

# Distância Geométrica Média de J. C. Maxwell no Cálculo de Campos Magnéticos

(J.C. Maxwell's Geometrical Mean Distance for Magnetic Field Calculations)

Renê Robert

*Departamento de Eletricidade  
Universidade Federal do Paraná  
C.P. 19047 Curitiba PR 81531-990*

Sérgio Luiz Meister Berleze

*Departamento de Física  
Universidade do Paraná  
C.P. 19047 Curitiba PR 81531-990*

Recebido em 20 de Maio de 1999. Manuscrito revisado recebido em 03 de Março, 2000.

Aceito em 06 de Abril, 2000.

Mostra-se como calcular campos magnéticos, coeficientes de auto-indutância e indutância mútua para condutores cilíndricos, paralelos, infinitos de seção transversal qualquer. O formalismo utilizado foi introduzido por J.C. Maxwell e está baseado nos conceitos de distância geométrica média: entre um ponto e uma seção transversal; entre duas seções transversais; e própria de uma seção transversal. Aplica-se o princípio de superposição e sugere-se o uso de técnicas numéricas a qual é facilitada por este formalismo.

It is shown how to calculate magnetic fields, self-inductance and mutual inductance coefficients for cylindrical, parallel and infinite conductors with any transverse section. The used formalism was introduced by J.C. Maxwell and is based on the concept of mean geometric distance between: a point and a transverse section; two transverse sections; and intrinsic to a transverse section. The superposition principle is applied and it is suggested the use of numerical techniques which is made easy with this formalism.

## I Introdução

Existem inúmeros problemas onde é necessário o conhecimento do campo elétrico, do campo magnético, dos coeficientes de indução elétrica (capacitâncias) e dos coeficientes de indução magnética (indutâncias)[1]. Aliado ao conhecimento dos campos elétricos e magnéticos citamos os polêmicos efeitos biológicos destes sobre os seres vivos[2,3]. As capacitâncias e indutâncias por sua vez estão associadas ao cálculo de energias elétricas e magnéticas, impedâncias e encontram aplicações no dimensionamento de barramentos, linhas de transmissão de energia elétrica, bobinas, trilhas de circuito impressos etc. A obtenção de soluções analíticas para estas grandezas nem sempre é tarefa fácil, exigindo em alguns casos considerável volume de operações o que em geral conduz a expressões matemáticas de difícil manuseio. Nestas condições a única solução plausível é lançar

mão de técnicas numéricas. Neste trabalho vamos nos ater somente a campos magnéticos e indutâncias.

Alguns problemas são passíveis de simplificações que conduzem a exercícios interessantes do ponto de vista acadêmico e cujos resultados são razoavelmente bons do ponto de vista prático. São aqueles em que a distribuição de corrente apresenta simetria de translação, como por exemplo em barramentos e linhas de transmissão utilizadas no transporte de energia elétrica. Em geral, em tais sistemas os condutores são paralelos entre si e seus comprimentos são muito maiores que as dimensões transversais, de modo que o problema de cálculo pode ser tratado em duas dimensões.

O desenvolvimento do formalismo aqui exposto baseia-se nos conceitos de potencial vetor, energia magnética e distância geométrica média introduzida por J.C. Maxwell (1872)[4,5]. Utiliza-se os conceitos de distância geométrica média de um ponto a uma

seção transversal, distância geométrica média mútua entre duas seções transversais e distância geométrica média própria de uma seção transversal. Com o intuito de simplificar o problema admite-se algumas hipóteses: os condutores são cilíndricos de seção transversal qualquer, paralelos e de comprimento muito maior que as dimensões das seções transversais, desprezando-se os efeitos de extremidade; os condutores são considerados não-magnéticos e as correntes elétricas se distribuem uniformemente sobre as seções transversais. Este assunto é abordado em poucos textos de eletromagnetismo dedicados a engenharia e raramente naqueles dedicados à física básica.

## II Campo magnético

Considere um condutor cilíndrico de seção transversal  $S$  e comprimento  $L$  ( $L \gg S^{1/2}$ ) percorrido por uma corrente elétrica  $I$ . O sistema de coordenadas utilizado possui eixo  $Oz$  paralelo à geratriz do cilindro. Dividamos o condutor em condutores filiformes de seção transversal  $dS(u, v)$ , onde  $(u, v)$  são as coordenadas cartesianas da área elementar. O potencial vetor no ponto  $P(x, y)$ , definido a menos de uma constante, é dado por [6]:

$$A_z = -\frac{\mu_0 I}{2\pi S} \int_S \ln[(x-u)^2 + (y-v)^2]^{1/2} dS \quad (1)$$

A seção transversal  $S$  é dividida em  $n$  pequenas áreas  $\Delta S_i$  e  $r_i$  as distâncias do ponto  $P$  ao  $i$ -ésimo elemento de área. Por definição a distância geométrica média do ponto  $P$  à área  $S$  é dada pela expressão:

$$G = \lim_{n \rightarrow \infty} (r_1 r_2 \dots r_n)^{1/n} \quad (2)$$

quando  $n \rightarrow \infty$ , ou ainda:

$$\ln G = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\ln r_i}{n} = \frac{1}{S} \int_S \ln[(x-u)^2 + (y-v)^2]^{1/2} dS \quad (3)$$

A distância geométrica média assim definida apresenta algumas propriedades:

- É invariante para translações e rotações do sistema de coordenadas.

- se  $G_1$  e  $G_2$  são distâncias geométricas médias de um ponto  $P$  a duas seções  $S_1$  e  $S_2$  respectivamente, então a distância geométrica média  $G$  de  $P$  à seção  $S_1 \cup S_2$  é dada por:

$$(S_1 + S_2) \ln G = S_1 \ln G_1 + S_2 \ln G_2 \quad (4)$$

Conseqüentemente o potencial vetor fica:

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln(1/G) \quad (5)$$

Calculando o rotacional da Eq.5 teremos para o campo de indução magnética a expressão:

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi G} \hat{k} \times \vec{\nabla} G \quad (6)$$

O conhecimento do potencial vetor pode ser utilizado para obter:

i) - A configuração do campo de indução magnética, pois o lugar geométrico dos pontos  $A_z(x, y) = \text{const.}$  representa as linhas do campo de indução magnética.

ii) - O fluxo do vetor indução magnética através de uma superfície aberta  $\Sigma$  que se apoia num contorno  $\Gamma$ , o que é dado pela circulação do potencial vetor, isto é:

$$\oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{\Sigma} B_n dS \quad (7)$$

Observa-se que, com a introdução do potencial vetor os cálculos são menos laboriosos.

### II.1 Aplicação: barra delgada

Uma aplicação na qual é fácil proceder à integração da Eq. 3 e cujo resultado apresenta real interesse consiste em considerar um condutor retangular de altura  $2h$  e largura  $2d$  ( $h \gg d$ ) conforme mostra a Fig. 1. Após os cálculos obtém-se:

$$\ln G = \frac{1}{2h} [-(y-h) \ln R_1 + (y+h) \ln R_2 - x(\Phi_1 - \Phi_2) - 2h] \quad (8)$$

Com as Eq. 5 e 6 calculam-se facilmente os vetores  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$ , na hipótese da corrente  $I$  se distribuir uniformemente na seção transversal. Obtém-se então:

$$A_z(x, y) = \frac{\mu_0 I}{4\pi h} [(y-h) \ln R_1 - (y+h) \ln R_2 + x(\Phi_1 - \Phi_2) + 2h] \quad (9)$$

$$B_x(x, y) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi h} \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right) \quad (10)$$

$$B_y(x, y) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi h} (\Phi_1 - \Phi_2) \quad (11)$$

A Fig. 2 mostra as linhas de campo do vetor indução magnética quando  $h = 2$  unidades de comprimento, usando a observação i) citada na seção II.

No caso de um anel ou círculo a distância geométrica média de um ponto a estas seções é igual à distância do centro do anel ou círculo ao ponto em questão.

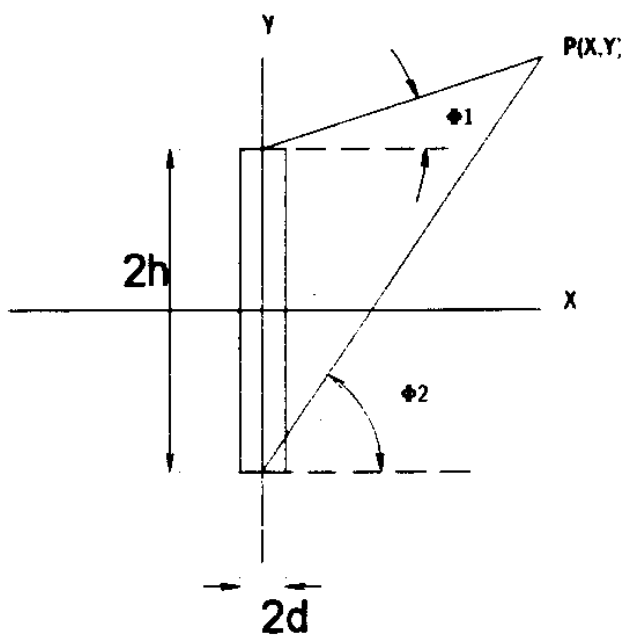


Figura 1. Barra delgada

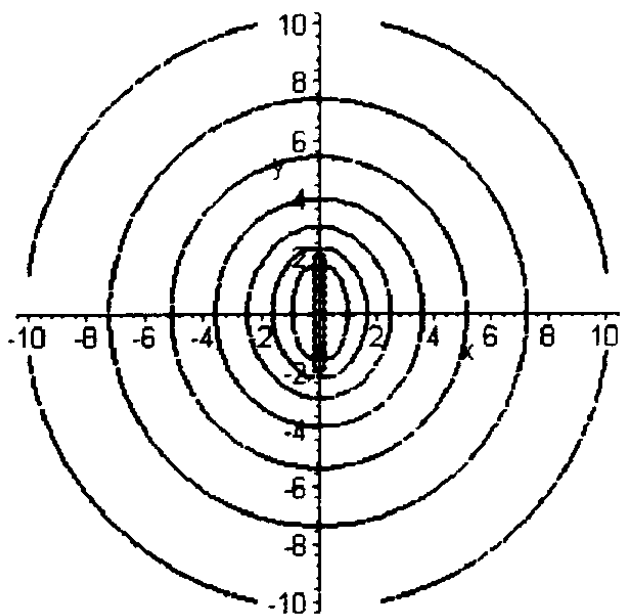


Figura 2. Linhas de campo do vetor  $\vec{B}$ .

## II.2 Seções com outras formas geométricas

O resultado da seção II.1 sugere um método para o cálculo do campo magnético devido a um condutor de seção transversal qualquer. Consiste em dividir a seção transversal em fitas paralelas de igual espessura sobre as quais aplicamos as Eqs. 10 e 11 e o princípio de superposição. A utilização do princípio de superposição

permite generalizar o método aqui exposto, para a resolução de problemas com qualquer número de condutores.

Na Fig. 3 mostra-se um exemplo de aplicação desta técnica com implementação numérica para um barramento de distribuição de energia elétrica industrial.

Uma análise visual das Figs. 2 e 3 permite concluir que a medida que o ponto de observação afasta-se do condutor as linhas de campo se tornam circunferências de círculo e o campo de indução magnética pode ser calculado facilmente pela conhecida fórmula do campo de um condutor filiforme retilíneo.

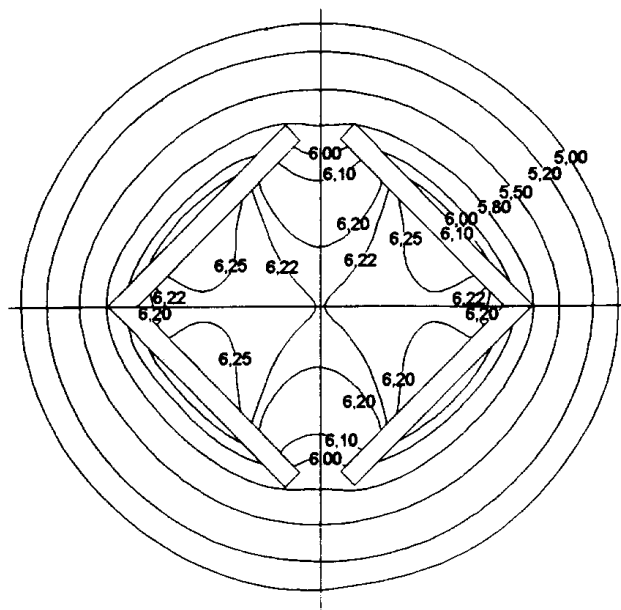


Figura 3. Linhas do campo de indução magnética para um barramento de distribuição de energia elétrica. As unidades de campo são arbitrárias.

## III Coeficientes de indutância

A energia magnética contida num volume  $V$  gerada por um condutor cilíndrico pode ser escrita, a menos de uma constante, como [6,7]:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \vec{J}(x, y, z) \cdot \vec{A}(x, y, z) dV(x, y, z) \quad (12)$$

sendo  $\vec{A}(x, y, z)$  o potencial vetor e  $\vec{J}(x, y, z)$  o vetor densidade de corrente.

Lembrando que o potencial vetor pode ser escrito como:

$$\vec{A}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(u, v, w)}{r} dV(u, v, w) \quad (13)$$

onde  $r = [(x - u)^2 + (y - v)^2 + (z - w)^2]^{1/2}$ .

Substituindo a Eq. (13) na Eq. (12) ficamos com:

$$W = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV(x, y, z) \int_V \frac{\vec{J}(x, y, z) \cdot \vec{J}(u, \nu, w)}{r} dV(u, \nu, w). \quad (14)$$

Aplicando a Eq.(14) a um condutor de comprimento  $\ell$  e seção transversal  $S$ , no qual passa uma corrente  $I$  uniformemente distribuída, obtém-se:

$$W = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi S^2} \int_S dS(x, y) \int_S dS(u, \nu) \int_0^\ell dz \int_0^\ell [R^2 + (z - w)^2]^{-1/2} dw \quad (15)$$

em que  $R = [(x - u)^2 + (y - \nu)^2]^{1/2}$ .

Com alguma manipulação algébrica e na hipótese de que  $\ell \gg R$  obtém-se:

$$W = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ell \left[ \ln \left( \frac{2\ell}{G_p} \right) - 1 \right] \quad (16)$$

onde:

$$\ln G_p = \frac{1}{S^2} \int_S dS(x, y) \int_S \ln(R) dS(u, \nu) \quad (17)$$

.

A grandeza  $G_p$  recebe o nome de distância geométrica média própria da seção  $S$ . A origem deste conceito vem do seguinte raciocínio: considere a seção  $S$  dividida em  $n$  elementos de área os quais são numerados em seqüência. Seja  $r_{ij}$  ( $i \neq j$ ) a distância entre o  $i$ -ésimo elemento de área  $i$  e o  $j$ -ésimo elemento de área. Por definição, chama-se distância geométrica média própria o limite da média geométrica de todas as distâncias possíveis entre dois elementos de área quaisquer da seção, quando o número de divisões tende ao infinito:

$$G_p = \lim_{n \rightarrow \infty} [r_{12} r_{13} \dots r_{ij} \dots r_{(n-1)n}]^{2/n(n-1)}. \quad (18)$$

Lembrando que a energia magnética pode também ser expressa por  $W = \frac{1}{2} L I^2$ , sendo  $L$  o coeficiente de auto-indutância do condutor isolado, e comparando com a Eq.(16) obtém-se com:

$$L = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \left[ \ln \left( \frac{2\ell}{G_p} \right) - 1 \right]. \quad (19)$$

A aplicação das equações (17) e (19) para um condutor cilíndrico de comprimento  $\ell$  e seção transversal circular de raio  $a$  fornece para o coeficiente de auto-indutância a expressão:

$$L = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \left[ \ln \left( \frac{2\ell}{a} \right) - \frac{3}{4} \right]. \quad (20)$$

A generalização para um sistema de  $N$  condutores cilíndricos de seção transversal qualquer  $S_k$  ( $k = 1, 2, 3$  à  $N$ ), satisfazendo as hipóteses feitas anteriormente, é obtida facilmente usando-se as equações (12) e (13). A energia magnética do sistema de condutores pode ser escrita, por analogia com o caso anterior, como:

$$W = \frac{\mu_0 \ell}{4\pi} \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N I_k I_j \left[ \ln \left( \frac{2\ell}{G_{kj}} \right) - 1 \right] - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N L_{kj} I_k I_j. \quad (21)$$

A distância geométrica média mútua entre duas seções  $S_k$  e  $S_j$  ( $k \neq j$ ) é definida pela expressão:

$$\ln G_{kj} = \frac{1}{S_k S_j} \int_{S_k} dS_k \int_{S_j} \ln R_{kj} dS_j \quad (22)$$

onde:  $R_{kj}$  é a distância entre os elementos  $dS_k$  e  $dS_j$  dos condutores  $k$  e  $j$  e  $\ell$  é o comprimento dos condutores.

Da Eq.(21) conclui-se imediatamente que  $L_{kj} = \frac{\partial^2 W}{\partial I_k \partial I_j}$ , sendo  $L_{kj} = L_{jk}$  são chamados de coeficientes de indução mútua entre os condutores  $k$  e  $j$ . Em particular  $L_{kk}$  é chamado coeficiente de auto-indutância do condutor  $k$ , nomenclatura esta devida a J.C. Maxwell [1].

Quando as seções têm forma geométrica complexa mas admitem uma divisão em partes mais simples, o cálculo das distâncias geométricas médias fica facilitado com o uso do teorema enunciado a seguir.

“Se  $G_A, G_B \dots$  forem as distâncias geométricas médias mútuas das seções A, B ... à seção  $s$  respectivamente, então a distância geométrica média de  $A \cup B \cup \dots$  à seção  $S$  será dada por[4]:

$$\ln G = \frac{A \ln G_A + B \ln G_B \dots}{A + B + \dots} \quad (23)$$

onde:  $A, B \dots$  são as áreas das seções transversais”.

Para referência citamos alguns artigos [9, ..., 12] onde são fornecidas fórmulas de distâncias geométricas médias para diversas formas de seções transversais.

### III.1 Aplicação: linha monofásica

Considere dois condutores cilíndricos de seção transversal circular percorridos por correntes  $I_1$  e  $I_2$ , cuja configuração geométrica é a da figura 1. Da equação (21) podemos escrever:

$$W = \frac{\mu_0 \ell}{4\pi} \{ [\ln(2\ell) - 1] \cdot [I_1^2 + I_2^2 + 2I_1 I_2] - I_1^2 \ln G_{11} - I_2^2 \ln G_{22} - 2I_1 I_2 \ln G_{12} \} \quad (24)$$

$$W = \frac{1}{2} (L_{11} I_1^2 + L_{22} I_2^2 + 2L_{12} I_1 I_2). \quad (25)$$

A comparação das equações (13) e (14) fornece os coeficientes  $L_{ij}$ . Um cálculo simples mostra que  $G_{11} = ae^{-1/4}$ ,  $G_{22} = be^{-1/4}$  e  $G_{12} = d$ .

No caso particular de linha monofásica as correntes são dadas por  $I_1 = I_0 \cos(\Omega t)$  e  $I_2 = I_0 \cos(\Omega t + \pi)$ . O valor médio no tempo da equação (13) fica:

$$\langle W \rangle = \frac{\mu_0 \ell I^2}{4\pi} \left[ \ln \left( \frac{G_{12}^2}{G_{11} G_{22}} \right) \right] = \frac{1}{2} (L_{11} + L_{22} - 2L_{12}) I^2 \quad (26)$$

sendo  $I^2 = \langle I_1^2 \rangle = \langle I_2^2 \rangle = - \langle I_1 I_2 \rangle$ , sendo  $I$  chamado valor eficaz da corrente.

O termo  $L_D = L_{11} + L_{22} - 2L_{12}$  é chamado de coeficiente de auto-indutância de linha [13] e no presente exemplo é dado por:

$$L_D = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \left[ \ln \left( \frac{d^2}{ab} \right) + \frac{1}{2} \right] \quad (27)$$

O mesmo raciocínio pode ser aplicado a linhas muito mais complexas que a aqui apresentada.

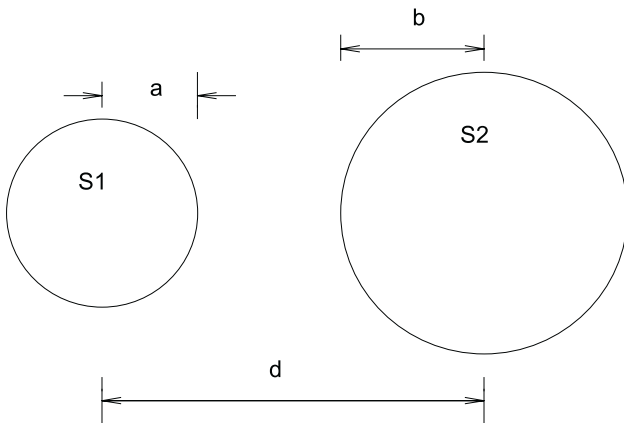


Figura 4. Seção transversal de uma linha monofásica.

## IV Conclusões

O método apresentado para o cálculo de campos magnéticos em sistemas de corrente com simetria de translação é simples e pode ser estendido analiticamente para outras seções transversais tais como anel circular, círculo, retângulos, etc. serve também como motivação para implementação numérica quando a seção transversal não tem forma geométrica definida, o que acontece normalmente em problemas práticos de eletromagnetismo. Também mostra-se um formalismo

do eletromagnetismo capaz de fornecer com pouco esforço os coeficientes de indutância para linhas ou barramentos, especialmente em problemas envolvendo mais de um condutor cujas seções transversais não tenham forma geométrica simples, o que é interessante do ponto de vista acadêmico. O conhecimento das distâncias geométricas médias permite obter os diversos coeficientes  $L_{ij}$  para qualquer configuração. Em geral a maior dificuldade está em se obter as expressões analíticas para  $G$ ,  $G_{ij}$  e  $G_{ji}$ . Esta tarefa nem sempre é possível executar e nestas circunstâncias as expressões devem ser resolvidas numericamente, o que fica facilitado com o formalismo aqui introduzido.

## References

- [1] HIGGINS T.J. "The Origins and Developments of the Concepts of Inductance, skin Effect and Proximity Effect", Am. J. of Physics, **9**, (6), 337-46, (1941).
- [2] BENNETT JR. W. R., *Health and Low-frequency Electromagnetic Fields*, Yale University Press, New Haven (1994).
- [3] POLK C., and POSTOW E., *Handbook of Biological Effect of Electromagnetic Fields*, CRC Press, Boca Raton, (1986).
- [4] MAXWELL J.C., *The scientific Papers of J.C. Maxwell*, Dover Publications Inc., N.Y. (1977), p.280.
- [5] MAXWELL J. C., *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Vol.II, Dover Publications Inc., N.Y., (1954), p.324.
- [6] SILVESTER P. *Campos Eletromagnéticos Modernos*, Editora Polígono, São Paulo, (1971), cap.5 e 6.
- [7] SOMMERFELD A., *Electrodynamics*, Academic Press, N.Y., (1964), part II.
- [8] HIGGINS T.J., "Formulas for the Geometric Mean Distances of Rectangular Areas and of Line segments", J. of Appl. Physics **14**, 188-195, April (1943).
- [9] OEDING D., FESER K., "Mittlere geometrisch Abstände von rechteckigen Leitern," ETZ-A, Bd. **86**, 525-533, (1965), H.16.
- [10] EDELMANN H., "J.C.Maxwell's Geometric Mean Distances", Siemens Forsch. Bd.**10**, Nr.3, 133-138, (1981).
- [11] ROSA E.B., "On Geometrical Mean Distances of Rectangular Areas and Calculation of self-indutance", National Bureau of Standard Bulletin, **3**, (1), 1-41, (1907).
- [12] ROSA E.B., "Formulas and Tables for the Calculations of Mutual and self-indutance", National Bureau of Standard Bulletin **8**, (1), 1-223, (1912).
- [13] MORTON A. H., *Advanced Electrical Engineering*, Pitman Paper-back, London, (1968), Cap.11.