

A Álgebra dos Férmions

(The Algebra of Fermions)

C. E. I. Carneiro⁽¹⁾ e M. T. Thomaz⁽²⁾

⁽¹⁾ Instituto de Física,
Universidade de São Paulo,
Caixa Postal 66318,
05315-970, São Paulo, SP, Brasil

⁽²⁾ Instituto de Física
Universidade Federal Fluminense
Av. Gal. Milton Tavares de Souza, s/nº,
24210-340, Niterói, RJ, Brasil

Recebido em 28 de Fevereiro, 2000. Aceito em 15 de Setembro, 2000.

Na versão de Schrödinger da Mecânica Quântica o estado quântico das partículas é descrito por funções de onda, e quantidades físicas, como a energia, o momento, etc, são associadas a operadores que agem sobre estas funções de onda. Um formalismo alternativo foi proposto por Feynman em 1948. Em sua abordagem calculam-se amplitudes de probabilidade somando-se sobre funções usuais que representam trajetórias da partícula. No caso de férmions, essas funções têm natureza não-comutativa devido ao princípio da exclusão de Pauli. Neste trabalho apresentamos uma introdução didática à álgebra destes objetos não comutativos, também conhecida como álgebra de Grassmann. Discutimos também alguns exemplos simples e indicamos algumas aplicações recentes deste formalismo na física.

In Schrödinger's version of Quantum Mechanics the quantum states of particles are described by wave functions, and physical quantities, like energy, momentum, etc, are associated with operators that act on these wave functions. An alternative formalism was proposed by Feynman in 1948. In his approach one calculates the probability amplitudes by summing over ordinary functions that represent trajectories of the particle. In the case of fermions these functions have a non-commutative nature due to the Pauli's exclusion principle. In this paper we present a didactic introduction to the algebra of these non-commutative objects, also known as Grassmann algebra. We also discuss some simple examples and indicate some recent applications of this formalism in Physics.

I Introdução

Na Mecânica Clássica a cinemática de uma partícula é descrita por funções, que em geral variam no tempo, associadas à posição, ao momento linear e ao momento angular desta partícula ao longo do seu movimento. No entanto, na Mecânica Quântica as quantidades físicas, tais como posição, momento linear e momento angular, estão associadas a operadores. Estes operadores agem sobre vetores de estado (funções de onda) que fornecem toda a informação disponível sobre o sistema quântico[1].

Certamente, é mais difícil trabalhar com operadores do que com funções. P.A.M. Dirac, no intuito de obter um formalismo lagrangiano para descrever siste-

mas quânticos, propôs em 1933[2] uma expressão para a amplitude de probabilidade para uma partícula localizada na posição x_i no instante t_i ser encontrada na posição x_f no instante t_f , em termos de uma integral que soma sobre todas as trajetórias de partícula em comecem em (x_i, t_i) e terminem em (x_f, t_f) . Entretanto, Dirac só tratou esta integral de trajetórias no limite em que $\hbar \rightarrow 0$, sendo \hbar a constante de Planck que caracteriza os fenômenos quânticos. Em 1948 R. Feynman retomou a esta formulação para descrever valores esperados de quantidades físicas e explorou as potencialidades do método para $\hbar \neq 0$ [3, 4, 5]. Atualmente o método de integrais de trajetória é utilizado nas mais variadas áreas da Física[6].

Na Natureza temos dois tipos distintos de

partículas: bósons e férmions, que satisfazem a estatísticas diferentes[1]. A integral de trajetória proposta por Feynman é sensível à natureza da partícula. No caso de bósons, a integral de trajetória soma sobre funções usuais (comutantes) que representam, todas as possíveis trajetórias que têm a partícula na posição x_i no instante t_i e na posição x_f no instante t_f . Essas funções são denominadas de comutantes, uma vez que o resultado do produto de duas ou mais dessas funções é independente da ordem em que aparecem no produto. No caso de uma partícula fermiônica, as funções são anticomutativas. Essas funções são escritas em termos dos geradores de uma álgebra não-comutativa. Como não é usual trabalhar com funções anticomutantes, usualmente se utiliza de um conjunto de truques para reescrever as integrais de trajetória associadas a sistema fermiônico em termos de funções usuais (comutantes).

Vamos apresentar neste artigo as propriedades básicas da álgebra não-comutativa de Grassmann e mostrar como relacioná-la a um sistema fermiônico quântico. Veremos que apesar da não-comutatividade dos geradores desta álgebra, sob vários aspectos os cálculos são mais simples do que os correspondentes para bósons. Uma abordagem mais matemática, complementar à nossa, pode ser encontrada no artigo de Mundim e Mundim [7], em que também encontramos um resumo da biografia de Hermann Günther Grassmann. Na seção II apresentamos as propriedades básicas da álgebra não-comutativa de dimensão $d = 2^2$ e definimos algumas operações nesta álgebra, tais como: derivada, integral, produto escalar, etc.. Na seção III apresentamos uma breve revisão dos operadores de criação e aniquilação fermiônico e suas respectivas ações sobre vetores de estado com número definido de partículas. Mostramos como relacionar a álgebra de Grassmann com sistemas fermiônicos e obtemos resultados úteis para a sua aplicação. Na seção IV apresentamos um resumo dos resultados da seção III estendidos para a álgebra de Grassmann de dimensão $d = 2^{2^N}$. Na seção V mostramos como as propriedades da álgebra de Grassmann introduzidas anteriormente podem ser utilizadas para calcular quantidades físicas associadas a sistemas fermiônicos simples, e indicamos alguns trabalhos nos quais álgebra de Grassmann auxiliou na obtenção de resultados em sistemas fermiônicos quânticos mais complexos. Finalmente, na seção VI resumimos o conteúdo deste artigo.

II A Álgebra de Grassmann e suas Propriedades Básicas

Normalmente na Mecânica Clássica e na Mecânica Quântica trabalhamos com funções que são soluções de equações diferenciais que descrevem a dinâmica do sistema estudado. Essas funções comutam entre si, daí estarmos acostumados apenas a utilizar a álgebra co-

mutativa como ferramenta matemática para estudar os modelos físicos. A álgebra comutativa com que trabalhamos normalmente será chamada de agora em diante de **álgebra usual** quando estivermos fazendo menção a ela. No entanto, objetos que não comutam entre si não são estranhos à nossa formação, basta lembrar que matrizes em geral não comutam entre si. Existe uma formulação matricial da Mecânica Quântica proposta por Heisenberg[1]. A álgebra de Grassmann não tem nenhum ponto em comum com a formulação de Heisenberg para a Mecânica Quântica, no entanto, este exemplo nos faz lembrar que nem todos os objetos matemáticos que utilizamos para estudar os modelos físicos comutam entre si.

O nosso objetivo é apresentar de forma simples as propriedades da álgebra não-comutativa de Grassmann. Para isso iremos comparar as propriedades da álgebra usual com que trabalhamos com as propriedades e definições desta outra que a princípio parece tão estranha, mas que, conforme veremos, muitas vezes é mais simples de se trabalhar.

Sejam a e b dois números complexos quaisquer da álgebra usual (comutativa), isto é, que satisfazem a relação

$$a \cdot b = b \cdot a \quad \Rightarrow \quad ab - ba = 0, \quad (1)$$

que também pode ser escrita como: $[a, b] = 0$. Sejam x e y duas variáveis que comutam entre si ($[x, y] = 0$), e f e g são funções dessas variáveis. Da relação de comutatividade do produto das variáveis (veja eq.(1)), temos

$$f(x)g(y) - g(y)f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad [f(x), g(y)] = 0. \quad (2)$$

As relações de comutação (1) e (2) definem o que é denominada de **álgebra comutativa**. No entanto, existem outras álgebras, em particular a álgebra de Grassmann, que tratam de variáveis que não comutam entre si. Se η e $\bar{\eta}$ são variáveis grassmannianas, então elas satisfazem as seguintes relações de anticomutação:

$$\{\eta, \bar{\eta}\} \equiv \eta\bar{\eta} + \bar{\eta}\eta = 0 \quad \Rightarrow \quad \eta\bar{\eta} = -\bar{\eta}\eta, \quad (3)$$

$$\{\bar{\eta}, \bar{\eta}\} \equiv \bar{\eta}\bar{\eta} + \bar{\eta}\bar{\eta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{\eta}^2 = 0, \quad (4)$$

$$\{\eta, \eta\} \equiv \eta\eta + \eta\eta = 0 \quad \Rightarrow \quad \eta^2 = 0. \quad (5)$$

As variáveis η e $\bar{\eta}$ são denominadas de **geradores da álgebra**. A dimensão da álgebra é igual ao número máximo de termos linearmente independentes (l.i.) obtidos a partir de seus respectivos geradores. No exemplo da álgebra que estamos considerando, temos os seguintes termos l.i.: $\{1, \eta, \bar{\eta}, \eta\bar{\eta}\}$. A álgebra de Grassmann com dois geradores tem dimensão $d = 2^{2-1} = 4$. A partir da expressão (3) observamos que a ordem com que as variáveis grassmannianas aparecem no produto é importante nesta álgebra. Há uma mudança de sinal quando a ordem de duas variáveis anticomutantes é trocada. Das igualdades (4) e (5) decorre que a potência

de qualquer variável de Grassmann, igual ou maior a 2, é identicamente nula.

II.1 Expansão em Série de Potências de uma Função de Variáveis Grassmannianas

No que se segue, denominaremos x e y de variáveis da álgebra usual, e η e $\bar{\eta}$ variáveis da álgebra de Grassmann. Seja $f(x)$ uma função bem comportada de x na vizinhança de $x = 0$. A expansão da função $f(x)$ em série de potências em torno do ponto $x = 0$ é,

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots, \quad (6)$$

onde os a_i são números.

No caso em que a função $f(x)$ não é um polinômio, sua expansão (eq.(6)) tem um número infinito de termos. No caso em que a função da álgebra usual depende de duas variáveis, isto é, $g(x, y)$, a sua expansão em torno da região $x = 0$ e $y = 0$ é

$$g(x, y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{11}xy + a_{21}x^2y + \dots, \quad (7)$$

onde os a_{ij} são números. É importante notar que em princípio não existe qualquer restrição à ordem das potências de x e y na expansão (7). Os termos não nulos do lado direito (l.d.) da expansão (7) só dependem da particular função $g(x, y)$ que está sendo expandida. As expansões (6) e (7) em princípio podem ter um número infinito de termos.

Seja $f(\eta)$ uma função da variável grassmanniana η . Da relação (5) temos que $\eta^2 = 0$, de forma que a expansão mais geral que podemos escrever para a função $f(\eta)$ é

$$f(\eta) = f_0 + f_1\eta, \quad (8)$$

onde f_0 e f_1 são números (comutantes).

A partir das relações (4) e (5), obtemos a expressão mais geral para uma função $g(\eta, \bar{\eta})$ de duas variáveis não-comutativas:

$$g(\eta, \bar{\eta}) = g_{00} + g_{10}\eta + g_{01}\bar{\eta} + g_{11}\eta\bar{\eta}, \quad (9)$$

sendo g_{ij} números. Lembre-se que potências igual ou maior que 2 de η e $\bar{\eta}$ não aparecem pois $\eta^2 = \bar{\eta}^2 = 0$. Um consequência interessante das eqs. (8) e (9) é que qualquer função que só depende de um número finito de variáveis de Grassmann possui um número finito de termos em sua expansão. Esta propriedade é muito útil quando calculamos, por exemplo, as propriedades de sistemas fermiônicos em equilíbrio termodinâmico[8].

Para ressaltar as diferenças da expansão em série de potências de funções cujas variáveis são comutativas daquelas que dependem de variáveis grassmannianas, consideremos a série de Taylor das funções exponenciais nas duas álgebras:

i) Álgebra Comutativa:

$$\bullet f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad (10)$$

$$\bullet g(x, y) = e^{xy} = 1 + xy + \frac{(xy)^2}{2} +$$

$$\frac{(xy)^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(xy)^n}{n!}. \quad (11)$$

ii) Álgebra de Grassmann:

Definindo a exponencial de uma função grassmanniana através da série de potências desta função de maneira análoga à da álgebra comutativa, chegamos a

$$\bullet f(\eta) = e^\eta = 1 + \eta, \quad (12)$$

$$\bullet g(\eta, \bar{\eta}) = e^{\eta\bar{\eta}} = 1 + \eta\bar{\eta}, \quad (13)$$

onde, novamente, potências maiores que 1 estão ausentes devido às eqs.(4) e (5).

II.2 Derivada e Integral

Na álgebra usual, as operações de derivação e integração são definidas como processos limites. Ambas as operações possuem interpretação geométrica, sendo que cada operação pode ser vista como o inverso da outra. Na álgebra de Grassmann essas operações não são definidas como processos limites nem possuem interpretação geométrica. Nesta álgebra as operações de derivação e integração são definidas como operações **idênticas**.

São **definidas** as seguintes regras para as derivadas dos geradores da álgebra de Grassmann em relação a elas mesmas:

$$\frac{\partial(1)}{\partial\eta} = 0, \quad \frac{\partial(\eta)}{\partial\eta} = 1, \quad \frac{\partial(\bar{\eta})}{\partial\eta} = 0, \quad (14)$$

e

$$\frac{\partial(1)}{\partial\bar{\eta}} = 0, \quad \frac{\partial(\eta)}{\partial\bar{\eta}} = 0, \quad \frac{\partial(\bar{\eta})}{\partial\bar{\eta}} = 1. \quad (15)$$

Note que essas regras são idênticas às da álgebra usual. No entanto, na álgebra de Grassmann essas regras são complementadas pela condição de que a variável a ser derivada deve estar ao lado do operador diferencial. Se isto não ocorrer devemos anticomutá-la com as outras variáveis até que esta condição seja satisfeita. Vejamos as consequências dessas regras de derivação sobre uma função $g(\eta, \bar{\eta})$ que seja função dos dois geradores da álgebra:

$$g(\eta, \bar{\eta}) = g_0 + g_{10}\eta + g_{01}\bar{\eta} + g_{11}\eta\bar{\eta}. \quad (16)$$

Calculemos a derivada de $g(\eta, \bar{\eta})$ em relação a $\bar{\eta}$ e η , nesta ordem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} g(\eta, \bar{\eta}) &= \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} (g_0 + g_{10} \eta + g_{01} \bar{\eta} + g_{11} \eta \bar{\eta}) \\ &= \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} (g_0 + g_{10} \eta + g_{01} \bar{\eta} - g_{11} \bar{\eta} \eta) \\ &= \frac{\partial}{\partial \eta} (g_{01} - g_{11} \eta) \\ &= -g_{11}. \end{aligned} \tag{17}$$

Para obtermos o resultado (17) utilizamos as eqs. (14) e (15) mas antes reescrevemos a função $g(\eta, \bar{\eta})$ para que a variável $\bar{\eta}$, que está mais a direita, anticomute com η e fique lado a lado do operador diferencial $\frac{\partial}{\partial \bar{\eta}}$. No entanto, se calculamos a derivada da função $g(\eta, \bar{\eta})$ primeiro com relação à variável η e depois com relação à variável $\bar{\eta}$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial}{\partial \eta} g(\eta, \bar{\eta}) &= g_{11} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta \bar{\eta}) \\ &= g_{11}. \end{aligned} \tag{18}$$

Comparando os resultados anteriores, obtemos

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \eta \partial \bar{\eta}} = -\frac{\partial^2 g}{\partial \bar{\eta} \partial \eta}. \tag{19}$$

Concluimos que, ao contrário da operação de derivada na álgebra usual, os operadores diferenciais grassmannianos anticomutam entre si. Como consequência das relações de anticomutação (3)-(5) temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial \bar{\eta}^2} = 0 \Rightarrow \\ \frac{\partial^{n+m} g}{\partial \bar{\eta}^n \partial \eta^m} = 0 \quad \text{para } n, m \geq 2. \end{aligned} \tag{20}$$

A operação de integração sobre os geradores da álgebra de Grassmann é definida de maneira a ser idêntica a operação de derivação nesta álgebra. As regras de integração de cada gerador da álgebra são definidas como

$$\int d\eta \, 1 = 0, \quad \int d\eta \, \eta = 1, \quad \int d\eta \, \bar{\eta} = 0, \tag{21}$$

e

$$\int d\bar{\eta} \, 1 = 0, \quad \int d\bar{\eta} \, \eta = 0, \quad \int d\bar{\eta} \, \bar{\eta} = 1. \tag{22}$$

Como no caso das derivadas, as regras anteriores têm que ser complementadas pela condição de que a variável a ser integrada tem que estar lado a lado com a diferencial correspondente. As regras de integração são definidas independentemente dos limites de integração. Para o caso de funções que dependem das duas variáveis grassmannianas, temos que

$$\begin{aligned} i) \quad \int d\eta g(\eta, \bar{\eta}) &= \int d\eta (g_0 + g_{10} \eta + g_{01} \bar{\eta} + g_{11} \eta \bar{\eta}) \\ &= g_{10} + g_{11} \bar{\eta} = \frac{\partial g}{\partial \eta}, \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} ii) \quad \int d\bar{\eta} g(\eta, \bar{\eta}) &= \int d\bar{\eta} (g_0 + g_{10} \eta + g_{01} \bar{\eta} + g_{11} \eta \bar{\eta}) \\ &= \int d\bar{\eta} g_{01} \bar{\eta} + \int d\bar{\eta} (-g_{11} \bar{\eta} \eta) \\ &= g_{01} - g_{11} \eta = \frac{\partial g}{\partial \bar{\eta}}. \end{aligned} \tag{24}$$

O exemplo anterior mostra explicitamente que as operações de derivada e integral são idênticas na álgebra de Grassmann. Na integração, a ordem em que realizamos a integração também é importante. Consideremos o exemplo

$$\begin{aligned} \int d\eta d\bar{\eta} g(\eta, \bar{\eta}) &= \int d\eta d\bar{\eta} (g_0 + g_{10} \eta + g_{01} \bar{\eta} + g_{11} \eta \bar{\eta}) \\ &= g_{11} \int d\eta d\bar{\eta} \eta \bar{\eta} \\ &= -g_{11} \int d\eta d\bar{\eta} \bar{\eta} \eta = -g_{11}. \end{aligned} \tag{25}$$

Entretanto,

$$\begin{aligned} \int d\bar{\eta} d\eta g(\eta, \bar{\eta}) &= \int d\bar{\eta} d\eta (g_0 + g_{10} \eta + g_{01} \bar{\eta} + g_{11} \eta \bar{\eta}) \\ &= g_{11} \int d\bar{\eta} d\eta \eta \bar{\eta} = g_{11}. \end{aligned} \tag{26}$$

Portanto,

$$\int d\eta d\bar{\eta} g(\eta, \bar{\eta}) = - \int d\bar{\eta} d\eta g(\eta, \bar{\eta}), \tag{27}$$

em analogia com o resultado obtido para as derivadas (veja eq.(19)). A presença do sinal menos é consequência da regra de que a variável a ser integrada tem que ficar ao lado da diferencial correspondente.

A partir das definições das operações de derivada e integral na álgebra de Grassmann, temos

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \int d\eta g(\eta, \bar{\eta}) = \frac{\partial}{\partial \eta} (g_{10} + g_{11} \bar{\eta}) = 0. \tag{28}$$

Como $g(\eta, \bar{\eta})$ é qualquer função grassmanniana obtemos

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \int d\eta = 0. \tag{29}$$

Logo, na álgebra de Grassmann, ao contrário da álgebra usual, as operações de derivação e integração **não são operações inversas**.

Um ponto importante é a mudança da medida de integração ao passarmos dos geradores $(\eta, \bar{\eta})$ para um novo par de geradores $(\xi, \bar{\xi})$ obtidos dos anteriores através de uma transformação linear

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \bar{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \bar{\xi} \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Denominamos de \mathbf{A} a matriz formada pelos números A_{ij} , $i, j = 1, 2$, que aparecem no l.d. da eq.(30). Para que a transformação (30) seja bem definida a matriz \mathbf{A} tem que possuir inversa. Deixamos como exercício mostrar que se as variáveis η e $\bar{\eta}$ satisfazem as relações de anticomutação (3) - (5), válidas para os geradores da álgebra de Grassmann, então ξ e $\bar{\xi}$ também as satisfazem, daí termos afirmado que estas variáveis são geradores da álgebra não-comutativa. Seja $f(\eta, \bar{\eta})$ uma função grassmanniana arbitrária

$$f(\eta, \bar{\eta}) = f_0 + f_{10}\eta + f_{01}\bar{\eta} + f_{11}\eta\bar{\eta}, \quad (31)$$

sendo f_0 , f_{10} , f_{01} e f_{11} números. Pela eq.(26) temos

$$\int d\bar{\eta} d\eta f(\eta, \bar{\eta}) = f_{11}, \quad (32)$$

uma vez que pelas regras de integração na álgebra de Grassmann apenas o quarto termo do l.d. da eq.(31) dá uma contribuição não nula para integral dupla (32). Em termos dos novos geradores ξ e $\bar{\xi}$ o termo $f_{11}\eta\bar{\eta}$ é escrito como

$$\begin{aligned} f_{11}\eta\bar{\eta} &= f_{11}(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})\xi\bar{\xi} \\ &= \det(\mathbf{A}) f_{11} \xi\bar{\xi}. \end{aligned} \quad (33)$$

Mantivemos apenas os termos em ξ e $\bar{\xi}$ que contribuem para a integral múltipla de Grassmann. Para obtermos o jacobiano J associado a transformação linear (30) dos geradores da álgebra utilizamos que o resultado da integral (32) é independente das variáveis de integração, ou seja,

$$\begin{aligned} \int d\bar{\eta} d\eta f(\eta, \bar{\eta}) &= \int d\bar{\xi} d\xi J f(\xi, \bar{\xi}) \\ &= J \det(\mathbf{A}) f_{11}, \end{aligned} \quad (34)$$

que será igual ao resultado (32) se o jacobiano J , associado à transformação (30), for igual a

$$J = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}. \quad (35)$$

II.3 Definição de Função Analítica

Na seção III os operadores de criação e aniquilação fermiônicos serão associados a geradores da álgebra de Grassmann, assim como os vetores de estado. Veremos que os estados fermiônicos estão associados a funções grassmannianas escritas em termos de um sub-conjunto dos geradores da álgebra (veja a eq. (68)). Essas funções são denominadas **funções analíticas**. A definição geral de função analítica é

$$i) \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{\eta}} = 0 \quad \Rightarrow \quad f(\eta) = f_0 + f_{10}\eta, \quad (36)$$

ou

$$ii) \quad \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0 \quad \Rightarrow \quad f(\bar{\eta}) = f_0 + f_{01}\bar{\eta}. \quad (37)$$

Observe que a definição de função analítica na álgebra de Grassmann é bem diferente da definição usual de função analítica[9].

Todas as propriedades da álgebra de Grassmann que apresentaremos de agora em diante se restringem às funções analíticas, uma vez que os estados fermiônicos estão associados a funções analíticas e o nosso interesse é a aplicação desta álgebra ao estudo deste tipo de sistema físico.

II.4 Produto Escalar

O produto escalar é uma operação matemática definida para cada par de elementos pertencentes a um espaço vetorial. Sejam f e g dois destes elementos, associamos a eles um número complexo denotado por (f, g) que satisfaz as seguintes propriedades[10]:

$$(f, g) = (g, f)^*, \quad (38)$$

$$(f, \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) = \lambda_1 (f, g_1) + \lambda_2 (f, g_2), \quad (39)$$

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, g) = \lambda_1^* (f_1, g) + \lambda_2^* (f_2, g), \quad (40)$$

$$(f, f) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = 0, \quad (41)$$

sendo que λ_1 e λ_2 são números quaisquer, inclusive podendo ser complexos.

Sejam $f(\bar{\eta})$ e $g(\bar{\eta})$ duas funções analíticas da álgebra de Grassmann:

$$f(\bar{\eta}) = f_0 + f_{10}\bar{\eta} \quad \text{e} \quad g(\bar{\eta}) = g_0 + g_{10}\bar{\eta}. \quad (42)$$

O produto escalar destas duas funções analíticas é definido como

$$(g, f) = g_0^* f_0 + g_{10}^* f_{10}. \quad (43)$$

Note que esta definição de produto escalar é análogo ao produto escalar usual de dois vetores escritos em termos de uma base ortogonal. Deixamos como exercício mostrar que a definição (43) satisfaz as propriedades (38)-(41) que definem o produto escalar. O produto escalar (43) também pode ser escrito numa forma integral:

$$(g, f) = \int d\bar{\eta} d\eta e^{-\bar{\eta}\eta} \bar{g}(\eta) f(\bar{\eta}). \quad (44)$$

A função $\bar{g}(\eta)$ é obtida a partir da função analítica $g(\bar{\eta})$ da seguinte forma:

$$g(\bar{\eta}) = g_0 + g_{10}\bar{\eta} \quad \Rightarrow \quad \bar{g}(\eta) = g_0^* + g_{10}^*\eta, \quad (45)$$

onde η é o gerador da álgebra de Grassmann conjugado a $\bar{\eta}$. Vejamos como obtemos o l.d. da eq.(43) a partir da partir da forma integral (44) utilizando as expressões (37) e (45) das funções analíticas $f(\bar{\eta})$ e $\bar{g}(\eta)$ respectivamente:

$$\begin{aligned} (g, f) &= \int d\bar{\eta} d\eta e^{-\bar{\eta}\eta} (g_0^* + g_{10}^*\eta)(f_0 + f_{10}\bar{\eta}) \\ &= \int d\bar{\eta} d\eta (1 - \bar{\eta}\eta)(g_0^* f_0 + g_{10}^* f_{10}\bar{\eta}). \end{aligned} \quad (46)$$

Para escrever a segunda igualdade da eq.(46) utilizamos que a integral dupla de Grassmann de termos com número ímpar de geradores é nula. Além disso, como $\eta^2 = \bar{\eta}^2 = 0$, podemos finalmente escrever

$$\begin{aligned} (g, f) &= -g_0^* f_0 \int d\bar{\eta} d\eta \bar{\eta} \eta + g_1^* f_1 \int d\bar{\eta} d\eta \eta \bar{\eta} \\ &= g_0^* f_0 + g_1^* f_1, \end{aligned} \quad (47)$$

recuperando a definição (43) para o produto escalar de duas funções grassmannianas analíticas. Apesar da definição (43) para o produto escalar na álgebra de Grassmann ser análoga à definição da mesma operação na álgebra usual para funções complexas, o primeiro possui na sua forma integral uma exponencial gaussiana que não aparece no segundo. Este fato decorre das regras de integração dos geradores que são distintas nas duas

álgebras.

III Função δ de Dirac

Por definição a função δ de Dirac é tal que:

$$\int d\bar{\zeta} \delta(\bar{\zeta} - \bar{\eta}) f(\bar{\zeta}) = f(\bar{\eta}), \quad (48)$$

sendo $f(\bar{\zeta})$ uma função analítica. A forma integral da função $\delta(\bar{\zeta} - \bar{\eta})$ que satisfaz identicamente a eq.(48) é

$$\delta(\bar{\zeta} - \bar{\eta}) = \int d\zeta e^{-(\bar{\zeta} - \bar{\eta})\zeta}, \quad (49)$$

que integrando o l.d. da expressão anterior na variável grassmanniana ζ obtemos

$$\begin{aligned} \delta(\bar{\zeta} - \bar{\eta}) &= \int d\zeta (1 - (\bar{\zeta} - \bar{\eta})\zeta) = \int d\zeta (1 + \zeta(\bar{\zeta} - \bar{\eta})) \\ &= \int d\zeta \zeta(\bar{\zeta} - \bar{\eta}) = \bar{\zeta} - \bar{\eta}. \end{aligned} \quad (50)$$

Para verificarmos que a eq.(49) é a função δ de Dirac grassmanniana, consideramos uma função analítica $f(\bar{\zeta})$ arbitrária

$$f(\bar{\zeta}) = f_0 + f_1 \bar{\zeta}, \quad (51)$$

sendo f_0 e f_1 números. Substituindo a expressão (50) na eq.(48), temos então

$$\begin{aligned} \int d\bar{\zeta} \delta(\bar{\zeta} - \bar{\eta}) f(\bar{\zeta}) &= \int d\bar{\zeta} (\bar{\zeta} - \bar{\eta})(f_0 + f_1 \bar{\zeta}) \\ &= f_0 \int d\bar{\zeta} \bar{\zeta} + f_1 \bar{\eta} \int d\bar{\zeta} \bar{\zeta} \\ &= f_0 + f_1 \bar{\eta} = f(\bar{\eta}), \end{aligned} \quad (52)$$

mostrando que a função definida pela eq.(49) satisfaz a propriedade (48) que define a função δ de Dirac. Da eq.(50) vemos que a função δ de Dirac grassmanniana é uma função ímpar, ao contrário da função δ de Dirac da álgebra usual, que é uma função par do seu argumento.

III Como Relacionar a Álgebra de Grassmann com Sistemas Fermiônicos Quânticos?

A álgebra de Grassmann que descrevemos na seção II pode ser utilizada no estudo de sistemas quânticos fermiônicos. Para vermos como relacionar operadores

e vetores de estado fermiônicos com os geradores desta álgebra faremos uma breve apresentação dos operadores de criação e aniquilação fermiônicos e suas respectivas ações sobre vetores de estado com número definido de partículas.

III.1 Operadores de Criação e Aniquilação de Partículas Idênticas

Utilizamos neste artigo a notação de Dirac[1] para representar os estados quânticos com um número definido de partículas. Os vetores de estados quânticos são:

- i) $|0\rangle$: estado quântico com zero partículas (vácuo);
- ii) $|\mu\rangle$: uma partícula no estado μ , sendo que μ representa um conjunto de números quânticos que caracterizam completamente este estado quântico.

Na formulação usual de Schrödinger o operador hamiltoniano \mathbf{H} , que determina a dinâmica do sistema, é escrito em termos dos operadores de posição $\vec{\mathbf{x}}$ e do momento linear $\vec{\mathbf{p}}$. No caso particular do modelo de oscilador harmônico, são definidos operadores de criação e aniquilação que são escritos em termos destes operadores $\vec{\mathbf{x}}$ e $\vec{\mathbf{p}}$ [1]. No que se segue, trataremos de operadores de criação e aniquilação associados a férmions. O vetor de estado que representa uma partícula no estado quântico μ é obtido ao aplicarmos o **operador de criação** \mathbf{a}_μ^\dagger ao vácuo

$$\mathbf{a}_\mu^\dagger |0\rangle = |\mu\rangle. \quad (53)$$

Da mesma forma que temos um operador que cria partículas, temos um operador \mathbf{a}_μ que destrói uma partícula no estado $|\mu\rangle$, levando este estado ao vácuo:

$$\mathbf{a}_\mu|\mu\rangle = |0\rangle. \quad (54)$$

Como o operador \mathbf{a}_μ destrói uma partícula, então o resultado de sua aplicação sobre o vácuo (estado que representa a ausência de partícula) é:

$$\mathbf{a}_\mu|0\rangle = 0. \quad (55)$$

Esta igualdade é uma característica importante dos operadores de aniquilação. Os operadores \mathbf{a}_μ^\dagger (criação) são hermitianos conjugados dos operadores \mathbf{a}_μ (aniquilação).

Nos restringiremos a descrever sistema de **férmions idênticos**, que satisfazem a condição de antisimetria nos vetores de estado de partículas idênticas pela troca de quaisquer duas partículas. No caso mais simples em que temos duas partículas, essa condição na linguagem dos operadores de criação e aniquilação se expressa como

$$\mathbf{a}_\mu^\dagger\mathbf{a}_\nu^\dagger|0\rangle = -\mathbf{a}_\nu^\dagger\mathbf{a}_\mu^\dagger|0\rangle. \quad (56)$$

Pela igualdade anterior, vemos que é importante preservar a ordem com que os números quânticos ν e μ aparecem no *ket* que descreve o estado quântico de duas partículas idênticas. Além disso, como a Natureza impede duas partículas fermiônicas idênticas terem todos os números quânticos iguais (princípio da exclusão de Pauli[1]) devemos ter:

$$\mathbf{a}_\nu^\dagger\mathbf{a}_\nu^\dagger|0\rangle = |\nu, \nu\rangle = 0. \quad (57)$$

Utilizamos a notação: $|\nu, \mu\rangle \equiv \mathbf{a}_\nu^\dagger\mathbf{a}_\mu^\dagger|0\rangle$. De forma que os operadores de criação de férmions satisfazem a seguinte igualdade:

$$\mathbf{a}_\nu^\dagger\mathbf{a}_\mu^\dagger = -\mathbf{a}_\mu^\dagger\mathbf{a}_\nu^\dagger \Rightarrow \mathbf{a}_\nu^\dagger\mathbf{a}_\mu^\dagger + \mathbf{a}_\mu^\dagger\mathbf{a}_\nu^\dagger \equiv \{\mathbf{a}_\nu^\dagger, \mathbf{a}_\mu^\dagger\} = 0. \quad (58)$$

Note que quando $\nu = \mu$, obtemos a condição: $(\mathbf{a}_\nu^\dagger)^2 = 0$. Como os operadores de férmions satisfazem a relação (58), dizemos que estes operadores satisfazem uma relação de anticomutação. Os operadores \mathbf{a}_μ são hermitianos conjugados aos operadores \mathbf{a}_μ^\dagger e portanto satisfazem relações de anti-comutação análogas à eq.(58).

Em resumo, temos que os operadores de criação e aniquilação de férmions satisfazem as relações de anticomutação:

$$\{\mathbf{a}_\nu^\dagger, \mathbf{a}_\mu^\dagger\} = 0 \quad \text{e} \quad \{\mathbf{a}_\nu, \mathbf{a}_\mu\} = 0, \quad (59)$$

enquanto que a ação desses operadores sobre estados de partículas é dada por

$$\mathbf{a}_\nu|0\rangle = 0, \quad \mathbf{a}_\nu^\dagger|0\rangle = |\nu\rangle, \quad (60)$$

e

$$\mathbf{a}_\nu|\nu\rangle = |0\rangle, \quad \mathbf{a}_\nu^\dagger|\nu\rangle = 0, \quad (61)$$

sendo $|0\rangle$ o vácuo, que representa o estado quântico na ausência de partícula. Além das relações (59), os operadores de criação e aniquilação ainda satisfazem a relação de anticomutação[1]:

$$\{\mathbf{a}_\nu, \mathbf{a}_\mu^\dagger\} = \delta_{\nu\mu}\mathbb{1}, \quad (62)$$

sendo $\mathbb{1}$ o operador identidade. A ação do operador $\mathbb{1}$ sobre qualquer estado não o modifica.

III.2 Relação entre Estados e Operadores Fermiônicos e os Geradores da Álgebra de Grassmann

Todo esse formalismo é bastante atraente, mas como utilizá-lo para calcular amplitudes de probabilidade? Na notação de Dirac os objetos cujos valores são números, em geral complexos, são os *brackets*, também conhecidos como *sandwiches*[1]. Esses *sandwiches* correspondem a calcular os operadores entre os estados *bra* e *ket* que representam estados quânticos que a partícula pode assumir. Por exemplo, temos o *bracket* $\langle\nu|\mu\rangle \equiv \langle\nu|\mathbf{a}_\mu^\dagger|0\rangle$. Como calcular esse tipo de objeto? Uma possibilidade é associar aos estados e operadores fermiônicos elementos de uma álgebra cujos os geradores não comutam entre si, como por exemplo, a álgebra de Grassmann[3, 4, 5, 8]. Para simplificar, consideraremos daqui por diante apenas um estado quântico que a partícula pode assumir. Os operadores fermiônicos \mathbf{a}^\dagger e \mathbf{a} criam e destroem, respectivamente, uma partícula neste estado e satisfazem as seguintes relações de anticomutação[11]:

$$\{\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger\} = \mathbb{1}, \quad \{\mathbf{a}^\dagger, \mathbf{a}^\dagger\} = 0 \quad \text{e} \quad \{\mathbf{a}, \mathbf{a}\} = 0. \quad (63)$$

Continuamos a denotar o vácuo (ausência de partículas) por $|0\rangle$ e o *ket* $|1\rangle$ corresponde ao estado que possui um férmion. A ação dos operadores de criação e aniquilação sobre esses estados é:

$$\mathbf{a}|0\rangle = 0, \quad \mathbf{a}|1\rangle = |0\rangle, \quad \mathbf{a}^\dagger|0\rangle = |1\rangle, \quad \mathbf{a}^\dagger|1\rangle = 0. \quad (64)$$

O resultado nulo, obtido após aplicarmos o operador de criação sobre o estado de uma partícula $|1\rangle$, é consequência do princípio de exclusão de Pauli[1]. As relações (63) e (64) definem este sistema fermiônico simples com dois estados ($|0\rangle, |1\rangle$).

A álgebra de Grassmann com dois geradores η e $\bar{\eta}$ satisfazem as relações de anticomutação (3)-(5). Fazendo a seguinte identificação entre os operadores de criação \mathbf{a}^\dagger e de aniquilação \mathbf{a} e os geradores da álgebra

$$\mathbf{a}^\dagger \mapsto \bar{\eta} \quad \text{e} \quad \mathbf{a} \mapsto \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad (65)$$

as relações de anticomutação (63) satisfeitas pelos operadores fermiônicos são preservadas. Entretanto, não é suficiente identificarmos apenas os operadores com os geradores da álgebra de Grassmann. É necessário

também identificarmos os estados quânticos fermiônicos com esses geradores. Desta forma, fazemos a seguinte identificação:

$$|0\rangle \mapsto 1 \quad \text{e} \quad |1\rangle \mapsto \bar{\eta}. \quad (66)$$

Observe que a partir das relações de anticomutação (3)-(5) decorre que $\eta^2 = 0$ e $\bar{\eta}^2 = 0$. Consequentemente, as identificações (65) satisfazem ao princípio de exclusão de Pauli. O estado fermiônico mais geral que podemos escrever para este modelo simples é

$$|f\rangle = a_0|0\rangle + a_1|1\rangle, \quad (67)$$

que é identificado com a seguinte função grassmanniana

$$f(\bar{\eta}) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot \bar{\eta}. \quad (68)$$

As constantes a_0 e a_1 são constantes complexas. Existem vários livros textos onde podem ser encontradas extensões da discussão apresentada nesta seção para incluir vários operadores de criação e aniquilação [3, 4, 5].

III.3 Resultados Úteis

Na sub-seção anterior, verificamos que os vetores de estado que descrevem férmions, estão associados apenas a funções analíticas. Por isso, nesta sub-seção tratamos as propriedades da álgebra de Grassmann restritas as funções analíticas. Uma regra fundamental que utilizamos para igualar os *brackets* na notação de Dirac com as integrais grassmannianas, é que os *brackets* são produtos escalares de estados quânticos que têm o mesmo valor que o produto escalar dos elementos da álgebra de Grassmann a eles associados. Isto significa que se os vetores de estado $|f\rangle$ e $|g\rangle$ estão associados as funções $f(\bar{\eta})$ e $g(\bar{\eta})$ respectivamente, então,

$$\begin{aligned} \langle g|f\rangle &= (g, f) \\ &= \int d\bar{\eta} d\eta \ e^{-\bar{\eta}\eta} \ \bar{g}(\eta) f(\bar{\eta}), \end{aligned} \quad (69)$$

sendo que a segunda igualdade vem da eq. (44) que é a expressão do produto escalar de duas funções grassmannianas. Pela segunda igualdade da eq. (69), obtemos que o *bra* $\langle g|$ é identificado com a função $\bar{g}(\eta)$ cuja definição é dada pela eq.(45). Mostramos, veja a eq.(66), que $|n\rangle \mapsto \bar{\eta}^n$. O produto escalar (69) fornece o resultado correto para $\langle m|n\rangle$ se fizermos a associação $\langle m| \mapsto \eta^m$, $m = 0, 1$.

Vejamos como obter o valor do elemento de matriz de um operador fermiônico \mathbf{B} através da integração sobre as variáveis anticomutantes. Qualquer operador fermiônico \mathbf{B} pode ser escrito como:

$$\mathbf{B} = \sum_{m,n=0}^1 |n\rangle B_{nm} \langle m|, \quad (70)$$

onde o número $B_{nm} = \langle n|\mathbf{B}|m\rangle$. Seja $|f\rangle$ um vetor de estado fermiônico arbitrário

$$|f\rangle = f_0|0\rangle + f_1|1\rangle, \quad (71)$$

sendo f_0 e f_1 números. A ação do operador fermiônico \mathbf{B} (eq.(70)) sobre o estado $|f\rangle$ resulta, em geral, num outro estado fermiônico $|g\rangle$,

$$|g\rangle = \sum_{m,n=0}^1 |n\rangle B_{nm} \langle m|f\rangle. \quad (72)$$

A identificação entre vetores de estados fermiônicos e funções grassmannianas é obtida através das eqs. (67) e (68). A função grassmanniana associada ao vetor de estado $|g\rangle$ é

$$g(\bar{\eta}) = \sum_{m,n=0}^1 \bar{\eta}^n B_{nm} \langle m|f\rangle. \quad (73)$$

A expressão do produto escalar $\langle m|f\rangle$ em termos da integral grassmanniana é dada pela eq.(44),

$$\langle m|f\rangle = \int d\bar{\xi} d\xi \ e^{-\bar{\xi}\xi} \ \xi^m f(\bar{\xi}), \quad (74)$$

que substituída na eq.(73) fica

$$\begin{aligned} g(\bar{\eta}) &= \int d\bar{\xi} d\xi \ e^{-\bar{\xi}\xi} \left[\sum_{m,n=0}^1 \bar{\eta}^n B_{nm} \xi^m \right] f(\bar{\xi}) \\ &\equiv (Bf)(\bar{\eta}). \end{aligned} \quad (75)$$

Note que utilizamos que: $e^{-\bar{\xi}\xi} = 1 - \bar{\xi}\xi$ é bilinear nas variáveis $\bar{\xi}$ e ξ e portanto comuta com qualquer função de Grassmann. Definimos o *kernel* $\mathcal{B}(\bar{\eta}, \xi)$ associado ao operador fermiônico (70) como

$$\mathcal{B}(\bar{\eta}, \xi) \equiv \sum_{m,n=0}^1 \bar{\eta}^n B_{nm} \xi^m, \quad (76)$$

que é uma função grassmanniana cuja definição depende apenas do operador \mathbf{B} . Associamos ao vetor de estado $\mathbf{B}|f\rangle$ a função grassmanniana

$$(Bf)(\bar{\eta}) = \int d\bar{\xi} d\xi \ e^{-\bar{\xi}\xi} \ \mathcal{B}(\bar{\eta}, \xi) f(\bar{\xi}), \quad (77)$$

sendo $\mathcal{B}(\bar{\eta}, \xi)$ dado pela igualdade (76) e $f(\bar{\xi})$ a função analítica identificada com o estado $|f\rangle$. Comparando a eq.(70) do operador fermiônico com a eq.(76) do seu *kernel* associado, observamos que escrevemos esse último a partir da eq.(70) fazendo as substituições

$$|n\rangle \mapsto \bar{\eta}^n \quad \text{e} \quad \langle m| \mapsto \xi^m. \quad (78)$$

É usual na Mecânica Quântica escrever os operadores em termos de produtos de operadores de aniquilação e criação, colocando todos os operadores de criação à esquerda aos de aniquilação (**ordenamento normal**).

Vamos, agora, mostrar como isto é feito na álgebra de Grassmann.

Os estados *bra* e *ket* que aparecem na eq.(70) são escritos em termos dos operadores de criação e aniquilação como:

$$|n\rangle = (\mathbf{a}^\dagger)^n |0\rangle \quad \text{e} \quad \langle m| = \langle 0| \mathbf{a}^m, \quad (79)$$

e lembramos que

$$|0\rangle\langle 0| = : e^{-\mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}} : = \mathbb{1} - \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}. \quad (80)$$

A notação: $: operator :$ significa que o *operador* é reescrito com todos os operadores de criação colocados a esquerda dos operadores de aniquilação (ordenamento normal). Substituindo as eqs.(79) e (80) na eq.(70), obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \sum_{m,n=0}^1 B_{nm} \mathbf{a}^{\dagger n} : e^{-\mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}} : \mathbf{a}^m \\ &= \sum_{m,n=0}^1 (B_{nm} - B_{n+1,m+1}) \mathbf{a}^{\dagger n} \mathbf{a}^m \\ &= \sum_{m,n=0}^1 B_{nm}^{\textcircled{B}} \mathbf{a}^{\dagger n} \mathbf{a}^m, \end{aligned} \quad (81)$$

sendo que $B_{nm} = 0$ se $n = 2$ ou $m = 2$. Os coeficientes $B_{nm}^{\textcircled{B}}$ ($B_{nm}^{\textcircled{B}} = B_{nm} - B_{n+1,m+1}$) definem o operador \mathbf{B} em termos de operadores de criação e aniquilação. Em geral tratamos com operadores fermiônicos escritos em

termos de operadores de criação e aniquilação escritos na forma normal. Qual o *kernel* associado a operadores ordenados normalmente e qual a sua relação com o *kernel* deste mesmo operador escrito na forma (70)?

Para obtermos o *kernel* do operador fermiônico \mathbf{B} na forma normal, procedemos de forma análoga ao que fizemos para obter o *kernel* (76). Seja $|f\rangle$ um vetor de estado arbitrário (veja eq.(71)) e $|g\rangle = \mathbf{B}|f\rangle$, sendo que \mathbf{B} é escrito na forma normal

$$\begin{aligned} |g\rangle &= \mathbf{B}|f\rangle \\ &= \sum_{m,n=0}^1 B_{nm}^{\textcircled{B}} (\mathbf{a}^\dagger)^n \mathbf{a}^m |f\rangle. \end{aligned} \quad (82)$$

Usando as identificações (65) podemos escrever que a função grassmanniana $g(\bar{\eta})$ associada ao vetor de estado $|g\rangle$ é

$$g(\bar{\eta}) = \sum_{m,n=0}^1 B_{nm}^{\textcircled{B}} \bar{\eta}^n \left(\frac{\partial^m f(\bar{\eta})}{\partial \bar{\eta}^m} \right). \quad (83)$$

Utilizando a função δ de Dirac (eq.(48)) para reescrever a função $f(\bar{\eta})$ de forma mais conveniente

$$\begin{aligned} f(\bar{\eta}) &= \int d\bar{\zeta} \delta(\bar{\zeta} - \bar{\eta}) f(\bar{\zeta}) \\ &= \int d\bar{\zeta} d\zeta e^{-(\bar{\zeta} - \bar{\eta})\zeta} f(\bar{\zeta}), \end{aligned} \quad (84)$$

que substituída no l.d. da eq.(83) nos dá

$$g(\bar{\eta}) = \sum_{m,n=0}^1 B_{nm}^{\textcircled{B}} \bar{\eta}^n \left[\int d\bar{\zeta} d\zeta e^{-\bar{\zeta}\zeta} \left(\frac{\partial^m e^{\bar{\eta}\zeta}}{\partial \bar{\eta}^m} \right) f(\bar{\zeta}) \right]. \quad (85)$$

No entanto, temos que

$$e^{-\bar{\zeta}\zeta} \frac{\partial^m e^{\bar{\eta}\zeta}}{\partial \bar{\eta}^m} = \begin{cases} e^{-\bar{\zeta}\zeta} (1 + \bar{\eta}\zeta) = \zeta^0 e^{-(\bar{\zeta} - \bar{\eta})\zeta} & \text{para } m = 0 \\ e^{-\bar{\zeta}\zeta} \zeta = \zeta^1 e^{-(\bar{\zeta} - \bar{\eta})\zeta} & \text{para } m = 1 \end{cases} \quad (86)$$

de maneira que

$$e^{-\bar{\zeta}\zeta} \frac{\partial^m e^{\bar{\eta}\zeta}}{\partial \bar{\eta}^m} = \zeta^m e^{-(\bar{\zeta} - \bar{\eta})\zeta}. \quad (87)$$

Voltando à eq.(85) ficamos com

$$g(\bar{\eta}) = \int d\bar{\zeta} d\zeta e^{-\bar{\zeta}\zeta} \left[\sum_{m,n=0}^1 B_{nm}^{\textcircled{B}} \bar{\eta}^n \zeta^m \right] e^{\bar{\eta}\zeta} f(\bar{\zeta}). \quad (88)$$

Como fizemos anteriormente, definimos o *kernel* associado ao operador fermiônico na forma normal como

sendo

$$\mathcal{B}^{\textcircled{B}}(\bar{\eta}, \zeta) \equiv \sum_{m,n=0}^1 B_{nm}^{\textcircled{B}} \bar{\eta}^n \zeta^m. \quad (89)$$

Comparando as eqs. (75) e (88), obtemos a relação entre os *kernels* do mesmo operador fermiônico \mathbf{B} mas escrito de duas formas diferentes (eqs. (70) e (81)):

$$\mathcal{B}(\bar{\eta}, \zeta) = e^{\bar{\eta}\zeta} \mathcal{B}^{\textcircled{B}}(\bar{\eta}, \zeta). \quad (90)$$

Observe que o produto $\bar{\eta}\zeta$ comuta com $\bar{\eta}^n \zeta^m$ para quaisquer valores de n e m . Portanto a exponencial $e^{\bar{\eta}\zeta}$ também comuta com $\bar{\eta}^n \zeta^m$.

É importante ressaltar que apesar da identificação entre operadores de criação e aniquilação fermiônicos e os geradores da álgebra de Grassmann ser dada pela eq.(65), obtemos o *kernel* $\mathcal{B}^{\textcircled{B}}(\bar{\eta}, \zeta)$ a partir da expressão (81) do operador fermiônico utilizando as substituições: $\mathbf{a} \mapsto \zeta$ e $\mathbf{a}^\dagger \mapsto \bar{\eta}$.

Até agora mostramos como associar vetores de es-

tado e operadores a funções grassmannianas, definimos o produto escalar na álgebra de Grassmann e consequentemente como calcular o produto escalar de dois vetores de estado associados a estados quânticos da partícula (*bracket*). Usando esses resultados podemos calcular o traço de qualquer operador fermiônico \mathbf{B} . Consideremos um operador fermiônico \mathbf{B} ordenado normalmente (eq.(81)). O seu traço é

$$Tr[\mathbf{B}] = \sum_{n=0}^1 \langle n|\mathbf{B}|n\rangle. \quad (91)$$

Utilizando as eqs. (88) e (89), a definição(44) para produto escalar e lembrando que $|n\rangle \mapsto \bar{\zeta}^n$ e $\langle n| \mapsto \eta^n$ obtemos

$$\langle n|\mathbf{B}|n\rangle = \int d\bar{\eta} d\zeta e^{\bar{\eta}\zeta} \int d\eta d\bar{\zeta} e^{-\bar{\eta}\eta} \eta^n \mathcal{B}^{\textcircled{B}}(\bar{\eta}, \zeta) e^{-\bar{\zeta}\zeta} \bar{\zeta}^n. \quad (92)$$

i) para $n = 0$:

$$\begin{aligned} \int d\eta d\bar{\zeta} e^{-\bar{\eta}\eta} \mathcal{B}^{\textcircled{B}}(\bar{\eta}, \zeta) e^{-\bar{\zeta}\zeta} &= \int d\eta d\bar{\zeta} (1 + \eta\bar{\eta}) (1 - \bar{\zeta}\zeta) \mathcal{B}^{\textcircled{B}}(\bar{\eta}, \zeta) \\ &= -\bar{\eta}\zeta \mathcal{B}^{\textcircled{B}}(\bar{\eta}, \zeta). \end{aligned} \quad (93)$$

ii) para $n = 1$:

$$\begin{aligned} \int d\eta d\bar{\zeta} e^{-\bar{\eta}\eta} \eta \mathcal{B}^{\textcircled{B}}(\bar{\eta}, \zeta) e^{-\bar{\zeta}\zeta} \bar{\zeta} &= \int d\eta d\bar{\zeta} (1 + \eta\bar{\eta}) \eta \mathcal{B}^{\textcircled{B}}(\bar{\eta}, \zeta) (1 - \bar{\zeta}\zeta) \bar{\zeta} \\ &= - \int d\eta \eta d\bar{\zeta} \mathcal{B}^{\textcircled{B}}(\bar{\eta}, \zeta) \bar{\zeta} \\ &= - \int d\bar{\zeta} \mathcal{B}^{\textcircled{B}}(\bar{\eta}, \zeta) \bar{\zeta}. \end{aligned} \quad (94)$$

Como estamos calculando o traço do operador \mathbf{B} então apenas os seus termos na expressão (81) em que o número de operadores de criação é igual ao número de operadores de aniquilação ($n = m$) é que podem dar um valor diferente de zero para o traço. Logo, apenas os termos em $\mathcal{B}^{\textcircled{B}}(\bar{\eta}, \zeta)$ que são da forma $\bar{\eta}^m \zeta^m$ contribuem para $Tr[\mathbf{B}]$ e vale a igualdade

$$\mathcal{B}^{\textcircled{B}}(\bar{\eta}, \zeta) \bar{\zeta} = \bar{\zeta} \mathcal{B}^{\textcircled{B}}(\bar{\eta}, \zeta). \quad (95)$$

Então

$$\int d\eta d\bar{\zeta} e^{-\bar{\eta}\eta} \eta \mathcal{B}^{\textcircled{B}}(\bar{\eta}, \zeta) e^{-\bar{\zeta}\zeta} \bar{\zeta} = -\mathcal{B}^{\textcircled{B}}(\bar{\eta}, \zeta). \quad (96)$$

Substituindo os resultados (93), (94) e (96) na eq.(91) obtemos

$$Tr[\mathbf{B}] = - \int d\bar{\eta} d\zeta e^{\bar{\eta}\zeta} (1 + \bar{\eta}\zeta) \mathcal{B}^{\textcircled{B}}(\bar{\eta}, \zeta). \quad (97)$$

Fazemos as seguintes mudanças de variáveis:

$$\bar{\xi} = -\zeta \quad \text{e} \quad \xi = \bar{\eta}. \quad (98)$$

O jacobiano associado a essa transformação (veja eq.(35)) é igual a

$$J = -1. \quad (99)$$

Como os termos de $\mathcal{B}^{\textcircled{B}}(\bar{\eta}, \zeta)$ que contribuem para $Tr[\mathbf{B}]$ são da forma $\bar{\eta}^m \zeta^m$, em termos dos novos geradores eles passam a ser escritos como:

$$\begin{aligned} \bar{\eta}^m \zeta^m \mapsto \xi^m (-\bar{\xi})^m &= (-1)^{2m} \bar{\xi}^m \xi^m \\ &= \bar{\xi}^m \xi^m, \end{aligned} \quad (100)$$

de forma que para o cálculo de $Tr[\mathbf{B}]$ temos que: $\mathcal{B}^{\textcircled{B}}(\bar{\eta}, \zeta) \mapsto \mathcal{B}^{\textcircled{B}}(\bar{\xi}, \xi)$.

Usando os novos geradores (98), a eq.(97) é reescrita como:

$$\begin{aligned} Tr[\mathbf{B}] &= \int (-1) d\xi d\bar{\xi} e^{\bar{\xi}\xi} (-1 + \xi\bar{\xi}) \mathcal{B}^{\otimes}(\bar{\xi}, \xi) \\ &= \int d\xi d\bar{\xi} e^{2\bar{\xi}\xi} \mathcal{B}^{\otimes}(\bar{\xi}, \xi) \end{aligned} \quad (101)$$

$$= \int d\xi d\bar{\xi} e^{\bar{\xi}\xi} \mathcal{B}(\bar{\xi}, \xi). \quad (102)$$

Desta forma, apresentamos nesta seção todas as propriedades básicas da álgebra de Grassmann a partir das quais calculamos as quantidades associadas a sistemas fermiônicos.

IV Álgebra de Grassmann de dimensão $d = 2^{2\mathcal{N}}$: Resumo dos Resultados

As definições e resultados das seções II e III são facilmente estendidas a álgebras de Grassmann com dimensão $d = 2^{2\mathcal{N}}$ [3, 4, 5], cujos geradores são: $\{\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \dots, \bar{\eta}_{\mathcal{N}}; \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{\mathcal{N}}\}$. Nesta seção apresentaremos apenas os resultados estendidos para esta álgebra.

Considere uma base ortonormal completa: $\{|n_1, n_2, \dots, n_{\mathcal{N}}\rangle\}$, sendo que os vetores $|n_1, n_2, \dots, n_{\mathcal{N}}\rangle$ são autoestados dos operadores $\mathbf{n}_i = \mathbf{a}_i^\dagger \mathbf{a}_i$, $i = 1, 2, \dots, \mathcal{N}$. Os operadores \mathbf{a}_i^\dagger (\mathbf{a}_i) são operadores de criação (destruição) de férmions. Quaisquer dois vetores de estado fermiônicos $|f\rangle$ e $|g\rangle$ do espaço de Hilbert podem ser escritos como

$$|f\rangle = \sum_{n_1, \dots, n_{\mathcal{N}}=0}^1 f_{n_1, \dots, n_{\mathcal{N}}} |n_1, n_2, \dots, n_{\mathcal{N}}\rangle \quad (103)$$

O *kernel* do operador fermiônico \mathbf{B} é

$$\mathcal{B}(\bar{\eta}, \eta) = \sum_{\substack{n_1, \dots, n_{\mathcal{N}}=0 \\ m_1, \dots, m_{\mathcal{N}}=0}}^1 \bar{\eta}_1^{n_1} \dots \bar{\eta}_{\mathcal{N}}^{n_{\mathcal{N}}} B_{n_1 \dots n_{\mathcal{N}}; m_1, \dots, m_{\mathcal{N}}} \eta_{\mathcal{N}}^{m_{\mathcal{N}}} \dots \eta_1^{m_1}, \quad (109)$$

e a aplicação do operador \mathbf{B} sobre o vetor $|f\rangle$ é mapeado na função grassmanniana

$$(Bf)(\bar{\eta}) = \int \prod_{i=1}^{\mathcal{N}} d\bar{\xi}_i d\xi_i e^{-\sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \bar{\xi}_i \xi_i} \mathcal{B}(\bar{\eta}, \xi) f(\bar{\xi}). \quad (110)$$

O *kernel* do produto de dois operadores fermiônicos \mathbf{A} e \mathbf{B} é igual a

$$(AB)(\bar{\eta}, \eta) = \int \prod_{i=1}^{\mathcal{N}} d\bar{\xi}_i d\xi_i e^{-\sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \bar{\xi}_i \xi_i} \mathcal{A}(\bar{\eta}, \xi) \mathcal{B}(\bar{\xi}, \eta). \quad (111)$$

e

$$|g\rangle = \sum_{m_1, \dots, m_{\mathcal{N}}=0}^1 g_{m_1, \dots, m_{\mathcal{N}}} |m_1, m_2, \dots, m_{\mathcal{N}}\rangle, \quad (104)$$

sendo que $f_{n_1, \dots, n_{\mathcal{N}}}$ e $g_{m_1, \dots, m_{\mathcal{N}}}$ são números usuais. Esses vetores de estado são identificados com as funções grassmannianas

$$f(\bar{\eta}) = \sum_{n_1, \dots, n_{\mathcal{N}}=0}^1 f_{n_1, \dots, n_{\mathcal{N}}} \bar{\eta}_1^{n_1} \dots \bar{\eta}_{\mathcal{N}}^{n_{\mathcal{N}}} \quad (105)$$

e

$$g(\bar{\eta}) = \sum_{m_1, \dots, m_{\mathcal{N}}=0}^1 g_{m_1, \dots, m_{\mathcal{N}}} \bar{\eta}_1^{m_1} \dots \bar{\eta}_{\mathcal{N}}^{m_{\mathcal{N}}}. \quad (106)$$

Utilizamos a notação: $\bar{\eta} \equiv \{\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \dots, \bar{\eta}_{\mathcal{N}}\}$ e $\eta \equiv \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{\mathcal{N}}\}$.

O produto escalar desses dois vetores de estado escrito em termos de integrais múltiplas de Grassmann é dado por

$$\begin{aligned} \langle g|f\rangle &= (g, f) \\ &= \int \prod_{i=1}^{\mathcal{N}} d\bar{\eta}_i d\eta_i e^{-\sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \bar{\eta}_i \eta_i} \bar{g}(\eta) f(\bar{\eta}) \end{aligned} \quad (107)$$

Em analogia à eq.(45), temos

$$\bar{g}(\eta) = \sum_{m_1, \dots, m_{\mathcal{N}}=0}^1 g_{m_1, \dots, m_{\mathcal{N}}}^* \eta_{\mathcal{N}}^{m_{\mathcal{N}}} \dots \eta_1^{m_1}. \quad (108)$$

Nas aplicações da álgebra de Grassmann que temos realizado para obter resultados em sistemas fermiônicos, temos em geral trabalhado com operadores fermiônicos já escritos na forma normal e que possuem \mathcal{N} graus de liberdade. Em geral, os operadores fermiônicos com ordenamento normal podem ser expandidos em termos dos operadores de criação e destruição

$$\mathbf{A} = \sum_{\substack{n_1, \dots, n_{\mathcal{N}}=0 \\ m_1, \dots, m_{\mathcal{N}}=0}}^1 A_{n_1, \dots, n_{\mathcal{N}}; m_1, \dots, m_{\mathcal{N}}}^{\textcircled{0}} (\mathbf{a}_1^\dagger)^{n_1} \dots (\mathbf{a}_{\mathcal{N}}^\dagger)^{n_{\mathcal{N}}} (\mathbf{a}_{\mathcal{N}})^{m_{\mathcal{N}}} \dots (\mathbf{a}_1)^{m_1}, \quad (112)$$

onde $A_{n_1, \dots, n_{\mathcal{N}}; m_1, \dots, m_{\mathcal{N}}}^{\textcircled{0}}$ é um número. A relação entre o *kernel* do operador \mathbf{A} e a sua forma normal é

$$\mathcal{A}(\bar{\eta}, \eta) = e^{\sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \bar{\eta}_i \eta_i} \mathcal{A}^{\textcircled{0}}(\bar{\eta}, \eta). \quad (113)$$

A partir da definição (107) para o produto escalar e algumas manipulações algébricas obtemos que o traço de qualquer operador fermiônico \mathbf{B} pode ser escrito como

a seguinte integral múltipla de Grassmann

$$Tr[\mathbf{B}] = \int \prod_{i=1}^{\mathcal{N}} d\eta_i d\bar{\eta}_i e^{2 \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \bar{\eta}_i \eta_i} \mathcal{B}^{\textcircled{0}}(\bar{\eta}, \eta), \quad (114)$$

e $\mathcal{B}^{\textcircled{0}}(\bar{\eta}, \eta)$ é o *kernel* do operador fermiônico normal \mathbf{B} .

No caso em que o operador \mathbf{B} é o produto de n operadores fermiônicos normais \mathbf{Q} , obtemos a partir das relações (111) e (114) que

$$\begin{aligned} Tr[\mathbf{Q}^n] &= \int \prod_{i=1}^{\mathcal{N}} \prod_{\mu=0}^{n-1} d\eta_i(\mu) d\bar{\eta}_i(\mu) e^{\sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \sum_{\nu=0}^{n-1} \bar{\eta}_i(\nu) [\eta_i(\nu) - \eta_i(\nu+1)]} \times \\ &\times \mathcal{Q}^{\textcircled{0}}(\bar{\eta}(0), \eta(0)) \mathcal{Q}^{\textcircled{0}}(\bar{\eta}(1), \eta(1)) \times \dots \times \mathcal{Q}^{\textcircled{0}}(\bar{\eta}(n-1), \eta(n-1)), \end{aligned} \quad (115)$$

sendo que estamos usando a notação:

$$\eta(\nu) \equiv \{\eta_1(\nu), \eta_2(\nu), \dots, \eta_{\mathcal{N}}(\nu)\}$$

e

$$\bar{\eta}(\nu) \equiv \{\bar{\eta}_1(\nu), \bar{\eta}_2(\nu), \dots, \bar{\eta}_{\mathcal{N}}(\nu)\},$$

para cada valor ν . Os índices μ e ν , onde $\mu, \nu = 0, 1, \dots, n-1$, aparecem devido ao produto de n operadores fermiônicos (veja a eq.(111) onde temos o caso particular do produto de 2 operadores fermiônicos). Na seção VI veremos que $Tr[\mathbf{Q}^n]$ está associado à n -ésima potência da expansão no inverso da temperatura da função de partição gran-canônica que descreve as propriedades termodinâmicas de um sistema físico (veja as eqs.(127) e (128)). Neste caso, o índice i está associado a posição espacial e a componente de *spin* da partícula fermiônica. Os geradores de Grassmann que aparecem na eq.(115) satisfazem as condições de contorno anti-periódicas no parâmetro de “temperatura” ν

$$\eta_i(n) = -\eta_i(0) \quad (116)$$

sendo que $\eta_l(\nu) = 0$ para $\nu > n$ e $l = 1, 2, \dots, \mathcal{N}$. Escrevemos o l.d. da eq.(115) em termos da expressão da

função grassmanniana na forma normal $\mathcal{Q}^{\textcircled{0}}(\bar{\eta}, \eta)$ uma vez que nas aplicações em que estamos interessados, os operadores fermiônicos já estão na forma normal (veja por exemplo a referência [8]).

V Aplicação da Álgebra de Grassman a Sistemas Fermiônicos

Para exemplificar a aplicação da álgebra de Grassmann ao cálculo de quantidades associadas a sistemas fermiônicos (*brackets*), consideramos o sistema fermiônico mais simples com apenas um grau de liberdade. A cinemática deste sistema corresponde a operadores de criação (\mathbf{a}^\dagger) e de aniquilação (\mathbf{a}) que satisfazem as relações de anticomutação (63). Os estados quânticos disponíveis para o férmion são: $|0\rangle$ e $|1\rangle$. A ação desses operadores sobre os estados quânticos disponíveis é dada pelas igualdades (64). As identificações

entre os vetores de estado e os geradores da álgebra de Grassmann são dadas pelas igualdades (66), assim como as identificações entre os operadores de criação e aniquilação e esses geradores são dadas pelas relações (65).

Vamos usar as propriedades discutidas na seção II para recuperar resultados conhecidos da Mecânica Quântica[1]. O primeiro desses resultados que calcularemos usando esta álgebra não-comutativa é a norma dos vetores de estado. É conhecido que a norma dos vetores de estado é igual a 1. Na notação de Dirac, a norma de um vetor é dada pelo *bracket*: $\langle i|i \rangle$, $i = 0, 1$. Vejamos como recuperar este resultado aplicando as propriedades da álgebra de Grassmann:

1) Norma do estado $\langle 0|0 \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle 0|0 \rangle &= \int d\bar{\eta}d\eta e^{-\bar{\eta}\eta} \cdot 1 \cdot 1 = \int d\bar{\eta}d\eta (1 - \bar{\eta}\eta) \\ &= \int d\bar{\eta}d\eta \bar{\eta} = 1 \Rightarrow \langle 0|0 \rangle = 1. \end{aligned} \quad (117)$$

2) Norma do estado $\langle 1|1 \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle 1|1 \rangle &= \int d\bar{\eta}d\eta e^{-\bar{\eta}\eta} \cdot \eta\bar{\eta} = \int d\bar{\eta}d\eta (1 - \bar{\eta}\eta) \eta\bar{\eta} \\ &= \int d\bar{\eta}d\eta \eta\bar{\eta} = 1 \Rightarrow \langle 1|1 \rangle = 1. \end{aligned} \quad (118)$$

Um outro resultado conhecido na literatura[1] é que o produto escalar entre dois vetores de estado que possuem número diferente de partículas é nulo. Calculemos então:

$$\begin{aligned} \langle 0|1 \rangle &= \int d\bar{\eta}d\eta e^{-\bar{\eta}\eta} \cdot 1 \cdot \bar{\eta} = \int d\bar{\eta}d\eta (1 - \bar{\eta}\eta) \bar{\eta} \\ &= \int d\bar{\eta}d\eta \bar{\eta} = 0 \Rightarrow \langle 0|1 \rangle = 0. \end{aligned} \quad (119)$$

O operador $\mathbf{n} = \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}$ é denominado de operador número de partículas, uma vez que ele conta o número de partículas num dado estado quântico[1]. Pela própria definição do operador \mathbf{n} , ele já está na forma normal. A partir da eq.(89), temos que o *kernel* associado a este operador é

$$\mathcal{N}(\bar{\eta}, \xi) = \bar{\eta}\xi. \quad (120)$$

Usando a definição (69) para o produto escalar e a eq.(77) que nos dá a função grassmanniana associada a ação de um operador fermiônico sobre um vetor de estado, calcularemos o elemento de matriz do operador \mathbf{n} nos estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$.

1) Cálculo de $\langle 0|\mathbf{n}|0 \rangle$:

$$\langle 0|\mathbf{n}|0 \rangle = \int d\bar{\eta}d\eta e^{-\bar{\eta}\eta} \cdot 1 \cdot n_0(\bar{\eta}), \quad (121)$$

sendo que $n_0(\bar{\eta})$ é a função grassmanniana associada ao vetor de estado $\mathbf{n}|0\rangle$. Para calcularmos a função $n_0(\bar{\eta})$ utilizamos as eqs.(77) e (90) lembrando que o *kernel* do operador \mathbf{n} é dado pela eq.(120), de forma que

$$\begin{aligned} n_0(\bar{\eta}) &= \int d\bar{\xi}d\xi e^{-\bar{\xi}\xi} e^{\bar{\eta}\xi} \bar{\eta}\xi \\ &= \int d\bar{\xi}d\xi (1 - \bar{\xi}\xi) \cdot (1 + \bar{\eta}\xi) \bar{\eta}\xi \\ &= \int d\bar{\xi}d\xi \bar{\eta}\xi = 0. \end{aligned} \quad (122)$$

Substituindo este resultado na eq.(121), obtemos:

$$\langle 0|\mathbf{n}|0 \rangle = 0, \quad (123)$$

que é consistente com a nossa definição original para o estado $|0\rangle$, que corresponde ao vácuo de partículas, ou seja, um estado com **zero** partículas.

2) Cálculo de $\langle 1|\mathbf{n}|1 \rangle$:

$$\langle 1|\mathbf{n}|1 \rangle = \int d\bar{\eta}d\eta e^{-\bar{\eta}\eta} \cdot \eta \cdot n_1(\bar{\eta}), \quad (124)$$

e procedendo de forma análoga ao caso anterior, ficamos com:

$$\begin{aligned} n_1(\bar{\eta}) &= \int d\bar{\xi}d\xi e^{-\bar{\xi}\xi} e^{\bar{\eta}\xi} \bar{\eta}\xi \bar{\xi} \\ &= \int d\bar{\xi}d\xi \bar{\eta}\xi \bar{\xi} = \bar{\eta}. \end{aligned} \quad (125)$$

Substituindo o resultado (125) na expressão (124), encontramos que:

$$\begin{aligned} \langle 1|\mathbf{n}|1 \rangle &= \int d\bar{\eta}d\eta (1 - \bar{\eta}\eta) \bar{\eta} \\ &= \int d\bar{\eta}d\eta \bar{\eta} = 1 \Rightarrow \langle 1|\mathbf{n}|1 \rangle = 1, \end{aligned} \quad (126)$$

que é também coerente com a nossa descrição original do conteúdo físico do estado $|1\rangle$.

Dos resultados anteriores, vemos que o operador $\mathbf{n} = \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}$ é realmente um contador do número de partículas do estado quântico sobre o qual ele atua.

Escolhemos os exemplos anteriores porque eles não dependem da dinâmica do sistema. No entanto, temos utilizado a álgebra de Grassmann para tratar sistemas fermiônicos em equilíbrio termodinâmico[8] com um reservatório com temperatura absoluta T (medida em Kelvin), inclusive permitindo que o sistema troque partículas com o reservatório. Dos livros textos[12], obtemos que a função de partição gran canônica de um

sistema que está em equilíbrio termodinâmico com um reservatório de calor e partículas é

$$\mathcal{Z}(\beta, \mu) = \text{Tr}[e^{-\beta\mathbf{K}}], \quad (127)$$

onde $\mathbf{K} = \mathbf{H} - \mu\mathbf{N}$, \mathbf{H} é a hamiltoniana que descreve o sistema que está em equilíbrio com o reservatório, $\beta = \frac{1}{kT}$, k é a constante de Boltzmann, μ o potencial químico e \mathbf{N} o operador número total de partículas. Tr é o traço sobre todos os estados quânticos disponíveis para o sistema. A função $\mathcal{Z}(\beta, \mu)$ possui a expansão[13]

$$\mathcal{Z}(\beta, \mu) = \text{Tr}[\mathbb{1} - \beta\mathbf{K}] + \frac{\beta^2}{2}\text{Tr}[\mathbf{K}^2] - \frac{\beta^3}{3!}\text{Tr}[\mathbf{K}^3] + \dots \quad (128)$$

Para o caso de férmions, aplicamos as propriedades apresentadas nas seções **IV** e **V** para calcular os traços que aparecem na expansão (128)[14]. Na referência [8] utilizamos esse formalismo para reobter a expressão exata da função de partição gran canônica do modelo fermiônico anarmônico. A álgebra de Grassmann tem sido também utilizada para calcular vários modelos em Mecânica Estatística, que são fermionizados para que se possa aplicar essa álgebra[15, 16, 17].

Na referência [7] Mundim e Mundim apresentam de forma didática como a álgebra de Grassmann pode ser utilizada para reescrever de forma elegante a Química Quântica. Esta formulação permite estender o conceito de valência de grupos e propõem uma nova prescrição para o estudo de conformações moleculares.

Uma outra formulação para férmions que envolve os geradores da álgebra de Grassmann é a integral de trajetória. No caso fermiônico as integrais de caminho somam sobre todas as possíveis funções que o campo fermiônico pode ter, apenas que neste caso essas funções são grassmannianas[3, 4, 5]. Esta formulação tem sido uma das principais ferramentas para obter informações sobre sistemas quânticos a temperatura zero e a temperatura finita. Apesar do método do cálculo de integral de trajetória de sistemas fermiônicos e o método apresentado na referência [14] envolverem funções definidas na álgebra de Grassmann, eles são distintos entre si. Eles possuem em comum apenas o fato de explorar as propriedades básicas da álgebra não-comutativa de Grassmann para obter resultados de sistemas fermiônicos.

VI Conclusões

Apresentamos um panorama geral das propriedades básicas da álgebra não-comutativa de Grassmann e as definições de suas operações básicas. Para manter a notação simples, tratamos de operadores fermiônicos sem índice de *spin*, para mostrar o mapeamento entre vetores de estado e operadores fermiônicos e funções grassmannianas. Demonstramos várias relações úteis para o cálculo de quantidades fermiônicas para álgebra

de dimensão $d = 2^2$ e apresentamos sua generalização para álgebras com dimensão $d = 2^{2N}$ com $N > 1$. É importante ressaltar que estas são as relações fundamentais utilizadas no tratamento de sistemas fermiônicos através da álgebra de Grassmann e o seu conhecimento é essencial para quem ingressa nesta área da Física.

Discutimos a aplicação da álgebra de Grassmann para obter resultados no modelo fermiônico mais simples na Mecânica Quântica (um grau de liberdade) e fazemos referência a trabalhos mais avançados onde esta álgebra tem sido utilizada para obter resultados para sistemas fermiônicos interagentes.

A álgebra de Grassmann apesar de sua estrutura pouco usual é na verdade a álgebra natural para tratar os férmions. A sua natureza anticomutativa, apesar de incomum à primeira vista, devido à nossa falta de familiaridade com quantidades que anticomutam, acaba levando a simplificações em cálculos mais complexos envolvendo sistemas fermiônicos de muitas partículas idênticas.

Agradecimentos

M.T.T. agradece a I.C. Charret, E.V. Corrêa Silva, S.M. de Souza e O. Rojas Santos por importantes discussões sobre a aplicação da álgebra de Grassmann ao longo de vários anos e a M. Moutinho pela leitura cuidadosa do texto. M.T.T. agradece também o apoio financeiro parcial do CNPq e FAPERJ.

References

- [1] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu and F. Laloë, *Quantum Mechanics*, vol. I, John Wiley & Sons (1977).
- [2] P.A.M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, 4th edition, Oxford Univ. Press(1976), section 32.
- [3] C. Itzykson and J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill (1980), section 9-1-3.
- [4] M.S. Swanson, *Path Integrals and Quantum Processes*, Academic Press (1992), chap. 5.
- [5] A. Das, *Field Theory- A Path Integral Approach*, World Scientific (1993), section 5.2.
- [6] H. Kleinert, *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, and Polymer Physics*, World Scientific (1990).
- [7] K.C. Mundim e M.S.P. Mundim, Rev. Bras. de Ensino de Física **19**, (1997) 209.
- [8] I.C. Charret, E.V. Corrêa Silva, S.M. de Souza, O. Rojas Santos, M.T. Thomaz and C.E.I. Carneiro, *Physica* **A264**, 204 (1999).
- [9] R.V. Churchill, *Complex Variables and Applications*, International Student Edition, 2nd edition, McGraw-Hill Kogakusha (1960), section 19.
- [10] Referência [1], pág. 95.

- [11] Para simplificarmos a discussão, não levamos em conta que os operadores de criação e aniquilação fermiônicos têm pelo menos o índice de *spin*. A extensão do que é discutido nesta seção para operadores que possuem índice(s) é simples, veja por exemplo a referência [3].
- [12] F. Reif, *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics*, Mc-Graw-Hill Kogakusha Ltd. (1965), pp. 226.
- [13] Seja \mathbf{A} um operador qualquer. A definição da exponencial de qualquer operador é:

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{1} + \mathbf{A} + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3 + \frac{1}{4!}\mathbf{A}^4 + \dots$$

- [14] I.C. Charret, E.V. Corrêa Silva, S.M. de Souza, O. Rojas Santos and M.T. Thomaz, *Journ. of Math. Phys.* **40**, 4944 (1999).
- [15] S. Samuel, *J. Math. Phys.* **21**, 2806 (1980); C. Itzykson, *Nucl. Phys.* **B210** [FS6], 448 (1982); V.N. Plechko, *Sov. Phys. Dokl.* **30**, 271 (1985); C. Itzykson and J.M. Drouffe, *Statistical Field Theory*, Cambridge Univ. Press (1991).
- [16] V.N. Plechko, *Sov. Phys.- Theor. Math. Phys.* **64**, 748 (1985); V.N. Plechko, *Physica A* **152** (1/2), 51 (1988).
- [17] R. Hayn and V.N. Plechko, *Yad. Fiz.* **61**, 2080 (1998) (*Phys. A. Nucl.* **61**, 1972 (1998)).