

# Simulação Gráfica do Comportamento Quântico da Cadeia Monoatômica

(Graphical simulation of the quantum behavior of the atomic chain)

Luciano Terra Peixoto e Newton Elói Oliveira de Azevedo\*

*Departamento de Física, Universidade Federal do Espírito Santo*

*29060-900 Vitória, ES, Brasil*

Recebido em 20 de Abril, 2000. Aceito em 14 de Julho, 2000.

No presente trabalho exploramos o uso da computação gráfica para simulação do comportamento quântico de uma cadeia atômica. Preliminarmente, completando trabalho anterior, desenvolvemos um programa em C++ para visualização do comportamento clássico de uma cadeia diatômica, tanto nos modos acústicos quanto nos ópticos. Trabalhamos então com tratamento quântico, em relação inicialmente a um único oscilador harmônico, e depois a um conjunto de osciladores acoplados análogo à cadeia atômica na aproximação harmônica. Uma vez superado o problema de estabilidade que tais algoritmos apresentam, o objetivo de simulação em relação ao oscilador único foi atingido sem restrições. No caso dos osciladores acoplados, a necessidade de trabalhar com funções de tantas variáveis quanto o número de osciladores nos leva a um algoritmo com múltiplos loops aninhados e à exigência de memória e de velocidade de processamento incompatíveis, nos computadores atuais, com a visualização do comportamento do sistema através da animação de imagens. Recorremos então à transformação de coordenadas para modos normais do sistema, o que evita a dificuldade apontada, mas com perda parcial da idéia de simulação.

In this work we explore the use of computer graphics to simulate the quantum behavior of an atomic chain. Preliminarily, concluding a previous work, we developed a C++ program to visualise the classical behavior of a diatomic chain, in order to observe this behavior for acoustical and optical modes. Then we turned to the quantum approach, first for a single harmonic oscillator, and then for a set of coupled oscillators analog to the atomic chain in the harmonic approximation. Once surmounted the stability problem posed by such algorithms, the simulation for the single oscillator have been achieved without any restriction. In the case of the coupled oscillators, the need to work with functions of so many variables as the number of atoms in the chain, lead us to an algorithm with multiple nested loops and to memory and speed requirements incompatibles in the existing computers with the visualization of the behavior of the system trough images animation. We then resorted to the coordinate transformation to normal coordinates of the system, a procedure which avoids the problem but with partial loss of the idea of simulation.

## I Introdução

Em um trabalho anterior descrevemos o desenvolvimento de um programa de computador, designado “Simulação de um Laboratório para estudo do Comportamento da Cadeia Atômica”, servindo para visualização do comportamento de um conjunto de osciladores acoplados na abordagem da física clássica (PEIXOTO e GOMES, 1998). O termo simulação no caso significa que o programa se encarrega de encontrar a posição e a velocidade de cada átomo em cada instante por solução numérica da equação de Newton na forma diferencial, a partir de posições e velocidades escolhidas para um ins-

tante inicial. Neste sentido, tivemos oportunidade de observar peculiaridades do comportamento do sistema até então insuspeitas. Se tais peculiaridades correspondem ou não ao comportamento real da cadeia é uma questão em aberto.

No presente trabalho descrevemos o complemento daquele programa, primeiramente nos referindo ao comportamento da cadeia diatômica na aproximação harmônica. A cadeia foi representada por uma sequência horizontal de círculos desenhados na tela do computador, capazes de oscilar verticalmente com a passagem de excitações transversais, ou horizontalmente com a passagem de excitações longitudinais. A

\*Estudante de Física, bolsista de Iniciação Científica (CNPq)

cadeia atômica é tomada como modelo unidimensional de um sólido, para observação e estudo de seu comportamento vibracional. Reescrevemos aqui a equação de Newton e a expressão de definição da velocidade na forma discreta, tal como utilizadas naquele trabalho:

$$v_p \left( t + \frac{\delta}{2} \right) = v_p \left( t - \frac{\delta}{2} \right) + \omega_0^2 \delta [y_{p+1}(t) + y_{p-1}(t) - 2y_p(t)] \quad (1 - a)$$

$$y_p(t) = y_p(t - \delta) + \delta v_p \left( t - \frac{\delta}{2} \right). \quad (1 - b)$$

A velocidade e a posição do  $p$ -ésimo átomo em um instante são aqui obtidas da velocidade e da posição do mesmo átomo e de átomos vizinhos em instantes anteriores;  $\delta$  representa o incremento de tempo e  $\omega_0$  é a frequência natural de oscilação, dada pela raiz quadrada da razão  $k/m$ , sendo  $k$  a constante de mola e  $m$  a massa do átomo. A equação de Newton acima está adaptada para a situação em que cada átomo interage apenas com os dois vizinhos mais próximos (ASHCROFT, 1976). Notar que as velocidades e as posições são consideradas em instantes alternados, o que constitui um recurso para tornar o algoritmo rápido o suficiente e livre de instabilidades (HOCKNEY, 1970, PEIXOTO e GOMES, 1998).

No caso da cadeia diatômica o par de equações acima se desdobra em dois pares, um válido para a velocidade  $v_p$  e a coordenada  $y_p$  de um tipo de átomo, envolvendo as coordenadas  $y'_{p+1}$  e  $y'_{p-1}$  dos átomos vizinhos que são do segundo tipo, e o outro par válido para a velocidade  $v'_p$  e a coordenada  $y'_p$  do segundo tipo de átomo, envolvendo as coordenadas  $y_{p+1}$  e  $y_{p-1}$  dos átomos vizinhos que são do primeiro tipo. Os dois pares de equações também se diferenciam pelo valor de  $\omega_0$ , isso porque os dois tipos de átomos tem massas diferentes. Tudo que é necessário fazer é duplicar o programa original, com escolhas apropriadas de  $\omega_0$  e com o necessário cuidado no trato das condições iniciais. Elas devem corresponder à presença em  $t=0$  de modos normais acústicos ou modos normais óticos.

## II O tratamento quântico do oscilador harmônico

A equação de Schrodinger dependente do tempo para um oscilador harmônico de massa  $m$  e constante elástica  $k$ , com afastamento em relação à posição de equilíbrio designado por  $y$ , é

$$-i\hbar \frac{\partial \Psi(y, t)}{\partial t} = \left( \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2}ky^2 \right) \Psi(y, t) \quad (2)$$

Aqui as variáveis  $y$  e  $t$  tornam-se discretas, e a equação diferencial torna-se uma equação de diferenças finitas,

$$\begin{aligned} & \frac{-i\hbar}{\delta} \left[ \Psi \left( y, t + \frac{\delta}{2} \right) - \Psi \left( y, t - \frac{\delta}{2} \right) \right] \\ &= -\frac{\hbar^2}{2ma^2} [\Psi(y+a, t) + \Psi(y-a, t) - 2\Psi(y, t)] + \frac{1}{2}ky^2 \Psi(y, t), \end{aligned} \quad (3)$$

onde  $\delta$  é o incremento no tempo e  $a$  o incremento em  $y$ , tal que  $y_m = ma$ . Esta equação se desdobra em duas quando consideramos separadamente a parte real  $R(y, t)$  e a parte imaginária  $I(y, t)$  da função de onda  $\Psi(y, t)$ . Obtemos então ,

$$R_{+m} = R_m^- + c[I_{m+1} + I_{m-1} - 2I_m] - dm^2 I_m, \quad (4 - a)$$

$$I_{+m} = I_m^- - c[R_{m+1} + R_{m-1} - 2R_m] + dm^2 R_m, \quad (4 - b)$$

onde introduzimos índices superiores + e - para representar o valor da função em  $t + \delta/2$  e  $t - \delta/2$ , respectivamente, de forma que sem o índice o valor da função se refere ao instante  $t$ . Também introduzimos os parâmetros  $c = \hbar\delta/2ma^2$  e  $d = k\delta a^2/2\hbar$ , de modo que a escolha de valores de  $k$ ,  $m$ ,  $\delta$  e  $a$  se reduzem à escolha de valores de  $c$  e  $d$ . As expressões (4) são aplicadas dentro da condição de contorno periódica, tal que, sendo  $N$  o número de átomos da cadeia, então  $\Psi_{N+1} = \Psi_1$  e  $\Psi_{m-1} = \Psi_N$  para  $m = 1$ . Calculadas as partes real e imaginária da função de onda, o que vamos representar na tela do computador será, instante por instante, a curva da distribuição de probabilidade, dada por

$$P_m = R_m^2 + I_m^2. \quad (5)$$

Podemos fazer o programa desenhar pontos na tela do computador, cujos afastamentos verticais em relação a uma linha horizontal vão representar probabilidades não nulas do átomo ocupar as posições horizontais correspondentes.

Na implementação do cálculo das expressões (4-a) e (4-b), é desejável um algoritmo suficientemente rápido para que, ao se imprimir toda a sequência de círculos na tela do computador em ciclos sucessivos do processamento, se tenha impressão de continuidade de movimento da curva da distribuição de probabilidade. Neste sentido é apropriada a escolha dos chamados *algoritmos explícitos*, para os quais a variável dependente ( $R_m$  ou  $I_m$ ) só aparece no lado direito da expressão quando válida para um instante anterior. Tais métodos apresentam entretanto o problema da instabilidade, por causa da magnitude do erro numérico - da ordem do próprio incremento do tempo - a que estão sujeitos. Métodos implícitos, por outro lado, podem apresentar erro de segunda ordem no incremento do tempo e são

estáveis, mas são lentos, porque um sistema de equações algébricas lineares tem que ser resolvida em cada ciclo de processamento (BUTCHER, 1994). É possível contornar o problema utilizando um algoritmo explícito em que as partes real e imaginária da função de onda são dadas em instantes de tempo alternados (HOCKNEY, 1970, VISSCHER, 1991). Ele está discutido no Apêndice.

Neste algoritmo os valores de  $R$  na expressão (4) são definidos, por exemplo, nos instantes  $0, \delta, 2\delta, \dots$ , e os de  $I$  nos instantes  $\delta/2, 3\delta/2, 5\delta/2, \dots$ . Para ocorrer a conservação de probabilidade, é necessário reescrever a expressão (5) na forma

$$P_m = R_m^2 + I_m^+ I_m^- \quad (\text{para } P \text{ e } R \text{ nos instantes } 0, \delta, 2\delta, \dots) \quad (6-a)$$

$$P_m = R_m^+ + R_m^- + I_m^2 \quad (\text{para } P \text{ e } I \text{ nos instantes } \delta/2, 3\delta/2, 5\delta/2, \dots). \quad (6-b)$$

Em (6-a), para valores de  $P$  e  $R$  tomados no instante  $t = \delta$ , entram os valores de  $I^+$  e  $I^-$  nos instantes  $3\delta/2$  e  $\delta/2$ , respectivamente, e em (6-b), para os valores de  $P$  e  $I$  tomados no instante  $t = \delta/2$ , entram os valores de  $R^+$  e  $R^-$  nos instantes  $t = \delta$  e  $t = 0$ , respectivamente. É fácil verificar que (5) deve ser substituída pelas duas expressões acima. Basta tomar uma dependência temporal na forma  $\exp(i\omega t)$  em  $\Psi$  e substituir a parte real  $R$  por  $\cos(\omega t)$  e a parte imaginária  $I$  por  $\sin(\omega t)$  e, tendo em conta os instantes de definição dos vários termos, verificar que o cumprimento da condição

$$\sum_m P_m = 1 \quad (7)$$

fica garantida instante por instante.

Devemos escolher valores iniciais para os vários  $R_m$  e  $I_m$  tais que representem a parte real no instante  $t = 0$  e a parte imaginária no instante  $t = \delta/2$ . Trabalhamos com curvas gaussianas, dadas por

$$R_m(0) = A e^{-(y_m/\sqrt{2}\sigma)^2} \cos(\omega 0) \quad (8-a)$$

$$I_m\left(\frac{\delta}{2}\right) = A e^{-(y_m/\sqrt{2}\sigma)^2} \sin\left(\omega \frac{\delta}{2}\right) \quad (8-b)$$

onde a constante  $A$  é escolhida em função do tamanho da figura na tela do computador. As duas curvas entram como  $R^-$  e  $I^-$  em (4), para o cálculo de  $R^+$  e  $I^+$  nos instantes  $t = \delta$  e  $t = 3\delta/2$ , respectivamente, os quais, por sua vez, retornam como  $R^-$  e  $I^-$  em (4) para o cálculo de  $R$  e de  $I$  nos instantes  $t = 2\delta$  e  $t = 5\delta/2$ , respectivamente, e assim por diante.

### III Osciladores acoplados

Consideremos aqui  $N$  osciladores de massa  $m$ , situados sobre o eixo  $x$ , acoplados por molas idênticas, de constante elástica  $k$ , separados pela distância  $b$ . A posição

de equilíbrio do  $n$ -ésimo oscilador será dada por  $x = nb$ . Cada oscilador movimentar-se na direção  $y$ , na nossa descrição dando saltos entre pontos vizinhos sobre uma linha de  $M$  pontos separadas pela distância  $a$ . Ou seja, representando o deslocamento do  $n$ -ésimo oscilador em relação à respectiva posição de equilíbrio por  $y_n$ , cada variável  $y_n$  terá  $M$  possíveis valores dados por  $y_n = ma$ . A função de onda  $\Psi(y_1, y_2, \dots, y_N)$ , fornece a probabilidade de ocorrer um dado conjunto de valores para as coordenadas  $y_1, y_2, \dots, y_N$ :

$$P(y_1, y_2, \dots, y_N) = |\Psi(y_1, y_2, \dots, y_N)|^2. \quad (9)$$

A função de  $N$  partículas  $\Psi(y_1, y_2, \dots, y_N)$  não é separável em produto de funções de onda de uma partícula porque os osciladores são acoplados. Para obter a curva de distribuição de probabilidade para o  $i$ -ésimo oscilador é necessário calcular a expressão

$$P(y_i) = \sum_{y_1} \sum_{y_2} \dots \sum_{y_N} P(y_1, y_2, \dots, y_N) \quad (10)$$

em que fica excluído o somatório sobre  $y_i$ . Isso significa que o algoritmo de simulação deverá ter um total de  $N - 1$  loops aninhados. Sendo  $N$  e  $M$  números da ordem de dezenas, isso implicará em velocidade de processamento incompatível com a intenção de visualização de movimento contínuo da curva de distribuição de probabilidade para cada oscilador. Além disso, poderemos enfrentar o problema de limitação de memória do computador, pois precisaremos estocar  $M^N$  valores para cada variável  $P, R$  e  $I$  (cada uma delas com  $N$  índices, cada índice podendo tomar  $M$  valores).

Sem essas limitações, para observar um modo normal bastaria introduzir no programa a condição inicial correspondente à sua excitação, e observar a resposta do sistema. Com elas, a observação do modo normal só será possível se levarmos em conta que basta fazer a simulação para um único oscilador e aproveitar o fato de que a curva que representa a distribuição de probabilidade em dado instante para este oscilador vale também para os demais osciladores, apenas introduzindo-se a relação de fase apropriada ao comprimento de onda do modo normal que se deseja observar. O preço a pagar é a perda parcial da idéia de simulação, porquanto estaremos introduzindo no programa informações referentes ao conhecimento prévio do comportamento do sistema.

A transformação das coordenadas cartesianas  $y_n$  para as coordenadas normais  $u_m$  e a transformação inversa podem ser escritas na forma (ASHCROFT, 1976)

$$u_m = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=0}^N y_n \sin q_m x_n \quad (11-a)$$

$$y_n = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{m=0}^N u_m \text{sen} q_m x_n \quad (11 - b)$$

onde  $x_n = nb$ . Os vetores de onda  $q_m$  podem ser determinados de modo a satisfazer a condição de contorno periódica, tal que  $y_{n+N} = y_n$ , o que implica em  $q_m = (2\pi/Nb)(m - N/2)$ , com  $m$  variando entre 0 e  $N$  para que os valores de  $q$  fiquem compreendidos entre  $-\pi/b$  e  $\pi/b$  (primeira zona de Brillouin). A expressão (11-b) nos diz que o afastamento do  $n$ -ésimo oscilador em relação à respectiva posição de equilíbrio é obtido pela superposição dos afastamentos provocados pelos vários modos normais, cada um deles uma onda senoidal de amplitude  $u_m$  e comprimento de onda  $\lambda_m = Nb/(m - N/2)$ .

### IV Resultados e Discussões

Os programas foram codificados com a linguagem C++ (Press *et al*, 1992). A Fig. 1 mostra o aspecto da tela do computador em um estágio da execução do código para simulação do comportamento de modos normais acústico e óptico de uma cadeia diatômica com 60 átomos. Os dois tipos de átomos são indicados por círculos em preto e em branco. Ambos os modos mostrados na figura tem comprimento de onda igual à metade do comprimento da cadeia, ficando evidente a oscilação de dois átomos vizinhos com defasagem de 180° no caso do modo óptico e sem defasagem no caso do modo acústico. É sugerido ao aluno medir as duas frequências com o cronômetro de seu relógio de pulso (contando 10 ou mais oscilações) e verificar, a partir da razão entre as massas dos átomos informada na tela do computador, que a razão entre as frequências satisfaz conhecida expressão válida para a cadeia diatômica no limite de grandes comprimentos de onda (ver, por exemplo, ASHCROFT, 1976). Podemos dizer que aqui os objetivos da simulação são atingidos sem restrições, sendo possível simular modos normais de diferentes comprimentos de onda, em cada caso para os dois modos de oscilação da rede.

A Fig. 2 mostra o aspecto da tela em um instante durante a execução do programa para simulação do comportamento quântico de um único oscilador harmônico. Os círculos na tela do computador indicam pontos da curva  $P(x)$ , representando a probabilidade do oscilador ser encontrado na posição  $x$ . Novamente podemos dizer que os objetivos da simulação são atingidos sem restrições, percebendo-se o que o pulso que representa  $P(x)$  se desloca para a esquerda e para a direita, com velocidade máxima no centro do espaço de oscilação.

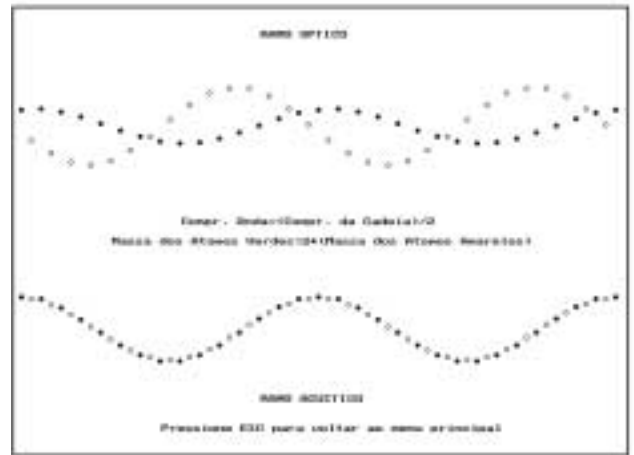


Figura 1. Aspecto da tela do computador em um estágio do processamento do programa para visualização do comportamento de uma cadeia diatômica.



Figura 2. Aspecto da tela do computador em um estágio do processamento do programa para visualização do comportamento quântico de um oscilador harmônico.

Na Fig. 3 mostramos o aspecto da tela do computador em um instante da simulação do programa para o modo normal com comprimento de onda igual ao comprimento da cadeia. A figura, no caso, tem um caráter tridimensional. A curva de distribuição de probabilidade, que chamamos de  $P(x)$ , é representada por um pulso que oscila horizontalmente na tela do computador. Ela corresponde a um átomo que oscila na mesma direção. Diferentes átomos estão dispostos segundo a direção  $y$ . O modo normal se propaga na direção  $y$ , provocando o deslocamento transversal dos pulsos de probabilidade de uma forma que lembra o serpentear de uma cobra. Aqui se deve ter em conta que a simulação, pelo menos no sentido que temos empregado neste trabalho, só ocorre para um único oscilador, sendo a posição do pulso para cada um dos demais osciladores determinada de modo a se cumprir a relação de fases correspondentes ao modo normal com  $\lambda =$  comprimento da cadeia.

Uma versão experimental do programa para simulação pode ser solicitado pelo endereço eletrônico luciano@cce.ufes.br.

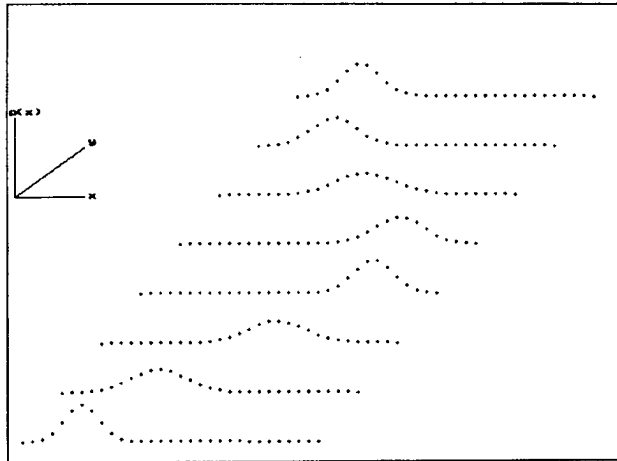


Figura 3. Aspecto do modo normal correspondente a  $\lambda =$  comprimento da cadeia.

## Apêndice

Um dos problemas com o presente algoritmo é o de estabilidade, isto é, o de se conseguir impedir que os círculos na tela do computador passem a oscilar com amplitudes cada vez maiores até desaparecerem e isso provocar a interrupção do programa. Já discutimos o critério de estabilidade para o tratamento clássico da cadeia linear em um trabalho anterior (PEIXOTO E GOMES, 1998). Vamos aqui discutí-lo para o tratamento quântico. Basicamente adaptamos os argumentos de Visscher (VISSCHER, 1991), válidos para o comportamento quântico de uma partícula livre. Discretizando a equação de Schrödinger,

$$-i\hbar \frac{\partial \Psi(y, t)}{\partial t} = H \Psi(y, t) \quad (A-1)$$

separando a parte real da parte imaginária e utilizando a notação adotada acima, obtemos

$$R^+ = R^- + \frac{H\delta}{\hbar} I \quad (t = 0, \delta, 2\delta, \dots) \quad (A-2)$$

$$I^+ = I^- \frac{H\delta}{\hbar} R \quad (t = \delta/2, 3\delta/2, 5\delta/2, \dots) \quad (A-3)$$

Uma representação matricial para (A.2), com  $A = H\delta/\hbar$ , é,

$$\begin{pmatrix} R^+ \\ I^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & A \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^- \\ I^- \end{pmatrix} \quad (A-4)$$

que não é uma equação de evolução temporal, pois do lado esquerdo temos a parte real da função de onda considerada em um instante posterior ao da parte imaginária, enquanto o reverso ocorre no lado direito. Para

obter a equação de evolução temporal, consideremos a representação matricial correspondente para a equação (A.3)

$$\begin{pmatrix} R^- \\ I^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -A & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^+ \\ I^+ \end{pmatrix} \quad (A-5)$$

e substituindo (A.5) em (A.4):

$$\begin{pmatrix} R^+ \\ I^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - A^2 & A \\ -A & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^- \\ I^- \end{pmatrix}. \quad (A-6)$$

Agora temos uma equação de evolução temporal, em que a matriz de evolução tem autovalores

$$1 - \frac{1}{4}A^2 \pm A \left[ \frac{1}{4}A^2 - 1 \right]^{1/2} \quad (A-7)$$

A matriz será unitária se os autovalores tiverem módulo 1, o que vai acontecer se  $|A| \leq 2$ , e esta será a condição de estabilidade para o sistema.

Consideremos a atuação de  $H$  sobre a função de onda do estado fundamental do oscilador harmônico, de forma gaussiana, que corresponde à escolha que fizemos anteriormente para representar o estado inicial do sistema, dada por (LEIGHTON, 1959):

$$\Psi(y) = B \exp[-y^2/2\sigma^2]. \quad (A.8)$$

onde  $B$  é uma constante de normalização e  $\alpha^2 = mw/\hbar$ . Aplicando o operador  $H$  obtemos, como na expressão (3),

$$\begin{aligned} \frac{H}{\hbar} \Psi(y, t) = & \left[ -\frac{\hbar}{2ma^2} (\Psi(y+a, t) \right. \\ & \left. + \Psi(y-a, t) - 2\Psi(y, t)) + \frac{a^2}{2\hbar} km^2 \Psi(y, t) \right] \quad (A-9) \end{aligned}$$

onde, como antes,  $y = ma$ . Substituindo (A.8) em (A.9) e multiplicando ambos os membros pelo incremento de tempo  $\delta$ , encontramos,

$$\begin{aligned} \frac{H\delta}{\hbar} \Psi(y, t) = & \{c[1 - e^{-a^2/2\sigma^2} \cos(a^2 m/\sigma^2) \\ & + a^4 m^2/\sigma^2]\} \Psi(y, t) \end{aligned}$$

onde  $c$  é aqui a mesma constante introduzida na seção II. O termo entre chaves é aquele acima chamado de  $A$ , e assim, levando em conta que o valor máximo de  $m$  é  $M$  e representando a largura do pacote gaussiano por  $\sigma = m_0 a$ , a condição de estabilidade fica

$$c|1 - e^{-1/2m_0^2} \cos(M/m_0^2) + (M/m_0^2)^2| \leq 2$$

Por exemplo, para  $M = 30$  e  $m_0 = \sqrt{3}$ , encontramos  $c \leq 0.02$  como condição para o sistema ficar estável.

## References

- [1] L. T. Peixoto e K.Q. Gomes, *Rev. Bras. Ens. Fís.*, **20** 111 (1998).
- [2] N. W. Ashcroft e N. D. Mermin, *Solid State Physics*. Philadelphia, Holt-Saunders, 1976.
- [3] J. C. Butcher, *Comp. Phys.* **8**(4), 411 (1994).
- [4] B. P. Flannery, W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, *Numerical Recipes in C*. Cambridge, Cambridge University Press, 1992.
- [5] P. B. Visscher, *Comp. Phys.* nov/dec, 596, 1991.
- [6] R. W. Hockney; *Methods Comput. Phys.*, **9**, 136 (1970).
- [7] Robert B. Leighton, *Principles of Modern Physics*. New York, McGraw-Hill, 1959.