

Efeito Pelicular

(On the Skin Effect)

Renê Robert

*Departamento de Eletricidade, Universidade Federal do Paraná
Caixa Postal 19047, Curitiba Pr, 81531-990*

Recebido em 2 de setembro, 1999

Usando as equações de Maxwell, apresenta-se o efeito pelicular para condutores com uma geometria simples, onde as equações são facilmente resolúveis. Apresentam-se as principais características deste efeito para o regime senoidal permanente e para o regime transiente.

Using the Maxwell's equations, the skin effect is shown for a simple geometry where the mathematical solutions are easy. The main characteristics of this effect, are shown in the sinusoidal and transient state.

I Introdução

Quando uma corrente elétrica constante flui em um fio condutor homogêneo, de seção transversal não negligenciável, ela se distribui uniformemente nesta seção. O mesmo não se pode dizer quando a corrente é alternada, esta não se distribui uniformemente e a distribuição depende da frequência, do campo elétrico, da condutividade elétrica, das dimensões e da forma geométrica do condutor. No caso de um condutor de seção transversal circular a densidade de corrente varia ao longo do raio, sendo máxima na superfície e mínima sobre o eixo. A concentração de corrente próxima à superfície do condutor chama-se efeito pelicular ou efeito Kelvin em homenagem a Lord Kelvin, por sua contribuição ao estudo deste efeito em condutores cilíndricos (1889)[1]. O efeito pelicular apresenta interesse técnico e também acadêmico, principalmente pelas suas sutilezas. Neste trabalho nosso interesse se restringe ao campo acadêmico pois é rara nos livros-textos[2,3] a exposição deste tópico. Existem apenas dois casos cuja solução analítica é simples: condutores com seção circular e condutores em forma de fita, ambos de comprimento infinito. Nos demais casos a única solução possível é obtida através de cálculo numérico. Em corrente alternada o efeito pelicular impõe algumas desvantagens: A resistência elétrica efetiva do condutor aumenta em relação à resistência medida em corrente constante. Consequentemente haverá maior perda sob forma de calor, por unidade de comprimento de condutor, que se o mesmo fosse percorrido por uma corrente elétrica constante. A reatância indutiva interna do con-

ductor é igualmente modificada. Em geral na prática contorna-se este problema usando-se condutores ocos e cabos entrelaçados. Em outros casos o efeito pelicular é útil, como ocorre em frequências de microonda, tornando possível o transporte e armazenagem de energia eletromagnética em guias de onda e cavidades ressonantes sem perda por radiação. O efeito pelicular depende do campo elétrico \vec{E} , da sua frequência angular ω e da condutividade σ do condutor[4]. É comum medir o efeito pelicular por uma grandeza métrica δ chamada de espessura pelicular (skin depth) a qual diminui com o aumento da frequência e da condutividade. Em teorias simples a condutividade σ do condutor é proporcional ao livre caminho médio ℓ dos elétrons de condução. Quando $\delta < \ell$, a densidade de corrente em um dado ponto não será determinada simplesmente pela intensidade de campo local e pela condutividade estática. Nestas condições a teoria clássica do efeito pelicular não mais se aplica, e esta situação é chamada de efeito pelicular anômalo. Com o aumento de frequência outros efeitos tornam-se significativos, por exemplo, o efeito de relaxação. Os elétrons são submetidos a muitos ciclos do campo elétrico alternado entre duas colisões durante o intervalo de tempo médio que permanece na "skin layer". A grosso modo, o campo vê uma camada de elétrons livres. Aumentando-se ainda mais a frequência atinge-se a frequência de plasma do condutor na qual o metal é transparente.

Neste trabalho discutiremos somente o efeito pelicular clássico, usando-se as equações de Maxwell. O problema será analiticamente tratável, desde que façamos alguma simplificações. Estas simplificações são con-

seguidas com as seguintes hipóteses: (a)- Os meios são supostos metálicos, não magnéticos, cuja permeabilidade relativa e a permissividade relativa são da ordem da unidade; (b)- Sobre um grande intervalo de freqüências o termo da densidade de corrente de deslocamento $\partial \vec{D}/\partial t$ é pequeno quando comparado com a densidade de corrente \vec{J} , podendo ser ignorado; (c)- A lei de Ohm, $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ é válida; (d)- as freqüências são suficientemente baixas de modo a escaparmos da região de efeito pelicular anômalo; (e)- a densidade de carga no condutor é nula, isto é, $\rho = 0$.

É possível dar uma explicação qualitativa de como ocorre o efeito pelicular. Considere a Fig. 1 onde mostra-se um condutor percorrido por uma corrente I tal que $\frac{dI}{dt} > 0$. Esta corrente gera um campo de indução \vec{B} , cujas linhas de campo são circunferências e ao qual está associado um campo elétrico \vec{E} , que obedece à relação $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. O campo elétrico assim gerado tende a reforçar a corrente próximo a superfície e enfraquecê-la no centro.

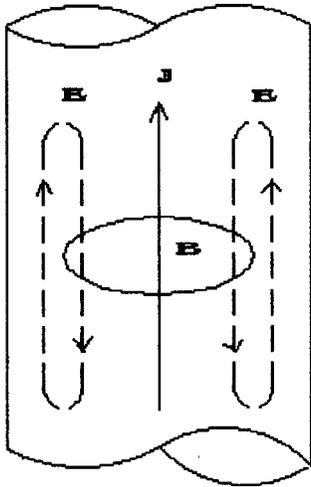


Figura 1. \mathbf{J} indica a corrente no condutor, \mathbf{B} o campo magnético e \mathbf{E} o campo elétrico.

A dedução da equação que explica o efeito pelicular pode ser obtida facilmente a partir das equações de Maxwell[5,6] sob forma diferencial:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (4)$$

e das relações constitutivas

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad (5)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (6)$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}, \quad (7)$$

Usando as equações (1) a (7) e as hipóteses (a) a (e) chega-se facilmente às seguintes relações:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (8)$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{H} = \mu \sigma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (9)$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{J} = \mu \sigma \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}, \quad (10)$$

com as quais é possível resolver o problema do efeito pelicular. As equações (8), (9) e (10) são equações diferenciais a derivadas parciais de segunda ordem do tipo parabólico[7] (equação de difusão) cujas técnicas de solução são conhecidas. Nosso interesse será focalizado sobre o efeito pelicular em uma fita metálica de largura $2a$, altura b e comprimento L , com a condição de que $L \gg b \gg 2a$. Deste modo despreza-se os efeitos de extremidade e admite-se que a densidade de corrente seja uniforme ao longo de oy porém variando com a abscissa x , como mostra a Fig. 2. Este modelo será aplicado tanto em regime senoidal permanente como transiente.

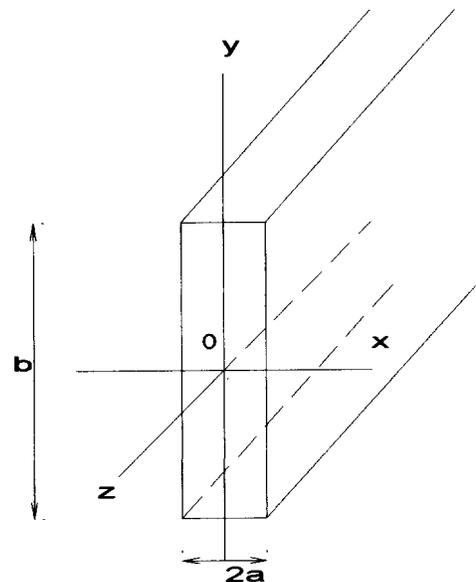


Figura 2. Geometria da fita metálica.

II Efeito pelicular em regime senoidal permanente

A aplicação da Eq.(10) à fita metálica, levando em conta as hipóteses feitas anteriormente, leva esta equação à seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 J_z(z, t)}{\partial x^2} = \mu\sigma \frac{\partial J_z(x, t)}{\partial t} \quad (11)$$

$$J_z(x) = J_z(a) \left[\frac{\cosh(2mx) + \cos(2mx)}{\cosh(2ma) + \cos(2ma)} \right]^{1/2} \{ \Theta(x) - \Theta(a) \}, \quad (13)$$

onde: $m = (\frac{\mu\sigma\omega}{2})^{1/2} = 1/\delta$, $\tan\Theta(x) = \tanh(mx) \cdot \tan(mx)$, e $\{ \Theta(x) - \Theta(a) \}$ a diferença de fase na densidade de corrente entre o ponto de abcissa x e o ponto de abcissa a em notação fasorial[8]. Nas Figs. 3 e 4 mostram-se, respectivamente, a variação do módulo da densidade de corrente e da diferença de fase desta em relação à densidade na superfície ambas para diversos valores do parâmetro m . Para efeito de cálculo numérico neste trabalho, a largura foi tomada como $a = 0.02 \text{ m}$, a condutividade como $\sigma = 5,71 \cdot 10^7 \text{ S/m}$ (cobre) e a permeabilidade como $\mu = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$.

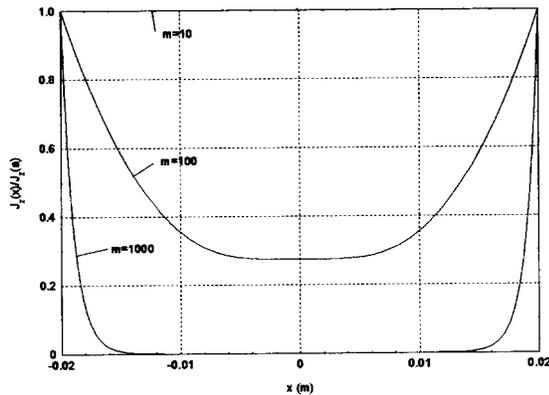


Figura 3. Módulo da densidade de corrente na seção transversal da fita.

O cálculo da corrente total I permite determinar a resistência equivalente R_e e o coeficiente de auto-indutância L_e . Obtém-se então que

$$I = 2bJ_z(a) \frac{\tanh[m(1+i)a]}{m(1+i)}, \quad (14)$$

$$Z_e = R_0 m(1+i)a / \tanh[m(1+i)a], \quad (15)$$

Levando em conta que nos interessa a solução estacionária na forma $j_z(x, t) = j_z(x) \exp(i\omega t)$, onde ω é a frequência angular do campo elétrico senoidal aplicado. Logo, a Eq. (11) se reduz ao seguinte:

$$\frac{\partial^2 J_z(x)}{\partial x^2} = i\omega\mu\sigma J_z(x). \quad (12)$$

A solução da equação diferencial (12) pode ser escrita como

sendo i a unidade imaginária, Z_e a impedância equivalente e R_0 a resistência do condutor para corrente elétrica constante.

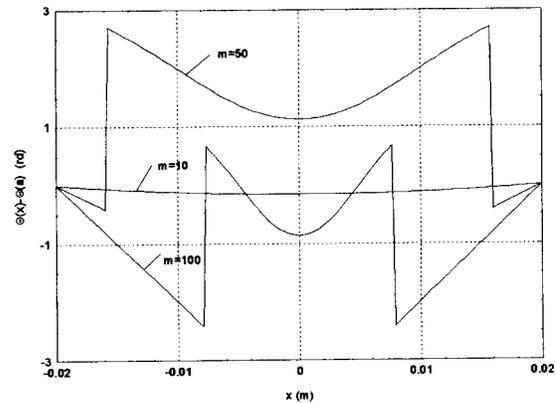


Figura 4. Diferença de fase entre a densidade de corrente na abcissa x e na abcissa a .

Da Eq.(15) obtém-se os valores da resistência equivalente e do coeficiente de auto-indutância:

$$\frac{R_e}{R_0} = ma \frac{\sinh(2ma) + \sin(2ma)}{\cosh(2ma) - \cos(2ma)}, \quad (16)$$

$$\frac{\omega L_e}{R_0} = ma \frac{\sinh(2ma) - \sin(2ma)}{\cosh(2ma) - \cos(2ma)}. \quad (17)$$

As Figs. 5 e 6 mostram as variações de R_e/R_0 e $\omega L_e/R_0$ em função do parâmetro m . Outros tópicos podem ser explorados, tais como o cálculo dos campos elétrico e magnético, vetor de Poynting, calor Joule etc.

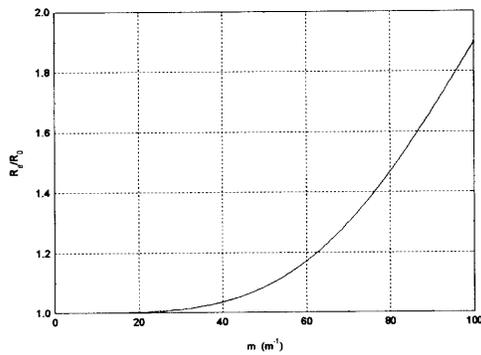


Figura 5. Resistência efetiva em função do parâmetro m .

III Efeito pelicular em regime transiente

O problema consiste em resolver a Eq.(11) para o regime transiente. Usa-se a técnica de separação de variáveis com constante de separação complexa e com as seguintes condições de contorno:

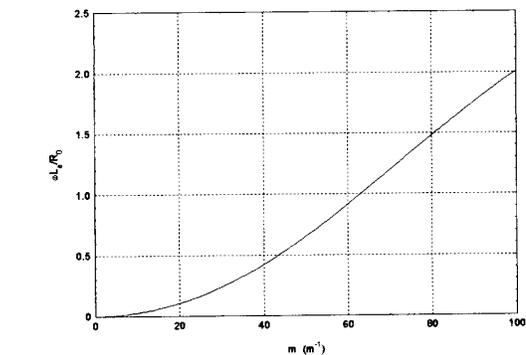


Figura 6. Variação da reatância indutiva efetiva em função do parâmetro m .

- (1) - $J_z(a, 0) = 0$,
- (2) - $J_z(x, t) = J_z(-x, t)$,
- (3) - $J_z(x, \infty) = J_c$.

Nestas condições obtêm-se a solução

$$J_z(x, t) = J_c - \frac{4J_c}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos \left[(2n+1) \frac{\pi x}{2a} \right] \cdot \exp(-\delta_n t), \quad (18)$$

sendo

$$\delta_n = \frac{1}{\mu\sigma} \left[(2n+1) \frac{\pi}{2a} \right]^2,$$

onde n é um número inteiro.

A corrente total pode ser calculada com auxílio da equação $i(t) = b \int_{-a}^a J_z(x, t) dx$ obtendo-se

$$i(t) = I_c \left[1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(-\delta_n t)}{(2n+1)^2} \right], \quad (19)$$

sendo $I_c = 2abJ_c$. A partir da Eq.(18) calcula-se a resistência efetiva que será fornecida pela equação:

$$R_e = \frac{R_0}{1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(-\delta_n t)}{(2n+1)^2}} \quad (20)$$

Nas Figs. 7, 8 e 9 mostra-se respectivamente a variação temporal da densidade de corrente, da corrente e da resistência efetiva.

IV Discussão e conclusões

Algumas conclusões interessantes podem ser tiradas da teoria exposta. Em regime senoidal permanente conclui-se que: (1) - a densidade de corrente acumula-se próximo à superfície do condutor à medida que o parâmetro m aumenta, ou seja, com o aumento da

frequência, da condutividade ou da permeabilidade; (2) - A diferença de fase entre a densidade de corrente na abscissa x com relação a densidade na superfície varia com o parâmetro m , podendo mesmo ocorrer que a densidade de corrente instantânea mude de sentido em pontos da seção transversal; (3) - A resistência efetiva cresce com o parâmetro m e tem como consequência o aumento da potência dissipada por efeito Joule, a qual é mínima[9] quando a corrente se distribui homogênea-mente sobre a seção transversal; (4) - à medida que o parâmetro m aumenta a auto-indutância do circuito aumenta.

Em regime transiente alguns fatos interessantes ocorrem: (1) No início, a corrente começa a se estabelecer pela superfície do condutor e à medida que o tempo flui, esta se distribui paulatinamente da superfície para o centro, até que a distribuição de corrente seja uniforme. Obviamente este fenômeno ocorre de forma mais rápida ou lenta dependendo das características elétricas do condutor; (2) O condutor apresenta inicialmente uma resistência muito grande até atingir no limite da resistência para corrente constante.

Este mesmo raciocínio matemático pode ser estendido a uma seção transversal retangular ou circular, embora os cálculos sejam mais elaborados.

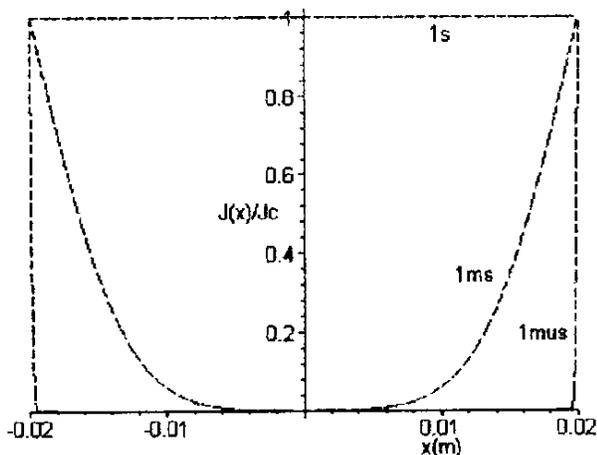


Figura 7. Densidade de corrente na seção transversal para $t=1s, 1ms, 1\mu$.

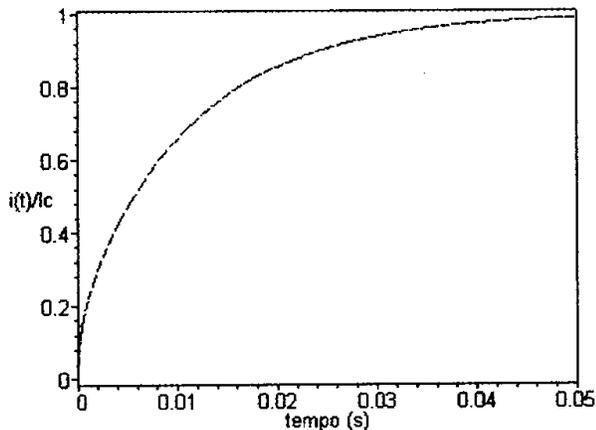


Figura 8. Variação da corrente como função do tempo ($a=0,02m$ e $\sigma = 5,71 \times 10^7$. S/m).

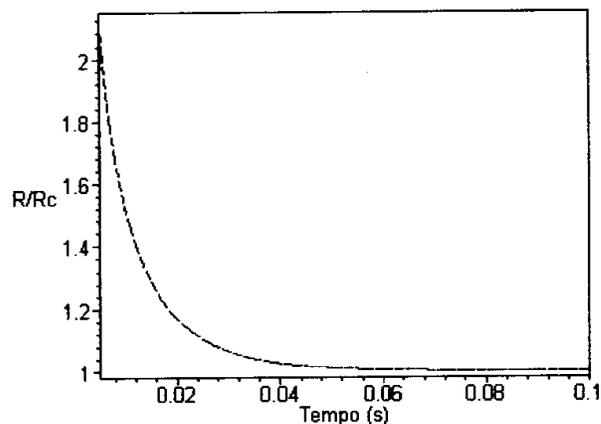


Figura 9. Variação da resistência efetiva como função do tempo ($a=0,02m$ e $\sigma = 7,71 \times 10^7$. S/m).

References

- [1] HIGGINS T. J., The Origins and Developments of the Concept of Inductance, Skin Effect and Proximity Effect, *Am. J. of Physics*, **9**, 6 (1941), p.337-346.
- [2] MOON P. and SPENCER D.E., *Foundations of Electrodynamics*, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N.J., (1960).
- [3] POPOVIC B.D., *Introductory Engineering Electromagnetics*, Addison Wesley Pub. Co., Reading Massachusetts, (1973).
- [4] CASIMIR H.B.G. and UBBNIK J., The skin effect, *Phillips Technical Review* **28**, 9 (1976), p.271-283.
- [5] REITZ J. R., MILFORD F.J. e CHRISTY R. W., *Fundamentos da Teoria Eletromagnética*, Editora Campus Ltda., Rio de Janeiro, (1982).
- [6] CAHEN F., *La Repartition des Courants dans les Conducteurs massifs*, Technique de L'Ingenieur, vol.D-130, Paris, (1951), p.1-10.
- [7] DENNERY P. and KRZYWICKI A. *Mathematics for Physicists*, Dover Publications, Inc., Mineola, (1996).
- [8] BOYLESTAD R. L., *Introdução à Análise de Circuitos*, Prentice-Hall do Brasil Ltda, Rio de Janeiro (1998), p.389.
- [9] POINCELOT P., *Précis d'Électromagnétisme Théorique*, Dunod, Paris, (1963), p.64.