperamos as relações (54) e (55), respectivamente.

## V Conclusões

Neste artigo apresentamos de forma didática uma álgebra para a inclusão de perdas devidas à fotoabsorção em espelhos divisores de feixes bem como perdas devidas à ineficiência dos detectores. A motivação desta apresentação é a grande aplicação que os espelhos divisores de feixe vêm tendo nos experimentos em óptica quântica, em especial em testes de fundamentos da mecânica quântica e em processos de comunicação quântica como vemos, por exemplo, nas refs. [1-4].

## Agradecimentos

Os autores agradecem a FAPESP pelo suporte financeiro.

## References

- [1] M. Dakna, J. Clausen, L. Knöll, and D. G. Welsch, Phys. Rev. A **59**, 1658 (1999).
- [2] C. J. Villas-Bôas, N. G. de Almeida, and M. H. Y. Moussa, Phys. Rev. A **60**, 2759 (1999).
- [3] N. J. Cerf, C. Adami, and P. G. Kwiat, Phys. Rev. A **57**, R1477 (1999).
- [4] D. Mogilevtsev, Phys. Rev. A **57** 2146 (1999).
- [5] L. Davidovich, Rev. of Modern Physics, **68**, 127 (1996).
- [6] ver, por exemplo, Max Born and Emil Wolf, *Principles of Optics*, Pergamon Press, sexta edição, pág. 36.
- [7] A. Zeilinger, Am. Journal Phys. **49**, 882 (1981).
- [8] L. Mandel and Emil Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics*, Cambridge University Press, 1995, pág. 511.
- [9] Stephen M. Barnett, John Jeffers, Alessandra Gatti, and Rodney Loudon Phys. Rev. A **57**, 2134 (1998).
- [10] ver, por exemplo, Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, and Franck Lalöë, *Quantum Mechanics*, Wiley-Interscience, vol. I, pág. 690.
- [11] W. T. Coffey, Yu. P. Kalmykov, and J. T. Waldron, *The Langevin Equation*, World Scientific, 1996, pág. 9.