

# Reversibilidade em Colisões Relativísticas

(Reversibility in relativistic collisions)

R. A. Moreno\* e G. F. Leal Ferreira\*\*

\*UNESP, IGCE, CP 178, 13500-970, Rio Claro, SP

ramoreno@rc.unesp.br

\*\*USP, IFSC, CP 369, 13560-970, São Carlos, SP

guilherm@if.sc.usp.br

Recebido em 27 de setembro, 1999

Mostra-se explicitamente que as velocidades relativas entre massas em colisão relativista unidimensional elástica (e não velocidades relativas calculadas em referenciais) são preservadas. Faz-se também um estudo da colisão relativística unidimensional e uma breve incursão ao choque plano.

We show explicitly that the relative velocity between masses in a unidimensional relativistic elastic collision is preserved (but not the calculated relative velocities in various reference frames). A brief study of the unidimensional relativistic collision is also made as well as a brief one of the plane collision.

## I Introdução

Recentemente em [1] chamou-se a atenção para a simplicidade que pode ser introduzida na análise de colisões unidimensionais elásticas se usamos o princípio da reversibilidade, isto é, de que se as massas que se chocaram voltassem a fazê-lo (o que aconteceria se houvesse uma inversão na direção das velocidades após a colisão), as velocidades iniciais de antes do choque seriam reobtidas. Através deste princípio se deduz logo que no choque newtoniano elástico o módulo da velocidade relativa entre as massas é conservado. Será que este resultado vale em Relatividade apesar das não desprezíveis mudanças que as grandezas intervenientes sofrem ao se adaptarem a ela? Mostraremos a seguir que este é o caso, sempre que as velocidades relativas sejam aquelas entre as massas em colisão e não as velocidades relativas calculadas em sistemas de referência. Entre esses somente o sistema do centro de massa (CM) exhibe aquela conservação, como mostraremos a seguir. Faremos também um rápido estudo das imagináveis colisões relativísticas unidimensionais e uma breve incursão ao caso bidimensional.

## II Análise relativística de uma colisão elástica unidimensional

### II-1 No sistema do Laboratório

Recordemos que em Relatividade a massa  $m_i$  é

função de sua velocidade  $v_i$  através da bem conhecida relação

$$m_i = \gamma_i \cdot m_{i0} \quad (1)$$

com

$$\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}}, \quad (2)$$

onde  $m_{i0}$  é a massa de repouso e  $c$  a velocidade da luz. O momento  $p_i$  é

$$p_i = m_i v_i. \quad (3)$$

As massas em colisão serão denotadas por índices  $a$  e  $b$  e as grandezas intervenientes depois do choque no sistema do Laboratório serão designadas com uma "linha". ( $v'_a$ ,  $m'_a$ , etc). Vide Fig.1.

Definimos que na colisão elástica relativística as massas de repouso se conservam. As equações de conservação da energia (ou de massa) e a do momento são

$$m_a + m_b = m'_a + m'_b, \quad (4)$$

e

$$m_a v_a + m_b v_b = m'_a v'_a + m'_b v'_b. \quad (5)$$

As Eqs. 4 e 5, tendo em conta as definições nas Eqs. 1 e 2, seriam suficientes para determinar  $v'_a$  e  $v'_b$ , porém devido à presença de termos multiplicados por  $\gamma_i$  ( $i = a, b, a'$  e  $b'$ ) o sistema resulta muito pouco convidativo do ponto de vista algébrico.



Figura 1. Colisão unidimensional de duas massas,  $m_{a0}$  e  $m_{b0}$ , no referencial do Laboratório, antes e depois do choque. As massas dinâmicas são respectivamente  $m_a$  e  $m_b$  antes do choque e  $m'_a$  e  $m'_b$  depois do choque.

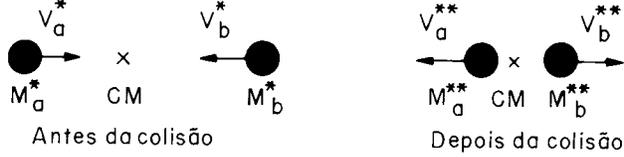


Figura 2. Colisão unidimensional de duas massas,  $m_{a0}$  e  $m_{b0}$ , no referencial do CM antes e depois do choque. As massas dinâmicas são respectivamente  $m_a^*$  e  $m_b^*$  antes do choque e  $m_a^{**}$  e  $m_b^{**}$  depois do choque.

## II.1 No sistema do Centro de Massa

No sistema do CM, Fig. 2, o problema é bem mais simples. Chamemos agora de  $v_a^*$  e  $v_b^*$  as velocidades no referencial do CM antes da colisão e de  $v_a^{**}$  e  $v_b^{**}$  as velocidades depois da colisão. Achemos, em primeiro lugar, a velocidade  $V$  do CM. Por definição ela é dada por

$$V = \frac{m_a v_a + m_b v_b}{m_a + m_b}. \quad (6)$$

Usando a conhecida fórmula da adição relativística de velocidades, obtemos para  $v_a^*$  e  $v_b^*$  no sistema do CM,

$$v_a^* = \frac{v_a - V}{1 - \frac{v_a V}{c^2}} \quad \text{e} \quad v_b^* = \frac{v_b - V}{1 - \frac{v_b V}{c^2}}. \quad (7)$$

Relações análogas valem para as velocidades e  $v_a^{**}$  e  $v_b^{**}$  depois do choque. Para uso futuro damos aqui as expressões das velocidades com que a partícula  $b$  vê a partícula  $a$ , antes e depois do choque,  $v_{ab}$  e  $v'_{ab}$ , respectivamente. São elas usando a fórmula da adição

$$v_{ab} = \frac{v_a^* - v_b^*}{1 - \frac{v_a^* v_b^*}{c^2}} \quad \text{e} \quad v'_{ab} = \frac{v_a^{**} - v_b^{**}}{1 - \frac{v_a^{**} v_b^{**}}{c^2}}. \quad (8)$$

As condições de conservação de massa e de momento no CM são

$$m_a^* + m_b^* = m_a^{**} + m_b^{**} \quad (9)$$

$$m_a^* v_a^* + m_b^* v_b^* = 0 \quad (10)$$

$$m_a^{**} v_a^{**} + m_b^{**} v_b^{**} = 0, \quad (11)$$

Combinando as Eqs. (9-11) e as definições nas Eqs. 1 e 2, chega-se a

$$\frac{1 - \frac{v_b^*}{v_a^*}}{\sqrt{1 - \frac{v_b^{*2}}{c^2}}} = \frac{1 - \frac{v_b^{**}}{v_a^{**}}}{\sqrt{1 - \frac{v_b^{**2}}{c^2}}}. \quad (12)$$

No caso newtoniano teríamos

$$\frac{v_b^*}{v_a^*} = \frac{v_b^{**}}{v_a^{**}} \quad (13)$$

equação que considerada simultaneamente com a equação da conservação da energia

$$m_{a0} v_a^{*2} + m_{b0} v_b^{*2} = m_{a0} v_a^{**2} + m_{b0} v_b^{**2} \quad (14)$$

leva à solução trivial, ou seja

$$v_a^* = -v_a^{**} \quad \text{e} \quad v_b^* = -v_b^{**} \quad (15)$$

Voltando à Eq. 12 vemos que a solução trivial, Eq. 15, deve ser também a sua solução quando a Eq. 12 é considerada simultaneamente com a Eq. 9 da conservação da energia. A solução dada na Eq. 15 satisfaz ambas equações Eqs. 9 e 12, e, fisicamente, deve ser a única.

Portanto, no CM, as velocidades são simplesmente invertidas no choque, exatamente como no caso newtoniano. Considerando agora a Eq. 8, vemos que as velocidades com que a partícula  $b$  vê a partícula  $a$ , antes e depois do choque,  $v_{ab}$  e  $v'_{ab}$  respectivamente, conservam seu módulo, como no caso newtoniano. Pela Eq. 15 vemos que no CM,  $v_a^* - v_b^* = -(v_a^{**} - v_b^{**})$ , isto é, a velocidade relativa calculada no CM conserva seu módulo no choque. O mesmo não ocorre nos outros sistemas de referência, como no do Laboratório, como veremos logo.

## III Estudo do choque relativístico no sistema do Laboratório

Para o estudo do choque relativístico unidimensional no sistema L, do Laboratório, vamos considerar a situação mais simples e mais usual em que uma das partículas está inicialmente parada. Isto é,  $v_b = 0$  e  $v_a > 0$ . A velocidade do CM é agora

$$V_0 = \frac{M_a v_a}{m_a + m_{b0}} \quad (16)$$

e as velocidades de  $a$  e  $b$  no CM são antes do choque

$$v_a^* = \frac{v_a - V_0}{1 - \frac{v_a V_0}{c^2}} \quad \text{e} \quad v_b^* = -V_0 \quad (17)$$

e depois do choque, de acordo com a Eq. 15

$$v_a^{**} = -v_a^* \text{ e } v_b^{**} = -v_b^* \quad (18)$$

De posse desses resultados podemos agora retornar ao sistema L e obter as velocidades finais  $v'_a$  e  $v'_b$ , usando a fórmula da adição de velocidades

$$v'_a = \frac{-v_a^* + V_0}{1 - \frac{v_a^* V_0}{c^2}} \text{ e } v'_b = \frac{-v_b^* + V_0}{1 - \frac{v_b^* V_0}{c^2}} \quad (19)$$

Substituindo a Eq. 17 na Eq. 19 obtemos

$$v'_a = \frac{2V_0 - v_a - \frac{v_a V_0^2}{c^2}}{1 - \frac{2v_a V_0}{c^2} + \frac{V_0^2}{c^2}} \text{ e } v'_b = \frac{2V_0}{1 + \frac{V_0^2}{c^2}}. \quad (20)$$

Notemos que na Eq. 16 comparece a massa dinâmica  $m_a$ . Em termos da massa de repouso ela é

$$V_0 = v_a \frac{1}{1 + \mu \sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}} \text{ com } \mu = \frac{m_{b0}}{m_{a0}}. \quad (21)$$

A velocidade relativa calculada no sistema L depois do choque é

$$v'_a - v'_b = -v_a \frac{\left(1 - \frac{V_0^2}{c^2}\right)^2}{\left(1 + \frac{V_0^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{2v_a V_0}{c^2} + \frac{V_0^2}{c^2}\right)} \quad (22)$$

que não conserva o módulo, ao contrário da velocidade relativa real, Eq. 8, e a velocidade calculada no CM, Eq. 15.

## IV Resultados

As Eqs. 20, tendo em conta as Eqs. 21, podem ser estudadas em toda a faixa relativística usando-se as velocidades reduzidas  $\frac{v'_a}{v_a}$  e  $\frac{v'_b}{v_a}$ , em função da velocidade da partícula incidente em termos da velocidade da luz  $v_{ar} = v_a/c$ , tendo como parâmetro a relação entre as massas,  $\mu = m_{b0}/m_{a0}$ . Analisando em separado os casos extremos, isto é, o limite newtoniano quando  $v_{ar} \rightarrow 0$  e o limite extremo relativístico quando  $v_{ar} \rightarrow 1$ , obtemos no limite newtoniano

$$\frac{v'_a}{v_a} = \frac{1 - \mu}{1 + \mu} \text{ e } \frac{v'_b}{v_a} = \frac{2}{1 + \mu}, \quad (23)$$

e no limite extremo relativístico

$$\frac{v'_a}{v_a} = \frac{1 - \mu^2}{1 + \mu^2} \text{ e } \frac{v'_b}{v_a} = 1. \quad (24)$$

Vemos que, no limite extremo relativístico, a partícula inicialmente em repouso tenderá sempre a adquirir a velocidade limite  $c$ , independentemente do valor do

parâmetro  $\mu$ . Observa-se porém, que a convergência para  $c$  da velocidade da partícula  $b$  será cada vez mais lenta para valores crescentes de  $\mu$ . Por exemplo, para  $v_{ar} = 0.99$ , temos  $\frac{v'_b}{v_a} = 0.877$  se  $\mu = 5$  e  $\frac{v'_b}{v_a} = 0.71$  se  $\mu = 10$ . Os valores limite da Eq. 24 somente serão atingidos para valores de  $v_{ar} = \frac{v_a}{c}$  mais próximos da unidade, para maiores valores de  $\mu$ .

Na Figs. 3 mostramos  $\frac{v'_a}{v_a}$  e  $\frac{v'_b}{v_a}$  como função de  $v_{ar}$  para alguns valores de  $\mu$ , respectivamente em tracejado e linha cheia. Vê-se que para  $\mu = 1$  o resultado relativístico é igual ao newtoniano, isto é, a massa incidente fica em repouso e a outra adquire a velocidade da massa incidente. Deve ser observado que na realidade o parâmetro  $\mu$  não pode ter qualquer valor já que as partículas que atingem velocidades próximas da velocidade da luz são as partículas elementares da natureza as quais tem massas de repouso características. Entretanto gráficos como o da Fig. 3, são ilustrativos do comportamento genérico esperado.

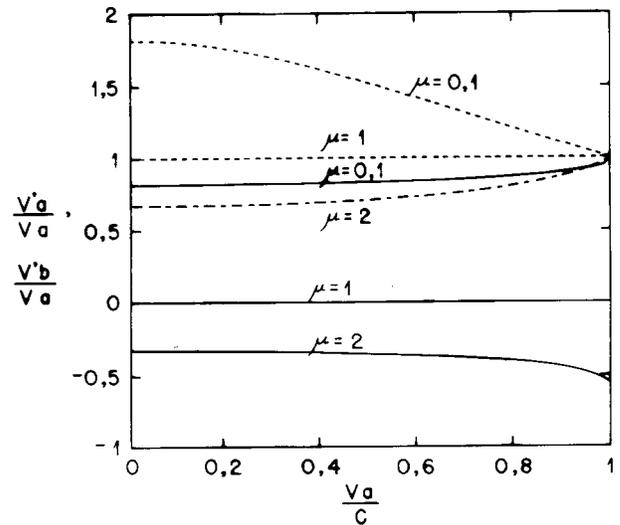
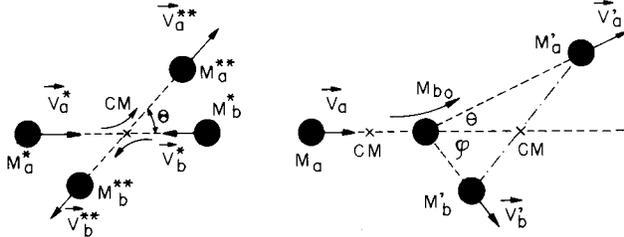


Figura 3. Gráficos das velocidades reduzidas,  $\frac{v'_a}{v_a}$  e  $\frac{v'_b}{v_a}$ , no referencial do Laboratório, após o choque, em função da velocidade da partícula incidente  $\frac{v_a}{c}$ , parametrizadas pelo quociente das massas de repouso  $\mu = \frac{m_{b0}}{m_{a0}}$ . As linhas cheias correspondem à massa  $a$  incidente e as linhas tracejadas à massa  $b$  inicialmente em repouso. Vide o texto.

## V Colisão bidimensional

Como bem discutido por Evans [2] há conservação do módulo da velocidade no choque bidimensional no sistema do CM. No caso relativístico, as Eqs. 9-11 valem também se as velocidades  $v_a^*$  e  $v_b^*$ , e  $v_a^{**}$  e  $v_b^{**}$  são consideradas grandezas algébricas nas direções assintóticas inicial e final, havendo uma deflexão  $\Theta$  entre estas direções (Fig. 4). Por argumentos análogos ao

caso unidimensional concluiremos que a Eq.12 será satisfeita quando  $|v_a^{**}| = |v_a^*|$  e  $|v_b^{**}| = |v_b^*|$ .



Colisão no referencial do CM. Colisão no referencial do Laboratório.

Figura 4. Representação assintótica de uma colisão bidimensional no CM e no referencial do Laboratório. A relação entre os ângulos envolvidos nas direções assintóticas das velocidades são dados pelas equações 26-29.

No CM as componentes das velocidades após a colisão serão

$$\begin{aligned} v_{ay}^{**} &= v_a^* \sin\Theta, & v_{ax}^{**} &= v_a^* \cos\Theta, \\ v_{by}^{**} &= -V_0 \sin\Theta, & v_{bx}^{**} &= -V_0 \cos\Theta \end{aligned} \quad (25)$$

Usando as fórmulas de adição das velocidades obtemos

$$v'_{ay} = \frac{v_a^* \sin\Theta \sqrt{1 - \frac{V_0^2}{c^2}}}{1 + v_a^* \frac{V_0}{c^2} \cos\Theta}, \quad v'_{ax} = \frac{v_a^* \cos\Theta + V_0}{1 + v_a^* \frac{V_0}{c^2} \cos\Theta}, \quad (26)$$

$$v'_{by} = \frac{-V_0 \sin\Theta \sqrt{1 - \frac{V_0^2}{c^2}}}{1 - \frac{V_0^2}{c^2} \cos\Theta}, \quad \text{e} \quad v'_{bx} = \frac{-V_0 \cos\Theta + V_0}{1 - \frac{V_0^2}{c^2} \cos\Theta}, \quad (27)$$

Os ângulos de espalhamento, mais facilmente observados no laboratório, estão dados por

$$\tan\vartheta = \frac{v'_{ay}}{v'_{ax}} \quad \text{e} \quad \tan\varphi = \frac{v'_{by}}{v'_{bx}}$$

obtendo-se

$$\tan\vartheta = \frac{-v_a^* \sin\Theta \sqrt{1 - \frac{V_0^2}{c^2}}}{v_a^* \cos\Theta + V_0},$$

e

$$\tan\varphi = \frac{-V_0 \sin\Theta \sqrt{1 - \frac{V_0^2}{c^2}}}{(1 - \cos\Theta)V_0}, \quad (28)$$

A partir das Eqs. 28 pode-se encontrar  $\Theta$  em função dos ângulos de espalhamento  $\vartheta$  e  $\varphi$  observados no Laboratório. Encontra-se

$$\sin\Theta = \frac{\tan\vartheta \tan\varphi (V_0 + v_a^*)}{v_a^* (\tan\varphi - \tan\vartheta) \sqrt{1 - \frac{V_0^2}{c^2}}}$$

e

$$\cos\Theta = \frac{V_0 \tan\vartheta + v_a^* \tan\varphi}{v_a^* (\tan\varphi - \tan\vartheta)} \quad (29)$$

isto permite que combinando as Eqs. 29 com as Eqs. 21 e 17 e substituindo o resultado obtido nas Eqs. 26 e 27 possamos determinar as velocidades finais no Laboratório em função da velocidade inicial, as massas das partículas e os ângulos de espalhamento. Aqui, como no choque bidimensional newtoniano, as leis de conservação não bastam para a determinação do resultado já que este depende de outros parâmetros (parâmetro de impacto, tipo de interação) que afinal determinam o ângulo de espalhamento.

## VI Reversibilidade

Tivemos certo trabalho para concluir que  $v_{ab} = -v'_{ab}$ , Eq. 15, no caso relativístico, isto é, que a velocidade com que  $b$  vê  $a$  é simplesmente invertida no choque. Se admitido de início o princípio da reversibilidade, no sistema do Laboratório, provaríamos, como feito em [1], sem esforço, que  $v_{ab} = -v'_{ab}$ .

Vale ressaltar aqui que  $v_{ab}$  e  $v'_{ab}$ , as velocidades autenticamente relativas, conservam o módulo enquanto que as velocidades relativas calculadas, por exemplo, no sistema do Laboratório, Eq. 22, não o conservam.

## Agradecimentos

Os autores agradecem o interesse do Professor Bernhard Gross e as informações sobre o “Relativistic Heavy Ion Collider” (que traduzimos como “Colisor Relativístico de Ions Pesados”) de Brookhaven que ele nos passou, vindo de uma mensagem de seu filho Antonio Gross, sobre o artigo “Big Bang Machine could destroy Earth”, Sunday-Times, edição de 18/07/99, por Jonathan Leak e que trata das dúvidas que precedem sua inauguração. Um dos autores, GFLF agradece a bolsa de produtividade do CNPq.

## References

- [1] Leal Ferreira. G. F. “Reversibilidade no choque elástico; a conservação da velocidade relativa”. Rev. Bras. Ens. Fis. **22**, 135 (2000).
- [2] Evans, R.D. *The Atomic Nucleus*, McGraw-Hill Book Co. (1955). Ap. B.