Vínculos Ideais: Uma Nota de Esclarecimento

(Ideal constraints: A warning note)

Antonio S. de Castro
Departamento de Física e Química,
UNESP/Campus de Guaratinguetá
Caixa Postal 205
12500-00, Guaratinguetá, SP

Recebido em 15 de Junho, 2000. Aceito em 26 de Julho, 2000

Apresenta-se uma crítica ao ponto de vista adotado por alguns autores de livros-texto a respeito de vínculos ideais. A crítica apresentada é reforçada com dois exemplos tradicionais.

A criticism against the conception adopted by some textbook's authors concerning ideal constraints is presented. The criticism is strengthen with two traditional examples.

Vínculos são restrições que de alguma forma limitam o movimento de um sistema de partículas. As forças necessárias para restringir o movimento são chamadas de forças de vínculo. Os vínculos para os quais as forças de vínculo podem ser eliminadas do formalismo são chamados de vínculos ideais. O princípio do trabalho virtual e o princípio de d'Alambert são princípios de grande importância nas apresentações pedagógicas da mecânica analítica porque eles são prontamente derivados da leis de Newton, e também porque eles permitem que nos livremos das forças de vínculo, que são *a priori* desconhecidas. Além disto, estes princípios são pontos de partida para a obtenção das equações de Lagrange do movimento. Par obter o princípio do trabalho virtual e o princípio de d'Alambert os autores de livros-texto geralmente consideram o trabalho virtual realizado por um sistema de N partículas:

$$\delta W = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(e)} \cdot \delta\vec{r}_i + \sum_{i=1}^{N} \vec{f}_i \cdot \delta\vec{r}_i$$

onde a força sobre cada partícula é escrita como a força externa $\vec{F}_i^{(e)}$ mais a força de vínculo $\vec{f}_i$. O princípio do trabalho virtual é aplicável somente em problemas estáticos enquanto que o princípio de d'Alambert é aplicável em situações dinâmicas. A diferença entre estes dois princípios não é destacada nesta nota tampouco é relevante para a discussão que se segue, eis que a atenção é focalizada no desembaraço das indesejáveis forças de vínculo.

Hauser [1] argumenta que "*If the $\delta\vec{r}_i$'s are chosen so that any constraints which exist between the coordinates of the particles are satisfied, the constraint forces $\vec{f}_i$ acting on the particles will be perpendicular to the displacements $\delta\vec{r}_i$.*" De modo similar, Lanczos [2] alega que "*The vanishing of this scalar product means that the force $\vec{f}_i$ is perpendicular to any possible virtual displacement.*" Taylor [3] também alega que "*One thing known about otherwise unknown forces of constraint and that is that they always act at right angles to any conceivable displacement consistent with the constraint under the condition of "stopped time", i.e., to any virtual displacement.*" Seguindo a mesma linha de raciocínio Chow [4] conclui que "*Most of the constraints that commonly occur, such as sliding motion on a frictionless surface and rolling contact without slipping, do no work under a virtual displacement, that is*

$$\vec{f}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \quad (4.8)$$

This is practically the only possible situation we can imagine where the forces of constraint must be perpendicular to $\delta\vec{r}_i$; otherwise, the system could be spontaneously accelerated by the forces of constraint alone, and we know that this does not occur...".

Realmente, as asserções citadas acima são fidedignas para um sistema consistindo de uma única partícula. Ainda assim, não existe uma razão forte para acreditar que sejam verdadeiras para um sistema constituído com mais de uma partícula, e de fato elas não são. Vamos ilustrar este ponto com dois problemas muito instrutivos e tradicionais: o corpo rígido e a máquina de Atwood.

Um corpo rígido é um sistema de partículas conectadas de tal maneira que a distância entre qualquer par de partículas é invariável. A terceira lei de Newton implica que para qualquer par de partículas as forças de vínculo são iguais e opostas e além disto elas são paralelas ao vetor posição relativa, quaisquer que sejam os deslocamentos virtuais. Estes fatos asseguram que o trabalho total das forças de vínculo é nulo.

Na máquina de Atwood duas partículas, sujeitas ao campo gravitacional uniforme, são conectadas por uma corda inextensível passando por uma polia. Se a corda e a polia são de massas desprezíveis e o movimento é sem atrito então as forças de vínculo reduzem-se à tensão na corda. Os deslocamentos virtuais das partículas, compatíveis com os vínculos, ocorrerão na direção vertical e o mesmo acontecerá com as forças de vínculo. Os trabalhos virtuais das forças de vínculo sobre cada partícula são os mesmos, a menos de um sinal, assegurando que o trabalho virtual líquido seja nulo.

Vale a pena observar que as conclusões obtidas através dos exemplos anteriores não dependem do estado de movimento das partículas do sistema, *i.e.*, se o problema é estático ou dinâmico, desse modo tais conclusões são aplicáveis tanto ao princípio do trabalho virtual quanto ao princípio de d'Alambert.

Através dos exemplos prévios pode-se tirar a lição que para eliminar as forças de vínculo somente é necessário que o trabalho virtual total seja nulo:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{f_i} \cdot \delta\vec{r_i} = 0$$

Esta condição menos restritiva permite forças de vínculo não perpendiculares aos deslocamentos virtuais, em sistemas constituídos com mais de uma partícula, sem implicar em movimento espontaneamente acelerado.

Em suma, absolutamente não há necessidade de recorrrer a desacertadas restrições sobre as forças de vínculo como essas apresentadas por Hauser, Lanczos, Taylor and Chow, para eliminá-las das formulações analíticas da mecânica clássica. Vínculos ideais são aqueles para os quais o trabalho virtual realizado sobre todo o sistema é nulo quaisquer que sejam as orientações relativas entre as forças de vínculo e os deslocamentos virtuais. Esta cláusula é mais que suficiente para garantir que o sistema não seja espontaneamente acelerado.

Referências

[1] W. Hauser, *Introduction to the Principles of Mechanics.* Addison-Wesley, Reading, pág. 313 (1965).

[2] C. Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics.* Toronto, Toronto, 4th ed, pág. 76 (1970).

[3] T.T. Taylor, *Mechanics: Classical and Quantum.* Pergamon, Oxford, pág. 31 (1976).

[4] T.L. Chow, *Classical Mechanics.* Wiley, New York, pág. 104 (1995).