

Medindo o Campo Magnético Terrestre com um Osciloscópio

C. H. Furukawa & J. C. Sartorelli*

*Instituto de Física - Universidade de São Paulo
Caixa Postal 66318, 05315-970 São Paulo, Brazil*

Recebido em 12 de Abril, 1999

Construímos um sistema, com um osciloscópio montado para fins didáticos, para estudar o movimento de elétrons em um campo magnético fraco, como o campo magnético terrestre. A partir das deflexões das trajetórias dos elétrons observadas na tela do osciloscópio obtivemos a intensidade do campo magnético terrestre, $B = 26,2 \pm 0,4 \mu T$, e a inclinação magnética $I = 30 \pm 1^\circ$. Estes resultados estão em boa concordância com os obtidos com um magnetômetro de precessão de prótons. Como utilizamos três referenciais para a obtenção das trajetórias dos elétrons, também apresentamos uma boa ilustração do uso de matrizes de rotação em transformações de coordenadas.

We have constructed a system, assembled with a homemade oscilloscope, to study the motion of electrons in a weak magnetic field such as the Earth's magnetic field. By observing the deflections of the electron trajectories on the oscilloscope screen, we have obtained the geomagnetic field magnitude, $B = 26,2 \pm 0,4 \mu T$, and the magnetic inclination, $I = 30 \pm 1^\circ$. These results are in good agreement with those obtained with a proton-precession magnetometer. Because we have used three referential systems to obtain the electron trajectories, an useful exercise for using the rotation matrix for transformation of coordinates is presented also.

I Introdução

O campo magnético terrestre, ou campo geomagnético, tem sido utilizado pelos seres vivos para a navegação. O homem para fazer uso dele precisou inventar a bússola. Este instrumento simples, pouco preciso e pouco acurado foi inventado em fins da Idade Média [1], e tem sido utilizado até os dias de hoje, apesar da invenção do GPS (Global Position System). Com a necessidade de se ter uma navegação mais segura, as características do campo geomagnético na superfície terrestre começaram a ser mapeadas, e em 1902 foram publicadas as primeiras tabelas de dados [1]. Existem atualmente mais de duzentos laboratórios [2] em todos os continentes para a coleta de dados para a atualização das tabelas a cada cinco anos. No Brasil existem dois laboratórios geomagnéticos do Observatório Nacional-CNPq, um em Tatuacoca, Amazonas e outro em Vasouras, Rio de Janeiro [3] que contribuem para a atualização do *International Geomagnetic Reference Field (IGRF)*. Na referência [2] temos o endereço de um “portal” da *NOAA-National Oceanic Atmospheric Administration* com uma variedade muito grande de in-

formações como figuras, tabelas de dados e programas gratuitos sobre o campo geomagnético.

No reino animal, seres que apresentam características migratórias também usam o campo magnético como guia auxiliar para navegação segura. Nestes animais, pássaros [4], peixes [5], tartarugas, insetos [6], etc., o mecanismo de detecção do campo geomagnético ainda não é bem conhecido. Estudos anatomo-fisiológicos indicam que a magnetita pode ser um dos magnetoreceptores.

O campo geomagnético também tem sido usado para outros fins, como a determinação da direção de correntes marítimas, e outros menos nobres, como o uso da componente vertical do campo em sistemas de gatilhos de minas explosivas.

Neste trabalho, utilizando o estudo de movimento de partículas carregadas em um campo magnético fraco [7, 8, 9], discutimos algumas características do campo geomagnético.

Existem muitas fontes do campo magnético estático terrestre (ou campo geomagnético), como o dínamo geomagnético. Existem também muitas fontes de perturbações dependentes do tempo, como a variação se-

*email: sartorelli@if.usp.br

cular e o vento solar. O campo geomagnético pode ser aproximadamente representado pelo campo magnético de um ímã na forma de barra (momento magnético $\sim 8 \times 10^{15} \text{T} \times \text{m}^3$) cujo eixo forma um ângulo de $\sim 11^\circ$ com o eixo geográfico, como mostrado na figura 1 [10]. A diferença entre o valor do campo magnético real e o valor do campo dado pelo dipolo geomagnético é chamada de anomalia geomagnética.

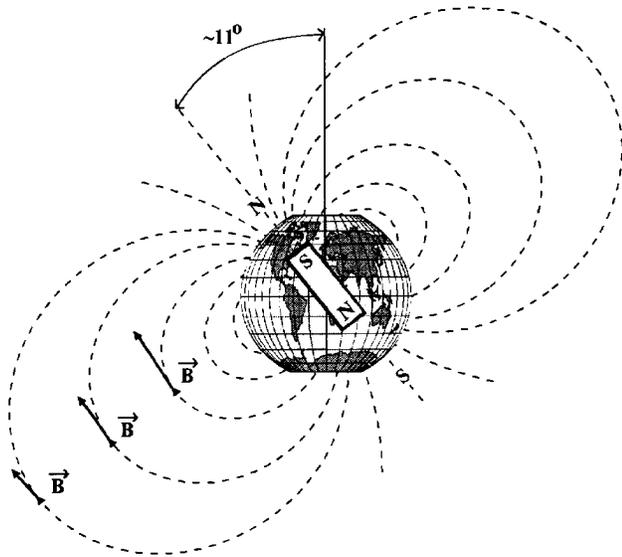


Figura 1. Campo magnético terrestre gerado por uma barra magnética hipotética.

O campo geomagnético \vec{B} na superfície terrestre pode ser considerado localmente uniforme, caracterizado por sua intensidade B , por sua inclinação I (o ângulo formado pelo vetor do campo geomagnético e o plano horizontal) e por sua declinação D (o ângulo formado pelos meridianos magnético e geográfico).

II Aparato experimental

O aparato experimental consiste de um osciloscópio montado para fins didáticos. Foi utilizado um tubo de raios catódicos (TRC) Toshiba 150BTB31 com uma fonte de alimentação cujas características são descritas na referência [7]. O osciloscópio foi montado em um sistema que permite rotações em torno de um eixo horizontal (\mathbf{H}_a) e também em torno de um eixo vertical (\mathbf{V}_a), como mostrado na figura 2.

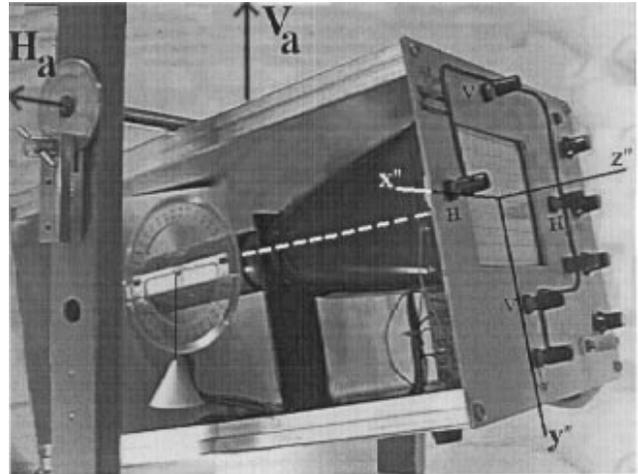


Figura 2. Fotografia do osciloscópio mostrando o seu referencial ($x''y''z''$). H_a e V_a são os eixos de rotação horizontal e vertical, respectivamente. O transferidor e a linha de prumo são usados para medir o ângulo α e a inclinação magnética I .

Aterrando todas as placas de deflexão, qualquer desvio da trajetória linear dos elétrons é devido somente à força magnética dada pelo campo geomagnético. A força gravitacional é de baixa intensidade e pode ser desprezada.

A maneira mais simples de analisar as trajetórias dos elétrons é definindo três referenciais: a) o referencial do laboratório, com o eixo z vertical e o eixo y dado pela direção da agulha de uma bússola. Portanto, o plano yz define o meridiano magnético local; b) o referencial geomagnético, com o seu eixo z' ao longo de \vec{B} , com o eixo x' coincidente com o eixo x , portanto o plano $y'z'$ também é paralelo ao meridiano magnético, ver figura 3; c) referencial do osciloscópio, com o eixo z'' paralelo ao tubo do osciloscópio (ver figura 2) e o plano $x''y''$ paralelo à tela do osciloscópio, ($x'' \equiv x' \equiv x$). Neste último referencial medimos as deflexões do feixe de elétrons no plano $x''y''$, causadas pelo campo geomagnético.

Para a tomada de dados devemos ajustar os três referenciais. Primeiramente, com o auxílio de uma bússola alinhamos o plano $y''z''$ paralelamente ao meridiano magnético local. Nesta situação devemos ter $x = x' = x''$ (vide figura 2).

Para achar a direção do campo magnético, o osciloscópio deve ser rodado em torno do eixo horizontal (\mathbf{H}_a) até observarmos uma deflexão nula do feixe magnético. Nesta posição o campo magnético é paralelo ao feixe de elétrons e medimos então a inclinação magnética $I = \gamma$ ($\alpha = 0$) com um transferidor de plástico e uma linha de prumo, conforme é mostrado nas figuras 2 e 3. Em seguida, invertemos o sentido do feixe de elétrons girando o osciloscópio de 180° em torno do eixo horizontal \mathbf{H}_a , e conferimos a deflexão nula. Pe-

quenos ajustes podem ser feitos girando o osciloscópio em torno dos eixos \mathbf{H}_a e \mathbf{V}_a . Dessa maneira obtivemos $I = (30 \pm 1^\circ)$, valor muito próximo de $I_c = 31^\circ 15' 50''$ calculado com os dados obtidos da International Geomagnetic Reference [11].

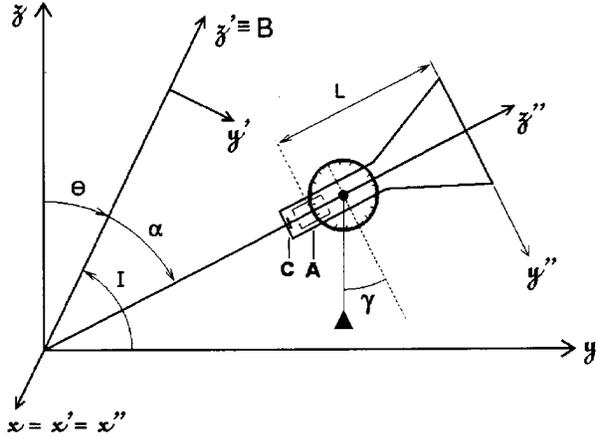


Figura 3. Diagrama mostrando os tres referenciais. O referencial geomagnético e o referencial do osciloscópio podem ser obtidos por rotações de ângulos θ e $\theta + \alpha$ ao redor do eixo x do referencial do laboratório.

III As trajetórias dos elétrons

Como podemos estabelecer um eixo comum $x = x' = x''$, o referencial geomagnético é obtido com a rotação de θ (vide figura 3) do referencial do laboratório em torno deste eixo comum, e com uma rotação adicional de α obtemos o referencial do osciloscópio.

Para um valor qualquer do ângulo α , é mais fácil determinar a trajetória dos elétrons no referencial geomagnético do que no referencial do osciloscópio. Os elétrons deixam o catodo (vide figura 3) com uma velocidade praticamente nula e depois são acelerados na direção do eixo z'' pelo anodo acelerador que está em um potencial V . Portanto, podemos considerar que os elétrons são acelerados em linha reta, ao longo do eixo z'' , até atingirem uma velocidade v_o , dada por

$$\frac{1}{2} m_e v_o^2 = eV, \quad (1)$$

onde e e m_e são a carga e a massa do elétron, respectivamente. Após os elétrons deixarem a região de aceleração, com a velocidade v_o , eles ficam submetidos somente à força magnética.

No referencial do osciloscópio a velocidade paralela ao eixo z'' é dada por

$$\vec{v}_o'' = (0, 0, v_o), \quad (2)$$

onde $v_o = \sqrt{2eV/m_e}$. No referencial geomagnético a velocidade inicial \vec{v}_o' é obtida através de uma rotação inversa \vec{v}_o'' :

$$\vec{v}_o' = \mathbf{A}^{-1}(\alpha) \vec{v}_o'' = (0, v_o \sin(\alpha), v_o \cos(\alpha)), \quad (3)$$

onde $\mathbf{A}(\alpha)$ é a matriz de rotação em torno do eixo comum x .

$$\mathbf{A}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad (4)$$

Portanto, no referencial geomagnético, os elétrons são lançados paralelamente ao plano $y'z'$. Como a força magnética \vec{F} é sempre perpendicular à velocidade dos elétrons, estes percorrem uma trajetória espiral, como mostrada na figura 4, até colidirem com a tela do osciloscópio no ponto C , onde $z'' = L = 0,255 \pm 0,002\text{m}$ (distância entre a região do anodo e a tela do osciloscópio).

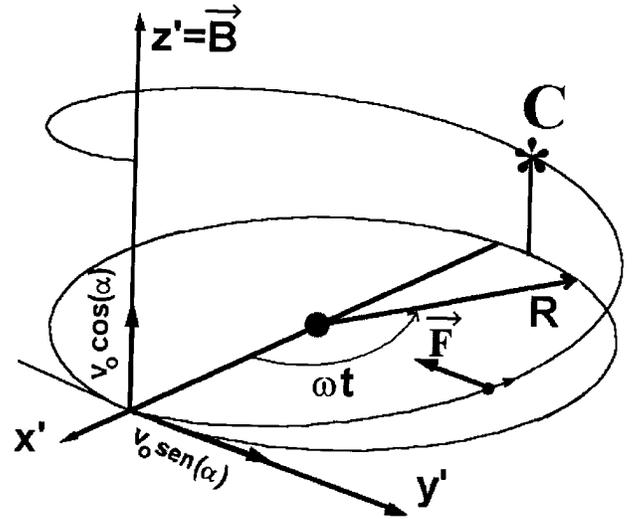


Figura 4. Trajetória espiral dos elétrons no referencial geomagnético. Os elétrons atingem o ponto C após um tempo de voo t_c .

A projeção desta trajetória no plano $x'y'$ é um arco de circunferência de raio R , o raio de Larmor, relacionada com a força centrípeta através de

$$m_e v_o^2 \sin^2(\alpha)/R = F = e v_o \sin(\alpha) B, \quad (5)$$

e portanto, o raio de Larmor é dado por

$$R = v_o \sin(\alpha)/\omega, \quad (6)$$

onde $\omega = eB/m_e$.

As equações de movimento dos elétrons no referencial geomagnético, antes destes se chocarem com a tela, são dadas por

$$\begin{aligned} x' &= R(\cos(\omega t) - 1) = \frac{v_o}{\omega} \sin(\alpha)(\cos(\omega t) - 1), \\ y' &= R \sin(\omega t) = \frac{v_o}{\omega} \sin(\alpha) \sin(\omega t), \\ z' &= tv_o \cos(\alpha). \end{aligned} \quad (7)$$

Portanto, a trajetória dos elétrons no referencial do osciloscópio é obtida pela rotação destas coordenadas $\vec{r}'' = \mathbf{A}(\alpha) \vec{r}'$:

$$\begin{aligned} x'' &= x' = \frac{v_o}{\omega} \sin(\alpha)(\cos(\omega t) - 1), \\ y'' &= v_o \sin(\alpha) \cos(\alpha) \left(\frac{\sin(\omega t)}{\omega} - t \right), \\ z'' &= v_o (\sin^2(\alpha) \frac{\sin(\omega t)}{\omega} + t \cos^2(\alpha)). \end{aligned} \quad (8)$$

Como estamos interessados nas deflexões observadas na tela do osciloscópio, temos $z'' = L$, e expandimos a equação (8) até segunda ordem em $\omega t_c (\ll 1)$, onde t_c é o tempo dispendido pelos elétrons para percorrerem a distância L . Dessa maneira obtemos as deflexões dos elétrons no plano $x''y''$ em função do ângulo α como

$$\begin{aligned} x'' &\simeq -v_o \text{sen}(\alpha) \omega t_c^2 / 2, \\ y'' &\simeq 0, \\ z'' &\simeq v_o t_c \simeq L, \end{aligned} \quad (9)$$

e após a substituição de v_o , ω , t_c obtemos

$$x'' = -L^2 \sqrt{e/(8m_e V)} B \text{sen}(\alpha). \quad (10)$$

Portanto, a deflexão do feixe de elétrons ao longo do eixo x'' na tela do osciloscópio é dada por uma função senoidal, cuja amplitude é proporcional a $BV^{-\frac{1}{2}}$. A equação (10) pode ser reescrita em uma forma linear e parametrizada

$$\xi = -L^2 \sqrt{e/(8m_e)} B \eta \quad (11)$$

onde $\xi = x'' \sqrt{V}$ e $\eta = \text{sen}(\alpha)$, cujo coeficiente angular é proporcional a intensidade do campo magnético terrestre.

IV Resultados

As medições efetuadas dentro de prédios mostram grandes discrepâncias e instabilidades devido às distorções do campo magnético local causadas pela presença de materiais magnéticos, como o aço utilizado nas estruturas dos prédios, móveis de aço, e também devido aos cabos elétricos de redes de transmissão. Por estas razões efetuamos as medições ao ar livre, distante

20m do prédio mais próximo, e 100m distante da linha de transmissão mais próxima.

Foram coletados dados com diversos valores do ângulo α para cinco diferentes valores da voltagem do anodo $V = 300, 400, 500, 600$ e 700 V. Foram medidas as deflexões x'' e y'' com uma precisão de $0,0005$ m. Como previsto pela equação 9, foi sempre observado $y'' \approx 0$. Na figura 5 estão plotados os valores de x'' em função de α para os cinco valores da tensão do anodo. As linhas contínuas correspondem aos ajustes da equação (10) aos dados experimentais. Também são mostrados os dados na forma linearizada V versus $\eta = \text{sen}(\alpha)$. Desta maneira todos os dados são descritos por uma única reta, cujo coeficiente angular é proporcional a B . Do ajuste da equação (11) a todos dados experimentais foi obtido $B = 26,2 \pm 0,4 \mu\text{T}$, em boa concordância com os resultados obtidos com o magnetômetro de precessão de prótons $B = 26,568 \pm 0,012 \mu\text{T}$.

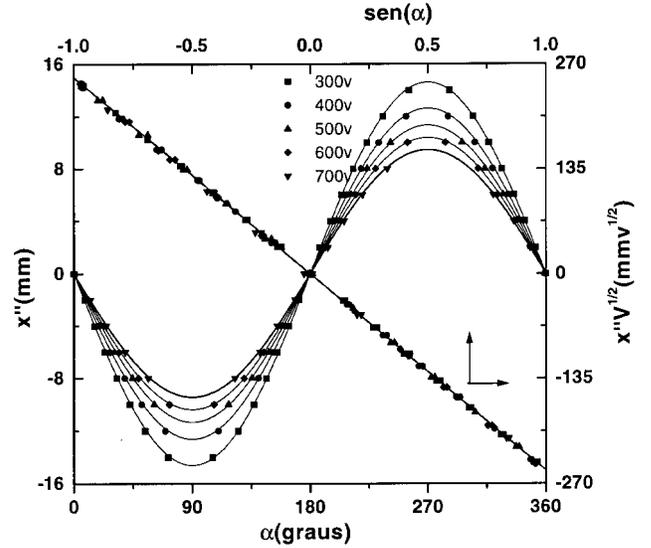


Figura 5. x'' versus α para cinco valores de tensão do anodo (escalas esquerda e inferior). As linhas contínuas são os ajustes da equação (10) aos dados experimentais; e $x'' \sqrt{V}$ versus $\eta = \text{sen}(\alpha)$ (escalas direita e superior). A linha reta e contínua é o ajuste da equação (11) a todos os dados experimentais.

Para ilustrar a dependência da intensidade do campo geomagnético e da inclinação magnética com a posição geográfica, apresentamos na tabela I os resultados obtidos por Pernick em *Nova York-EUA*[12] e os obtidos por Callaghan & Le Gros em *Palmerston North-Nova Zelândia*[13], juntamente com os nossos resultados.

Tabela I: Intensidade e inclinação magnética em diferentes locais. D é a declinação magnética local.

Localidade	I	$B(\mu\text{T})$	referência
São Paulo-Brasil	$30 \pm 1^\circ$	$26,2 \pm 0,4$	Osciloscópio.
($D \approx 18^\circ 40'$)	$31^\circ 15' 50''$	$26,568 \pm 0,012$	Magnetômetro
Nova York-EUA		18	[12]
Palmerston North-NZ	$64 \pm 3^\circ$	$56,9 \pm 0,1$	[13]

V Conclusões

Este experimento é um bom exercício para mostrar aos alunos: a) as características do campo geomagnético; b) que apesar do campo magnético terrestre ser um campo fraco pode afetar o movimento de elétrons, e portanto os osciloscópios comerciais devem minimizar estes efeitos e c) o uso de matrizes de rotação para mudanças de referencial.

Agradecemos à Profa. Naomi Ussami do Instituto Astronômico e Geofísico-Universidade de São Paulo, pelas medidas com o magnetômetro de precessão de prótons e pelos cálculos da inclinação magnética.

References

- [1] A. K. Ludy and H. H. Howe, *Magnetism of the Earth*, USA-Government Printing Office, Washington (1945).
- [2] Homepage da NOAA: <http://www.ngdc.noaa.gov/seg/potfld/faqgeom.shtml>.
- [3] CNPq-Observatório Nacional, Depto. de Geofísica: <file://dgel.on.br/pub/areapage/geomag/obsmag.html>.
- [4] R. Wiltshcko and W. Wiltshcko, J. Fur Ornithologie (abstract), **140**, 1 (1999).
- [5] M. M. Walker, C. E. Diebel, C. V. Haugh, P. M. Pankhurst, J. C. Montgomery and R. R. Green, Nature **390**, 371 (1997).
- [6] E. Wajnberg, D. M. S. Esquivel, D. A. Avalos, L. J. El-Jaick, M. P. Linhares, XXI Encontro Nacional de Física da Matéria Condensada, p. 32 e 34 (1998); e XIX Encontro Nacional de Física da Matéria Condensada, p. 283 e 284 (1996).
- [7] J. G. Shepherd, The Phys. Teach. **5**, 120 (1967).
- [8] E. R. Huggins and J. J. Lelek, Am. J. Phys. **47**, 992 (1979).
- [9] J. E. Fredrickson, Am. J. Phys **43**, 186 (1975).
- [10] F. D. Stacey, *Physics of the Earth*, John Wiley & Sons, New York (1969).
- [11] R. A. Langel, Phys. Earth Planet. Inter. **70**, 1 (1992).
- [12] B. J. Pernick, Am. J. Phys. **57**, 90 (1989).
- [13] P. T. Callaghan and M. Le Gros, Am. J. Phys. **50**, 709 (1982).