

Grupos de Lie em Mecânica Clássica: a Contribuição de Dirac e Recentes Desenvolvimentos

A. E. Santana^a, A. Ribeiro Filho^a e J. David. M. Vianna^{a,b}

^a Instituto de Física, Universidade Federal da Bahia,
Campus de Ondina, 40210-340, Salvador, Bahia, Brasil.

^b Instituto de Física, Universidade de Brasília
70910-900, Brasília-DF, Brasil

Recebido em 23 de abril, 1999

O conceito de representação de álgebras de Lie proposto por Dirac, com base na estrutura de parêntesis de Poisson, é reexaminado sob a perspectiva de recentes desenvolvimentos. Como exemplos, o grupo de Poincaré e o de rotação são tratados no espaço de fase, com particular ênfase a modelos clássicos com graus internos de liberdade, como spin e isospin. Além disso, como uma generalização da proposta de Dirac, desenvolvemos a noção de representação unitária no espaço de fase relativístico seguindo de perto a estrutura quântica. Mostramos então como tais representações estão associadas com métodos da teoria de campos a temperatura finita e teoria cinética relativística. O trabalho enfatiza uma apresentação pedagógica de um ponto de vista físico.

The concept of representation of Lie algebras proposed by Dirac, founded on the structure of Poisson bracket, is analysed under the perspective of recent developments. As examples, representations in phase space of the rotation group and Poincaré group are studied, with particular emphasis to classical models with internal degrees of freedom, like spin and isospin. In addition, as a generalization of the Dirac approach, we develop the notion of unitary representation in relativistic phase space, following in parallel to quantum structures. We show then as such representations are associated with methods first developed in the context of the quantum field theory at non-zero temperature. The work emphasizes a pedagogical presentation from a physical standpoint.

I Introdução

O conceito de grupo contínuo foi estabelecido pelo matemático norueguês Sofus Lie na segunda metade do século XIX em associação com as soluções de equações diferenciais[1, 2]. Com o advento da Mecânica Quântica foi possível, a partir dos trabalhos de Wigner[3], implementar a noção de representação de grupos de simetria de Lie no estudo de sistemas físicos. Em particular, o conceito de partícula fundamental aparece de representações irreduzíveis dos chamados grupos cinemáticos, que são grupos definidos a partir de isometrias no espaço-tempo, a exemplo do grupo de De Sitter, de Poincaré e de Galilei[4], sendo que interações básicas são, por sua vez, descritas pelos grupos dinâmicos implementados via simetrias de calibre. No contexto de teorias clássicas, o uso das técnicas de grupos e álgebras de Lie se deu, inicialmente, via a análise de soluções das equações (diferenciais) de movimento, como as equações de Newton para osciladores. Dirac, em 1949, foi quem primeiro mostrou como explorar sistematicamente o conceito de representação de grupo de Lie em Mecânica

Clássica em um trabalho intitulado *Forms of Relativistic Dynamics*[5], motivado por encontrar uma estrutura Hamiltoniana apropriada aos sistemas atômicos, incluindo aqueles relativísticos e em interação[6].

Dirac, então, assumiu que os dois requisitos para uma teoria dinâmica seriam: a) a invariância sob transformações infinitesimais, que nada mais é do que invariância sob as transformações de Lorentz no caso relativístico, e b) a estrutura Hamiltoniana, um requerimento advindo da Mecânica Quântica na formulação de Heisenberg, Schrödinger e do próprio Dirac.

A nova teoria de representação de Dirac só receberia atenção mais detalhada a partir dos trabalhos de Loinger[7, 8], Gulmanelli[9], e Lugarini & Pauri[10, 11], na Itália, durante a década de 60, partindo da conexão de transformações canônicas e representações de espaços de Hilbert em Mecânica Clássica como exploradas por Koopman[12] e Schemberg[13]. Em particular, Pauri[14] estabeleceu as bases gerais de realizações de grupos de Lie via as transformações canônicas em Mecânica Clássica, chamadas de *representações canônicas*, generalizando, assim, o trabalho

de Dirac.

Um tratado básico sobre representações canônicas de grupos de Lie surge nos anos 70 com o livro de Sudarshan e Mukunda[15] sobre Mecânica Clássica, incluindo campos e partículas. E neste contexto, um resultado relevante é que a noção de partícula clássica, relativística ou não-relativística, apresentando graus internos de liberdade, pôde ser introduzida através de uma estrutura de mecânica simplética singular. Desse modo o spin pode ser entendido dentro do escopo clássico, e não como um atributo estritamente quântico[15]–[21].

Um dos interesses atuais por representações de grupos de Lie no contexto clássico consiste no desenvolvimento da Relatividade Restrita com fins, por exemplo, de implementação da Hidrodinâmica Relativística, que tem como um ponto de partida a Teoria Cinética Relativística[22, 23, 24]. Neste caso, a noção básica fundamenta-se no conceito de ensemble, que pressupõe, por sua vez, a existência de espaço de fase relativístico e um teorema do tipo Liouville (note que o espaço de fase é a variedade natural para o desenvolvimento de uma teoria cinética. Isto se dá também ao nível quântico, e leva à introdução da chamada função de Wigner). Neste sentido foi Jüttner, em 1911[25], quem primeiro deduziu uma função de distribuição no equilíbrio relativística do tipo Maxwelliana e, em 1928[26], estabeleceu a distribuição para bósons e férmions; a primeira equação de Boltzmann com termo de colisão foi deduzida em 1940 por Lichnerowicz e Marrot[27]. Desde então uma série de trabalhos apareceram na literatura sobre equações de transporte relativísticas[28] e uma preocupação básica foi com a estrutura covariante da teoria. Este último aspecto permite, em particular e como uma consequência imediata, deduzir efeitos gravitacionais numa primeira aproximação pela substituição da derivada usual espaço-temporal pela derivada covariante. Contudo este aspecto de covariância ainda hoje é motivo de controvérsia[29]

Um outro aspecto que requer desenvolvimentos no contexto da Teoria Cinética Relativística, clássica ou quântica, está associado à invariância de calibre. Uma motivação recente para isto tem sido as evidências experimentais sobre plasmas do tipo de quarks e gluons, o que tem conduzido ao estabelecimento, embora de modo preliminar, de uma teoria cinética contemplando graus de liberdade do tipo cor[30]–[33]. Neste caso, o estudo das representações canônicas mostra-se promissor, dada a experiência e o sucesso com representação de grupos de simetria em áreas como a Teoria Quântica de Campos. Um exemplo neste sentido é o recente trabalho de Olive, Rabinovici e Schwimmer[34] introduzindo uma família de modelos clássicos não-abelianos.

As representações canônicas são de particular relevância no âmbito das teorias de quantização geométrica[35, 36], que têm como ponto de partida a estrutura algébrica do parêntesis de Poisson, dando ori-

gem à chamada álgebra de Poisson. Este método segue e generaliza o procedimento de quantização de Dirac, que associa a cada parêntesis de Poisson comutadores de operadores definidos num espaço de Hilbert. Naturalmente, isto induz ao problema, não trivial, mas de forte apelo físico, de quantização de álgebras de Poisson quaisquer. Por exemplo, os sistemas com vínculos requerem um parêntesis de Dirac, que estabelece uma representação particular de álgebra de Poisson, e a partir do qual se procede a quantização. Neste sentido um dos mais célebres esquemas de quantização foi proposto por Soriau[37] e Konstant[38], o qual tem sido generalizado por Huebschmann[39] e Vaisman[40] para álgebras de Lie de funções sobre variedades de Poisson. (Para outros desenvolvimentos e aplicações da Mecânica Clássica e estruturas de Poisson sugerimos as Refs.[41]–[48].)

O trabalho aqui apresentado possui duplo objetivo. Primeiro é apresentar uma revisão, de caráter pedagógico, do método de representação de álgebra de Lie baseado no parêntesis de Poisson, com destaque à visão de Dirac deste programa, e às representações de partículas clássicas com graus de liberdade internos, spin e isospin. Segundo é desenvolver uma generalização da formulação de Dirac, implementando a noção de representação relativística unitária no espaço de fase. Neste último caso exemplificamos o formalismo com o estudo do grupo de Poincaré, revelando a conexão deste tipo de representação com a estrutura da Teoria Cinética e a Teoria de Campos a Temperatura Finita.

A apresentação está disposta aqui da seguinte maneira. Na seção II são descritos alguns aspectos biográficos sobre Dirac, em seu envolvimento com a Mecânica, através do problema que leva à quantização geométrica. Na seção III, o método de Dirac de representação de grupos de Lie para partículas clássicas é introduzido, e como exemplos, na seção IV, o grupo de rotação e de Poincaré são estudados, tratando o caso de spin e isospin. Na seção V, representações unitárias do grupo de Poincaré no espaço de fase são desenvolvidas. As conclusões e observações finais são apresentados na seção VI.

II Aspectos Biográficos sobre Dirac, Mecânica Clássica e Quantização

II.1 Elementos Biográficos sobre Dirac

Paul Adrien Maurice Dirac foi, reconhecidamente [49]–[54], um dos mais notáveis físicos de todos os tempos. Inglês de origem, *Pan* Dirac, como as vezes era chamado, nasceu em Bristol em 1902, filho de pai suíço, Charles Adrien Ladislas Dirac, e mãe inglesa, Florence Hana Dirac. Foi educado na Merchant Venture's School

em Bristol, e obteve o seu grau de BSc em Engenharia Elétrica na Universidade de Bristol em 1921. Naquela universidade Dirac permaneceria por mais dois anos estudando Matemática, transferindo-se para o St. John's College, em Cambridge, como um *research student* em Matemática, obtendo seu grau de PhD em 1926. Dirac ocupou por mais de 30 anos a cátedra Lucasiana da Universidade de Cambridge[55], a mesma posição prestigiosa ocupada séculos antes por Sir Isaac Newton, o autor do *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Nos anos vinte Dirac realizou uma série de grandes trabalhos, dentre os quais três que se tornaram pilares: da Física Quântica (em 1925)[56], da Teoria Quântica de Campos (em 1927)[57], e da Teoria das Partículas Elementares (em 1928)[58], com sua famosa equação para o elétron – a equação de Dirac.

Ao trocar Bristol pela Universidade de Cambridge, Dirac viria interessar-se pelos novos estudos da Física Quântica. Em setembro de 1925, Dirac recebeu de seu então orientador, Fowler, uma pré-publicação do famoso artigo de Heisenberg, trabalho este que deu origem à Mecânica das Matrizes[59]. Apesar de não entendê-la de imediato, pois segundo suas próprias palavras: *It was very difficult for me to appreciate it at first...*[52], Dirac, num intervalo exíguo de tempo, percebeu que a idéia da não comutatividade era a mais fundamental no trabalho do físico germânico. Em 1968, Dirac recordaria que, algumas semanas após aquele setembro, ele vislumbrara a necessidade de re-utilizar a idéia do parêntesis de Poisson da Mecânica Clássica[52]. Dirac pressentiu alguma conexão entre o comutador e aqueles parênteses, cuja teoria não dominava completamente até então. Aquela intuição o faria verificar que tais parênteses tinham uma forma e propriedades idênticas ao parêntesis comutador introduzido a partir de grandezas não comutativas na teoria de Heisenberg.

Esta descoberta de Dirac, em torno de tais parênteses da Mecânica Clássica, o conduziria à obtenção de resultados importantes, dentre os quais a demonstração da conexão entre os geradores da teoria de Heisenberg e os da teoria clássica de Poisson, bem como o fato que tal relação proporcionava uma continuidade com a Mecânica Clássica ao demonstrar as condições sob as quais as leis de Newton e os parênteses comutadores (de Dirac) eram válidos. Esses mesmos re-

sultados seriam obtidos, independentemente, por Born, Heisenberg e Jordan[60], posteriormente, no artigo sobre Teoria Quântica via Mecânica Matricial. Antes, porém no artigo *The Fundamental Equations of Quantum Mechanics*[56], Dirac assume que: “... *the difference between the Heisenberg products of two quantum quantities is equal to $ih/2\pi$ times their Poisson brackets expressions. In symbols, $xy - yx = (ih/2\pi)[x, y]$...*”, onde $[,]$ é denominado parêntesis de Dirac. Isto deu origem ao que ficou conhecido como o problema de Dirac da teoria de quantização geométrica, o qual abordaremos a seguir.

II.2 O Problema de Dirac e a Origem da Quantização Geométrica

Em seu mencionado trabalho[56] e no livro, *The Principles of Quantum Mechanics* [61], Dirac, ao considerar o problema da quantização, questiona qual imagem quântica deveria ter o parêntesis de Poisson, que desempenha um papel central na Mecânica Hamiltoniana clássica. O que de fato Dirac introduziu foi a postulação que as grandezas quânticas formam uma álgebra associativa g (onde denotaremos o produto associativo de dois elementos u e v de g por uv), e o que inicialmente fora denominado de parêntesis de Poisson quântico constitui-se em uma operação bilinear $(,)$ equipando g com uma estrutura de álgebra de Lie com derivação sobre o produto associativo. Por conseguinte, a operação $(,)$ é um produto de Lie satisfazendo, por definição, as condições de antissimetria e a identidade de Jacobi, as quais são dadas respectivamente por,

$$(u, v) = -(v, u), \tag{1}$$

$$(u, (v, w)) + (v, (w, u)) + (w, (u, v)) = 0, \tag{2}$$

além da regra de derivação (de Leibniz), isto é,

$$(u, vw) = (u, v)w + v(u, w). \tag{3}$$

A partir da última relação podemos calcular

$$(mr, nt), \quad m, r, n, t \in g$$

de duas maneiras alternantes, onde a primeira é

$$\begin{aligned} (mr, nt) &= (mr, n)t + n(mr, t) \\ &= (m, n)rt + m(r, n)t + n(m, t)r + nm(r, t), \end{aligned} \tag{4}$$

e a segunda,

$$\begin{aligned} (mr, nt) &= (m, nt)r + m(r, nt) \\ &= (m, n)tr + n(m, t)r + m(r, n)t + mn(r, t). \end{aligned} \tag{5}$$

Subtraindo a Eq.(4) da Eq.(5) obtemos

$$(m, n)[r, t] - [m, n](r, t) = 0,$$

onde $[,]$ representa o comutador. Disto resulta que (m, n) e $[r, t]$ devem ser proporcionais, sendo que a constante de proporcionalidade, independente de m, n, r e t , é indicada por $i\hbar = ih/2\pi$, onde h é a constante de Planck (\hbar é denominada de constante de Dirac). Assim resulta que:

$$(m, n) = \frac{1}{i\hbar}[m, n].$$

Com tal resultado Dirac introduziu a quantização de um sistema clássico que, em última análise, consiste em associar a cada observável clássica f , definida sobre o espaço de fase, um operador Hermitiano atuando no espaço de Hilbert, de tal maneira que o parêntesis de Poisson de tais observáveis fica associado, a menos de constantes, com o comutador dos respectivos operadores[36].

Utilizando a mais simples das variedades simpléticas (dada por $M = T^*R^n$, juntamente com a estrutura simplética $\omega = dp_i \wedge dq^i$, $i = 1, 2, \dots, n$), Van Hove[62] introduziu o conceito de *pré-quantização* como um mapeamento que leva funções contínuas f ($f \in C^\infty(T^*R^n)$) a operadores auto adjuntos δ_f , sobre um espaço de Hilbert, \mathcal{H} , e que satisfaz as condições de Dirac, isto é,

$$\begin{aligned} \delta_{f+g} &= \delta_f + \delta_g, \\ \delta_{\lambda f} &= \lambda \delta_f, \\ \delta_{1R^n} &= Id(\mathcal{H}), \\ [\delta_f, \delta_g] &= (\delta_f \circ \delta_g - \delta_g \circ \delta_f) = i\hbar \delta_{\{f, g\}_w}, \end{aligned}$$

para $\forall f, g \in C^\infty(T^*R^n)$ e $\lambda \in \mathbf{R}$, sendo $\{f, g\}_w$

$$\{f, g\}_w = \sum_{r=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_r} \frac{\partial g}{\partial p_r} - \frac{\partial g}{\partial q_r} \frac{\partial f}{\partial p_r} \right), \quad (6)$$

o parêntesis de Poisson. A análise da existência de uma tal pré-quantização é denominada, normalmente,

o *Problema de Dirac*, cuja extensão para variedades simpléticas generalizadas constitui o problema central de processos de quantização geométrica. Devemos destacar o aspecto do ordenamento no processo de quantização. Ou seja, dado uma função $h = fg = gf$, o correspondente operador δ_h não é unicamente definido, uma vez que $\delta_f \circ \delta_g$ em geral não comuta, o que não é o caso do produto associativo de funções fg . Uma maneira de contornar esta dificuldade foi proposta por Weyl, que pode ser interpretada como uma deformação de $\{f, g\}_w \xrightarrow{\hbar} \{f, g\}_M$, onde $\{f, g\}_M$ é o chamado parêntesis de Moyal dado por[35, 42]

$$\{f, g\}_M = \frac{2}{\hbar} f(q, p) \sin \left[\frac{1}{2} \hbar \left(\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial q}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial p}} - \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial p}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial q}} \right) \right] g(q, p)$$

Como frisamos no início desta seção, o parêntesis de Poisson introduz uma estrutura de álgebra de Lie. Esta estrutura foi também explorada por Dirac, resultando numa teoria de representação de grupos de simetria em Mecânica Clássica. Este é o tema que desenvolveremos com algum detalhe nas seções seguintes.

III Representação Canônica de Grupos de Lie

Considere um grupo de Lie G caracterizado por uma álgebra de Lie \mathfrak{g} dada por

$$a_i \diamond a_j = C_{ij}^k a_k; \quad i, j = 1, 2, \dots, m \quad (7)$$

onde C_{ij}^k são as constantes de estrutura do grupo, e \diamond é o produto de Lie satisfazendo as propriedades de uma álgebra de Lie com derivação (a regra da soma será assumida sempre nos índices covariantes e contravariantes repetidos). Conforme a seção anterior, temos

$$a_i \diamond a_j = -a_j \diamond a_i \quad \text{antissimetria,} \quad (8)$$

$$a_i \diamond (a_j \diamond a_k) = a_j \diamond (a_i \diamond a_k) + a_k \diamond (a_j \diamond a_i) \quad \text{identidade de Jacobi,} \quad (9)$$

$$a_i \diamond a_j a_k = (a_i \diamond a_j) a_k + a_j (a_i \diamond a_k) \quad \text{derivação.} \quad (10)$$

Assim dizemos que G é um grupo a m parâmetros, os quais serão denotados por (τ_1, \dots, τ_m) . Uma realização de g para sistemas clássicos pode ser estabelecida por transformações (canônicas) das variáveis dinâmicas induzidas pelo grupo G , através dos parâmetros τ_j . Para tanto, vamos primeiro introduzir as variáveis canônicas da teoria da seguinte forma: as quantidades

$p_r, q_s \in \mathbf{R}$, com $r, s = 1, 2, \dots, n$, constituem n pares de variáveis canônicas para um sistema clássico com n graus de liberdade, se o conjunto p_r, q_s for a base de um espaço vetorial de $2n$ dimensões, a ser chamado espaço de fase Γ^{2n} , que também é uma álgebra associativa no produto usual de funções. Além disso, Γ^{2n} é uma álgebra de Lie com o produto denotado por $\{, \}$,

tal que

$$\{q_r, p_s\} = \delta_{rs}, \text{ e } \{p_r, p_s\} = \{q_r, q_s\} = 0. \quad (11)$$

Ademais, $\{, \}$ é uma derivação com relação a álgebra associativa.

Com esta definição de variáveis canônicas e de espaço de fase, segue que uma representação explícita para as Eqs.(11) é dada pela Eq.(6), ou seja, usando uma notação simplificada

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial g}{\partial q} \frac{\partial f}{\partial p},$$

tal que $f = f(q, p)$, e $g = g(q, p)$ com $q = (q_1, \dots, q_n)$, e $p = (p_1, \dots, p_n)$. Note que a variação de q e p , com relação a um certo parâmetro τ , deve permanecer em Γ^{2n} por consistência física, isto é

$$\frac{\delta q}{\delta \tau}, \frac{\delta p}{\delta \tau} \in \Gamma^{2n}.$$

Logo podemos definir uma função $A = A(q, p)$, a menos de um fator aditivo constante, tal que[63]

$$\delta q = \delta \tau \{q, A\} \text{ e } \delta p = \delta \tau \{p, A\}.$$

Este último resultado é suficiente para garantir que as transformações (infinitesimais) nas variáveis canônicas, induzidas pelo grupo G através dos m -parâmetros (τ_1, \dots, τ_m) , deixam as eqs.(11) invariantes, desde que

$$\bar{q}_r = \bar{q}_r(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n; \tau_1, \dots, \tau_m), \quad (12)$$

$$\bar{p}_r = \bar{p}_r(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n; \tau_1, \dots, \tau_m), \quad (13)$$

são tais que $\delta q_r = \bar{q}_r - q_r$ e $\delta p_r = \bar{p}_r - p_r$.

Como consequência, teremos uma representação de \mathcal{G} no espaço de fase desde que as transformações dadas pelas eqs.(12)–(13) sejam homomórficas a \mathcal{G} . Desse modo é necessário que a condição de homomorfismo fique estabelecida explicitamente. Isto pode ser implementado através da comutatividade dos elementos do grupo, que pode ser descrita por

$$G(\tau_i)G(\tau_j)G^{-1}(\tau_i)G^{-1}(\tau_j),$$

que, por sua vez, até a segunda ordem é dado por

$$1 + \sum_{i,j} \delta \tau_i \delta \tau_j a_i \diamond a_j. \quad (14)$$

Note que o produto $a_i \diamond a_j$ está definido pelas constantes de estrutura na Eq.(7).

Consideremos, então, a situação de duas transformações canônicas infinitesimais sucessivas mantendo os termos até segunda ordem. Suponha que a primeira transformação seja dada por

$$\bar{q}_r = q_r + \sum_i \delta \tau_i \{q_r, A_i\}, \quad (15)$$

onde A_i é o gerador da transformação associado ao parâmetro τ_i . Na seqüência, outra transformação é considerada,

$$\begin{aligned} \tilde{q}_r &= \bar{q}_r + \sum_j \delta \tau_j \{\bar{q}_r, A_j\} \\ &= q_r + \sum_j \delta \tau_j \{q_r, A_j\} + \sum_i \delta \tau_j \{q_r, A_j\} + \sum_{i,j} \delta \tau_j \delta \tau_i \{\{q_r, A_i\}, A_j\}. \end{aligned}$$

Por outro lado, a transformação na ordem inversa resulta em

$$\begin{aligned} \hat{q}_r &= q_r + \sum_j \delta \tau_j \{q_r, A_j\} + \sum_j \delta \tau_j \{q_r, A_j\} + \sum_{i,j} \delta \tau_j \delta \tau_i \{\{q_r, A_j\}, A_i\} \\ &= \tilde{q}_r + \sum_{i,j} \delta \tau_j \delta \tau_i \{q_r, \{A_i, A_j\}\}, \end{aligned} \quad (16)$$

onde temos usado a identidade de Jacobi. Este resultado expressa a mudança nas coordenadas, com o mesmo conteúdo da relação abstrata para os grupos de transformação dada pela Eq.(14). O procurado homomorfismo será garantido se estabelecermos que

$$\{A_i, A_j\} = C_{ij}^k A_k + d_{ij}, \quad (17)$$

onde d_{ij} é uma constante, desempenhando em Mecânica Clássica o papel que as fases desempenham nas representações projetivas em Mecânica Quântica[15]. Devido à propriedade de antissimetria do parêntesis de Poisson e das constantes de estrutura, podemos mostrar que

$$d_{ij} = -d_{ji},$$

$$C_{ij}^k d_{kl} + C_{jl}^k d_{ki} + C_{li}^k d_{kj} = 0.$$

As mesmas expressões são estabelecidas para os momentos p_r , canonicamente conjugados às coordenadas q_r , e assim para toda variável dinâmica do tipo $f(q_r, p_r)$.

Em resumo, dado um grupo de Lie caracterizado pelas relações estabelecidas pela Eq.(7), a *representação canônica* de sua álgebra de Lie será prescrita pela Eq.(17). De outro modo, procurar-se-á um conjunto de funções A_i , no espaço de fase satisfazendo o parêntesis de Poisson dados na Eq.(17). De um ponto de vista de construção de uma teoria mecânica, podemos então, explorar as representações canônicas de modo similar aos procedimentos de representações de simetrias de Lie desenvolvidos no âmbito da teoria quântica de campos. Observe que, desse modo, tratamos das quantidades conservadas da teoria via os invariantes de Casimir do grupo de simetria considerado, e não através o teorema de Nöther, a expressão local para as simetrias do sistema, e que requer para tanto a existência de um formalismo Lagrangiano. Na próxima seção exploraremos, na perspectiva aqui delineada, dois exemplos de representações canônicas: o grupo de rotação e o grupo de Poincaré.

IV Exemplos de Representações Canônicas

IV.1 Grupo de Rotações e Spin Clássico

A álgebra de Lie do grupo de rotação é dada pela relação

$$l_i \diamond l_j = \epsilon_{ijk} l_k, \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (18)$$

onde ϵ_{ijk} é o tensor antissimétrico de Levi-Civita, e a soma nos índices gregos está subentendida. Uma representação do grupo de rotação no espaço de fase é dada por

$$l_i \mapsto L_i = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} q_j p_k, \quad (19)$$

$$a \diamond b \mapsto \{A, B\} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right). \quad (20)$$

com A e B sendo duas funções do espaço de fase Γ^6 . Assim temos o conhecido resultado

$$\{L_i, L_j\} = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} L_k.$$

Podemos verificar que um invariante de Casimir desta álgebra é $\mathbf{L}^2 = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L}$, o momentum angular orbital de uma partícula clássica. Uma generalização importante dos resultados acima, mas não tão conhecida, é dada via a seguinte representação do parêntesis de Poisson

$$\{A, B\} = \{A, B\}_{(pq)} + \{A, B\}_S \quad (21)$$

onde

$$\{A, B\}_S = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \frac{\partial A}{\partial S_i} \frac{\partial B}{\partial S_j} S_k, \quad (22)$$

e $\{A, B\}_{(pq)}$ é dado pela Eq.(20). Note que enquanto um produto de Lie com derivação, o parêntesis dado pela Eq.(22) satisfaz as propriedades de antisimetia, identidade de Jacobi e a regra de Leibniz, fato este que pode ser verificado por um cálculo direto.

Uma outra representação do grupo de rotação, Eq.(18), é dada por

$$l_i \mapsto J_i = L_i + S_i,$$

tal que

$$\{J_i, J_j\} = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} J_k.$$

Assim \mathbf{J} é um forte candidato para descrever o momentum angular total do sistema e \mathbf{S} o spin do sistema clássico[65]. De fato vejamos um exemplo. Primeiro, observemos que considerando uma transformação canônica do tipo dado pela Eq.(15), tomando o parâmetro τ como sendo o tempo, denotando $A \equiv H$ o gerador de evolução temporal, e usando o parêntesis definido pela Eq.(21), podemos escrever as equações de Hamilton para as três variáveis (q_i, p_i, S_i) ,

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\}, \quad (23)$$

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\}, \quad (24)$$

$$\dot{S}_i = \{S_i, H\}. \quad (25)$$

Como caso particular, considere o movimento de uma partícula com carga e e momento magnético

$$\frac{ge}{2mc} \mathbf{S}$$

em um campo eletromagnético não homogêneo, descrito pelo Hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2m} \left| \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right|^2 + e\phi - \frac{ge}{2mc} \mathbf{S} \cdot \mathbf{B}.$$

As equações de Hamilton, dadas pelas Eqs. (23)-(25), conduzem assim ao conhecido resultado[16]

$$m \dot{\mathbf{q}} = e[\mathbf{E} + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{q}} \times \mathbf{B}] + \frac{ge}{2mc} \nabla(\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}),$$

e

$$\dot{\mathbf{S}} = -\frac{ge}{2mc} (\mathbf{S} \times \mathbf{B}).$$

Devemos salientar que, assim como na teoria quântica não relativística, o conceito de spin clássico aqui introduzido é consequência do tipo de representação estudada para o grupo de rotações, um subgrupo do grupo de Galilei, não sendo portanto

uma característica intrínseca da teoria quântica relativística[64, 65]. Este resultado aponta para a perspectiva de construção de uma teoria clássica equivalente a uma teoria de Yang-Mills. Isto será explorado a seguir.

IV.2 Grupo de Poincaré

Desenvolveremos nesta seção alguns aspectos de representações canônicas da álgebra de Lie do Grupo de Poincaré, ou seja, representações do grupo de Lorentz não-homogêneo restrito, (\mathcal{P}_+^\uparrow) . Primeiro, precisamos introduzir o conceito de espaço de fase relativístico, que nada mais é do que o par (q^μ, p^μ) , com $\mu = 0, 1, 2, 3$,

adotando como métrica $-g^{00} = g^{11} = g^{22} = g^{33} = 1$ e $g^{\mu\nu} = 0$ ($\mu \neq \nu$), tal que o parêntesis de Poisson é definido por[66, 67]

$$\{A, B\} = g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial A}{\partial q^\mu} \frac{\partial B}{\partial p^\nu} - \frac{\partial A}{\partial p^\mu} \frac{\partial B}{\partial q^\nu} \right). \quad (26)$$

Com o fito de construir uma representação canônica da álgebra de Lie do grupo de Poincaré, devemos encontrar um conjunto de geradores associados a rotações, $M^{\mu\nu}$, e a translações, P^μ , no espaço de Minkowski, satisfazendo as seguintes relações

$$\{P^\nu, P^\mu\} = 0, \quad (27)$$

$$\{M^{\mu\nu}, P^\gamma\} = g^{\gamma\mu} P^\nu - g^{\gamma\nu} P^\mu, \quad (28)$$

$$\{M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}\} = g^{\mu\sigma} M^{\nu\rho} + g^{\nu\rho} M^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma} M^{\mu\rho}. \quad (29)$$

Uma solução particular deste sistema de equações é encontrada seguindo a prescrição geral das representações canônicas dada na seção III, isto é, a partir do seguinte resultado para as variáveis canonicamente conjugadas p e q ,

$$\begin{aligned} \{q^\mu, q^\nu\} &= \{p^\nu, p^\mu\} = 0, \\ \{p^\nu, q^\mu\} &= g^{\nu\mu}, \end{aligned}$$

dedutível diretamente a partir da Eq.(26). Assim, temos como uma possível solução,

$$\begin{aligned} P^\nu &= p^\nu, \\ M^{\mu\nu} &= q^\mu p^\nu - q^\nu p^\mu. \end{aligned}$$

Uma solução mais geral pode ser encontrada buscando-se os invariantes da álgebra dada pelas Eqs.(27)–(29). Como no caso das representações unitárias temos dois invariantes. Um deles é dado por

$$\Pi = P^\mu P_\mu. \quad (30)$$

Para encontrar o outro invariante, introduzimos o tensor de Pauli-Lubanski clássico, isto é,

$$w_\sigma = \frac{1}{2} \epsilon_{\sigma\mu\nu\lambda} M^{\mu\nu} P^\lambda,$$

onde $\epsilon_{\sigma\mu\nu\lambda}$ é o pseudotensor de Ricci. Logo, podemos mostrar que

$$W = w^\mu w_\mu \quad (31)$$

é um invariante.

IV.3 Partícula Livre Relativística

Um resultado importante nesta formulação é que o conceito de partícula clássica aparece de modo transparente como resultado da análise de simetrias. De fato, considerando

$$\begin{aligned} q &= (q^0, \mathbf{q}), \quad q^0 = t, \quad (c = 1) \\ p &= (p^0, \mathbf{p}), \quad p^0 = E = m, \end{aligned}$$

temos, em termos de componentes,

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \{\mathbf{q}, m\} = \frac{\mathbf{p}}{m}, \\ \mathbf{p} &= \{\mathbf{p}, m\} = 0, \\ \mathbf{M} &= \{\mathbf{M}, m\} = \{\mathbf{q} \times \mathbf{p}, m\} = 0. \end{aligned}$$

Assim, a massa m desempenha o papel de Hamiltoniano para a partícula livre. O processo de quantização torna-se uma questão de busca de representações unitárias de tal formalismo num espaço de Hilbert, o que se torna interessante principalmente para sistemas com graus internos de liberdade.

IV.4 Isospin Clássico

Para incluir graus internos de liberdade vamos generalizar o parêntesis de Poisson relativístico seguindo de perto o caso não relativístico, isto é, vamos definir

$$\{A, B\} = \{A, B\}_{(pq)} + \{A, B\}_s \quad (32)$$

onde

$$\{A, B\}_S = \epsilon_{ijk} \frac{\partial A}{\partial I_i} \frac{\partial B}{\partial I_j} I^k, \quad (33)$$

com I_i ($i = 1, 2, 3$) descrevendo graus internos de liberdade, como isospin, e $\{A, B\}_{(pq)}$ dado pela Eq.(26). A equação de movimento para este caso pode ser escrita como[16]

$$\frac{df}{d\tau} = \{f, H\}, \quad (34)$$

onde $f = f(q, p, I)$, e $H = H(q, p, I)$ é o gerador de evolução temporal definido a partir do tempo próprio τ . Como caso particular, considere

$$H = \frac{1}{2m} \Pi^\mu \Pi_\mu; \quad \Pi^\mu = p^\mu - g A_i^\mu I^i,$$

onde I^a é o isospin de uma partícula movendo-se em um campo F de calibre $su(2)$ dado a partir do potencial A_ν^a por

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + g \epsilon_{ijk} A_\mu^j A_\nu^k,$$

e satisfazendo a equação

$$\partial_\mu F_i^{\mu\nu} + g \epsilon_{ijk} A_\mu^j F^{\mu\nu k} = -j_i^\mu.$$

Desse modo, as equações canônicas são dadas, a partir da Eq.(34), por

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 q^\mu}{d\tau^2} &= g(\mathbf{F}^{\mu\nu} \cdot \mathbf{I}) \frac{dq_\nu}{d\tau} \\ \frac{d\mathbf{I}}{d\tau} &= g(\mathbf{I} \times \mathbf{A}^\nu) \frac{dq_\nu}{d\tau}. \end{aligned}$$

Estas equações foram primeiro propostas por Wong[68] e constituem a generalização para o caso clássico não abeliano ($su(2)$) da equação de Lorentz descrevendo o movimento de uma partícula carregada interagindo com o campo eletromagnético.

Notemos que o conceito de isospin como inicialmente proposto para descrever dois estados diferentes do nucleon (o próton e o neutron, formando um dubleto), poderia encontrar aqui um correspondente clássico através dos graus de liberdade dados por \mathbf{I} , enquanto uma representação do grupo de rotação e independente de variáveis dinâmicas q e p . Entretanto, o resultado apresentado, cabe frisar, é o correspondente clássico da teoria original de Yang-Mills, que pretendia descrever isospin como um campo de calibre (uma interessante revisão das idéias e história das teorias de calibre pode ser encontrada na Ref.[69]).

Para finalizar esta seção, vale ainda ressaltar que um análogo clássico de uma teoria de calibre geral pode ser implementada pela definição de um parêntesis como o dado pela Eq.(22), mas com ϵ_{ijk} substituído por f_{ijk} , as constantes de estruturas do $su(n)$. Isto tem sido de particular interesse na proposição de equações clássicas de transporte, supostamente descrevendo um plasma de quarks e gluons no caso do $su(3)$ [30, 31].

V Representações Unitárias no Espaço de Fase

Podemos introduzir a noção de espaço de Hilbert associado ao espaço de fase (Γ) relativístico, considerando o conjunto de funções complexas de quadrado integrável, $\theta(p, q)$ em Γ , tal que[70]

$$\int d^4 q d^4 p \theta^*(p, q) \theta(p, q) < \infty$$

é uma forma bilinear real. Neste caso, podemos escrever $\theta(p, q) = \langle p, q | \theta \rangle$, com

$$\int d^4 q d^4 p |p, q\rangle \langle p, q| = 1,$$

tal que

$$\langle \psi | \theta \rangle = \int d^4 q d^4 p \psi^*(p, q) \theta(p, q);$$

sendo $\langle \theta |$ um vetor dual de $|\theta\rangle$. Vamos denominar este espaço de Hilbert por $\mathcal{H}(\Gamma)$. Generalizando o caso não relativístico[71], podemos introduzir dois tipos de operadores Hermitianos em $\mathcal{H}(\Gamma)$. Considerando uma função $f(q, p)$, temos

$$\begin{aligned} f(q, p) &\mapsto \bar{f}(q, p), \\ f(q, p) &\mapsto \hat{f}(q, p), \end{aligned}$$

tal que

$$\begin{aligned} \bar{f}(q, p) \theta(p, q) &= f(q, p) \theta(p, q), \\ \hat{f}(q, p) \theta(p, q) &= i \{f(q, p), \theta(p, q)\}. \end{aligned}$$

Os operadores básicos são então dados por

$$\begin{aligned} \bar{p}^\mu &= \bar{1}.p^\mu, & \bar{q}^\mu &= \bar{1}.q^\mu, \\ \hat{p}^\mu &= -i \frac{\partial}{\partial q_\mu}, & \hat{q}^\mu &= i \frac{\partial}{\partial p_\mu}. \end{aligned}$$

Desse modo, podemos introduzir os operadores

$$\begin{aligned} \bar{M}^{\mu\nu} &= \bar{q}^\mu \bar{p}^\nu - \bar{q}^\nu \bar{p}^\mu, \\ \hat{M}^{\mu\nu} &= i \{M^{\mu\nu}, \} \end{aligned}$$

de tal maneira a construir uma representação da álgebra de Lie do grupo de Poincaré dada por

$$[\hat{M}^{\mu\nu}, \hat{M}^{\rho\sigma}] = i(g^{\mu\sigma} \hat{M}^{\nu\rho} + g^{\nu\rho} \hat{M}^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} \hat{M}^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma} \hat{M}^{\mu\rho}), \quad (35)$$

$$[\hat{M}^{\mu\nu}, \hat{P}^\gamma] = i(g^{\gamma\mu} \hat{P}^\nu - g^{\gamma\nu} \hat{P}^\mu), \quad (36)$$

$$[\hat{P}^\nu, \hat{P}^\mu] = 0, \quad (37)$$

com as relações de condição

$$[\widehat{M}^{\mu\nu}, \overline{M}^{\rho\sigma}] = i(g^{\mu\sigma}\overline{M}^{\nu\rho} + g^{\nu\rho}\overline{M}^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}\overline{M}^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}\overline{M}^{\mu\rho}), \quad (38)$$

$$[\widehat{M}^{\mu\nu}, \overline{P}^\gamma] = i(g^{\gamma\mu}\overline{P}^\nu - g^{\gamma\nu}\overline{P}^\mu), \quad (39)$$

$$[\widehat{P}^\nu, \overline{P}^\mu] = 0, \quad (40)$$

e

$$[\overline{M}^{\mu\nu}, \overline{M}^{\rho\sigma}] = 0 \quad (41)$$

$$[\overline{M}^{\mu\nu}, \overline{P}^\gamma] = 0 \quad (42)$$

$$[\overline{P}^\nu, \overline{P}^\mu] = 0. \quad (43)$$

As Eqs.(41)-(43) mostram que operadores do tipo \overline{O} podem ser utilizados como observáveis clássicos, uma vez que os mesmos comutam entre si. Operadores do tipo \widehat{O} descrevem as simetrias de Poincaré através das Eqs.(35)-(37), e as Eqs.(38)-(40) descrevem, então, o modo como os geradores de simetria modificam os observáveis físicos. De fato observe que, por exemplo,

$$\begin{aligned} \exp(-ia_\mu \widehat{P}^\mu) \overline{Q}_\nu \exp(ia_\mu \widehat{P}^\mu) &= \overline{Q}_\nu + \overline{1}a_\mu, \\ \exp(-ia_\mu \widehat{P}^\mu) \overline{P}_\nu \exp(ia_\mu \widehat{P}^\mu) &= \overline{P}_\nu, \end{aligned}$$

tornando transparente o fato que \overline{Q}_ν se transforma como um 4-vetor coordenada, e \overline{P}_ν como 4-momentum.

Uma equação escalar de movimento pode ser obtida através do invariante de Casimir

$$C = ip^\mu \frac{\partial}{\partial q^\mu}.$$

De fato, escolhendo a representação na qual $C = 0$, segue

$$p^\mu \frac{\partial}{\partial q^\mu} \theta(p, q) = 0. \quad (44)$$

Uma interpretação física deste formalismo é obtida se considerarmos $\theta(p, q)$ como uma amplitude de probabilidade no espaço de fase, de tal forma que a densidade de probabilidade de se encontrar uma partícula no ponto (q, p) é dada por $f(p, q) = |\theta(p, q)|^2$. É fácil verificar então que $f(p, q)$ satisfaz a Eq.(44), que assim nada mais é do que uma equação de Liouville para uma partícula livre, ou uma equação de transporte sem termo de colisão. Neste contexto, o valor médio de um observável $A(p, q)$ pode ser definido por

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \langle \theta | A | \theta \rangle \\ &= \int d^4q d^4p \delta(p^2 - mc^2) \theta^*(p, q) A(p, q) \theta(p, q). \end{aligned} \quad (45)$$

Se $A(p, q)$ for um operador multiplicativo, do tipo $A(p, q) = \overline{a}(p, q)$, tal que $\overline{a}(p, q)\theta(p, q) = a(p, q)\theta(p, q)$, então a Eq.(45) se reduz a média usual da teoria cinética, isto é

$$\langle A \rangle = \int d^4q d^4p f(p, q) A(p, q).$$

Desse modo, a compatibilidade com a teoria cinética usual é deduzida.

Em particular, o tensor energia-momentum pode ser definido como

$$T^{\mu\nu}(q) = \int d^4p \delta(p^2 - mc^2) \theta^*(p, q) \overline{p}^\mu \overline{p}^\nu \theta(p, q) \quad (46)$$

$$= \int \frac{d^3p}{p^0} p^\mu p^\nu f(p, q); \quad (47)$$

tal que

$$T^{00}(q) = \int d^3p p^0 f(p, q),$$

é o valor médio da energia por partícula;

$$T^{i0}(q) = \int d^3p p^i f(p, q),$$

é a média do momentum por partícula; e

$$T^{ij}(q) = \int d^3p p^i p^j f(p, q),$$

é o tensor de pressão indicando o fluxo na direção do campo de velocidade u^j . Neste formalismo outras quantidades, que não as usuais, podem ser introduzidas. Um exemplo é o tensor

$$T(q) = \int d^4p \delta(p^2 - mc^2) \theta^*(p, q) \widehat{p}^\mu \widehat{p}^\nu \theta(p, q).$$

O método aqui apresentado constitui uma generalização relativística da formulação da Mecânica Estatística Clássica de Schemberg[13], o que, por sua vez pode ser visto como uma versão clássica do formalismo de teoria de campos a temperatura finita conhecido por Dinâmica de Campos Térmicos[71, 72, 73]. Uma vantagem aqui sobre os usuais métodos, é que a teoria cinética aparece naturalmente covariante como consequência do estudo de uma representação unitária do grupo de Poincaré, introduzida sobre o espaço de fase. Outro adicional é que podemos utilizar a noção de indistinguibilidade de partículas, associadas às amplitudes $\theta(p, q)$, para definir amplitudes de transição e assim proceder com a dedução de termos de colisão na Eq.(44). Tais desenvolvimentos fogem aos propósitos deste trabalho, e podem ser encontrados em lugar[70].

VI Conclusões

Neste trabalho desenvolvemos o conceito de representação canônica como introduzido por Dirac, enfatizando recentes desenvolvimentos nesta área. Inicialmente, buscando uma apresentação pedagógica, descrevemos alguns elementos biográficos sobre Dirac, concentrando em seu particular enfoque sobre a estrutura da Mecânica Clássica e os processos de quantização, que deram origem à quantização geométrica. Na seqüência desenvolvemos o conceito de representação de grupos de Lie via a estrutura de parêntesis de Poisson: as representações canônicas.

Como exemplo, o grupo de rotação foi estudado e um modelo de partícula clássica com momento magnético num campo eletromagnético não homogêneo foi desenvolvido.

Representações canônicas do grupo de Poincaré foram estabelecidas, visando dois propósitos: (i) mostrar que o conceito de partícula clássica relativística pode ser introduzido sem necessidade de limite quântico, e (ii) introduzir a equação de Wong, que descreve isospins clássicos, via grupos de simetria.

Por último, desenvolvemos o conceito de representações unitárias no espaço de fase relativístico, em conexão com a noção de representação canônica, explorando o grupo de Poincaré. Tal método conduz a uma teoria cinética relativística consistente e naturalmente covariante, onde a noção de estado é descrita por funções de onda no espaço de fase. Este resultado, representa, então, a generalização para o caso relativístico da formulação da Mecânica Estatística Clássica como proposta por Schemberg[13], a qual é baseada numa teoria de campos no espaço de fase[74].

Agradecimentos : Os autores são gratos à A. Matos Neto, M. C. B. Fernandes, M.C. B. Andrade, F. C. Khanna, T. M. Rocha Filho, L. A. C. Malbouisson e J. Caetano da Silva pelas discussões estimulantes; à M. Graça R. Martins pela leitura do manuscrito e sugestões; ao Árbitro pelos comentários e sugestões; à CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro.

References

- [1] B. L. van der Waerden, *A History of Algebra: From al-Khwarizmi to Emmy Noether* (Springer-Verlag, N. York, 1989).
- [2] P. J. Olver, *Applications of Lie Groups to Differential Equation* (Springer-Verlag, N. York, 1986).
- [3] E. P. Wigner, *Ann. Math.* **40** (1939) 149.
- [4] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, vol I e II (Cambridge Univ. Press, N. York, 1996).
- [5] P. A. M. Dirac, *Rev. Mod. Phys.* **21** (1949) 392.

- [6] A motivação de Dirac para este trabalho de 1949 reflete sua posição ante os rumos da física na época: “*The existing theories of the interaction of elementary particles and field are all unsatisfactory in one way or another. The imperfections may well arise from the use of wrong dynamical systems to represent atomic phenomena, i.e., wrong Hamiltonians and wrong interaction energies. It thus becomes a matter of great importance to set up new dynamical systems and see if they will better describe the atomic world...*” [5]. Um outro aspecto é digno de nota: o artigo não possui referências, o que revela certo estilo de Dirac em trabalhar sozinho, assim como originalidade e pioneirismo.
- [7] A. Loinger, *Ann. Phys. (NY)* **20** (1962) 132.
- [8] A. Loinger, *Ann. Phys. (NY)* **23** (1963) 23.
- [9] P. Gulmanelli, *Phys. Lett.* **5** (1963) 320.
- [10] G. Lugarini e M. Pauri, *Ann. Phys. (NY)* **38** (1966) 299.
- [11] G. Lugarini e M. Pauri, *Ann. Phys. (NY)* **44** (1967) 266.
- [12] B. O Koopman, *Proc. Natl. Acad. Sci. (USA)* **17** (1931) 315.
- [13] M. Schemberg, *N. Cimento* **10** (1953) 419.
- [14] M. Pauri, *J. Math. Phys.* **7** (1966) 366.
- [15] E. C. G. Sudarshan e N. Mukunda, *Classical Dynamics: A modern Perspective* (John Wiley, N. York, 1974).
- [16] Th. W. Ruijgrok e van der Vlist, *Physica A* **101** (1980) 571.
- [17] M. V. Atre e N. Mukunda, *J. Math. Phys.* **27** (1986) 2908.
- [18] M. V. Atre e N. Mukunda, *J. Math. Phys.* **28** (1987) 792.
- [19] S. K. Soni, *J. Phys. A: Math. Gen.* **25** (1992) L837.
- [20] H. Q. Plácido e A. E. Santana, *Hadronic J.* **18** (1995) 319.
- [21] R. Muradian e A. E. Santana, *Theor. Math. Phys.* **114** (1998) 67.
- [22] I. Bialynicki-Birula e Z. Iwinski, *Rep. Math. Phys.* **4** (1973) 139.
- [23] L. P. Horwitz, W. C. Schieve e C. Piron, *Ann. Phys.* **137** (1981) 306.
- [24] L. Burakovski e L. P. Horwitz, *Found. Phys.* **25** (1995) 1335.
- [25] F. Jüttner, *Ann. Phys. Chem.* **34** (1911) 856.
- [26] F. Jüttner, *Z. Phys.* **47** (1928) 542.
- [27] A. Lichnerowicz e R. Marrot, *Compt. Rend. Acad. Sci (Paris)* **210** (1940) 759.
- [28] S. de Groot, W. A. van Leeuwen e C. G. van Weert, *Relativistic Kinetic Theory - Principles and Applications* (North Holland, N. York, 1980).
- [29] P. Zhuang e U. Heinz, *Phys. Rev. D* **57** (1998) 6525.
- [30] U. Heinz, *Ann. Phys. (NY)* **161** (1985) 48.
- [31] D. K. Srivastava et al, *Ann. Phys.* **228** (1993) 104.
- [32] G. C. Nayak e V. Ravishankar, *Phys. Rev D.* **55** (1996) 6877.

- [33] P. Zhuang e U. Heinz, *Ann. Phys. (NY)* **245** (1996) 311.
- [34] D. I. Olive, Rabinovici e Schwimmer, *Phys. Lett. B* **321** (1994) 361.
- [35] M. Puta, *Hamiltonian Mechanical Systems and Geometric Quantization: Mathematic and its Applications* (Kluwer, Dordrecht, 1993).
- [36] M. de León, J. C. Marrero e E. Padron, *J. Math. Phys.* **38** (1997) 6185.
- [37] J. M. Soriau, *Structure des Systèmes Dynamiques* (Dunod, Paris, 1970).
- [38] B. Konstant, *Quantization and Unitary Representations*, *Lect. Notes in Math.* 170 (Springer-Verlag, Berlin, 1970) pp. 87.
- [39] J. Huebschmann e J. Angew. Math. **408** (1990) 57.
- [40] I. Vaisman, *J. Math. Phys.* **32** (1991) 3339.
- [41] R. Abraham e J. E. Marsden, *Foundations of Mechanics* (Addison-Wesley, N. York, 1977).
- [42] R. Aldrovandi e J. G. Pereira, *An Introduction to Geometrical Physics* (W. Sci., Singapura, 1995).
- [43] A. Ribeiro Filho, D. R. Tilley e B. Zeks, *Phys. Lett. A* **100** (1984) 247.
- [44] G. C. Sherry, *Int. J. Theor. Phys.* **29** (1990) 1115.
- [45] K. C. Mundim, P. Pitanga e A. Ribeiro Filho, *Phys. Stat. Sol. B* **179** (1993) 53.
- [46] P. Pitanga, A. Ribeiro Filho e K. C. Mundim, *Phys. Stat. Sol. B* **183** (1994) 103.
- [47] P. Pitanga, K. C. Mundim e A. Ribeiro Filho, *Phys. Stat. Sol. B* **197** (1996) 517.
- [48] A. Simoni, *J. Math. Phys.* **36** (1995) 5588.
- [49] H. S. Kragh, *Dirac: a Scientific Biography* (Cambridge Univ. Press, N. York, 1990).
- [50] B. N. Kursunoglu and E. P. Wigner - Ed., *Reminiscences About a Great Physicist: Paul Adrien Maurice Dirac* (Cambridge Univ. Press, N. York, 1990).
- [51] A. Pais, M. Jacob, D. I. Olive e M. F. Atiyah, *Paul Dirac - The man and his work* (Cambridge Univ. Press, N. York, 1998).
- [52] M. Kamran, *Dirac - The Taciturn Genius*, IC/1989/265, ICTP-Trieste, Itália.
- [53] B. J. Mass, *Rev. Bras. Ens. Fis.* **5** (1983) 89.
- [54] B. M. Medvedev e D. V. Shirkov, *Sov. Phys. Usp.* **30** (1987) 791.
- [55] Não obstante a fama e o prestígio, Dirac, apontado como o mais notável físico Inglês, depois de Newton, não foi laureado com o famoso (e usual, para personalidades britânicas de tal porte) título de *Sir*. A justificativa talvez esteja na aproximação de Dirac com os físicos soviéticos. De fato, de 1928 a 1937 Dirac visitou a URSS durante oito vezes. Esta aproximação, aparentemente, custou-lhe ter o visto negado para entrada nos EUA em 1954-55 (período em que vigorava o chamado Marcatismo). A solicitação do visto, seria para atender convite de visita do Instituto de Estudos Avançados de Princeton[52].
- [56] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. London A* **109** (1925) 642.
- [57] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. London A* **114** (1927) 243.
- [58] P. A. M. Dirac, *Phys. Zeitschr.* **29** (1928) 561.
- [59] W. Heisenberg, *Z. Phys.* **33** (1925) 879.
- [60] M. Born, W. Heisenberg e P. Jordan, *Z. Physik* **35** (1926) 557.
- [61] P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics* (4th ed. Oxford Press, Oxford, 1978).
- [62] L. van Hove, *Acad. Roy. Belg. Cl. Sci. Mem. Call.* **26** (1951) 102.
- [63] Cabe ressaltar que, neste ponto, estamos tratando do caráter de definição da representação, seguindo de perto as referências [5], [14] e [15], as quais podem também ser consultadas pelo leitor interessado na questão da existência da representação.
- [64] Sobre representações do grupo de Galilei ver A. E. Santana, *Rev. Bras. Ens. Fis.* **19** (1997) 113 e referencias citadas.
- [65] Salvo melhor conhecimento, o primeiro trabalho introduzindo a noção de spin em Mecânica Clássica foi realizado por M. Schemberg, *Princípios da Mecânica: Tese de Cátedra* (edição de Carlos Santigo, IF-USP, São Paulo, 1996).
- [66] H. Bacry, *Lectures on Group Theory and Particle Theory* (Gordan & Breach, N. York, 1977)
- [67] P. Bracken, *Int. J. Theor. Phys.* **37** (1997) 1625.
- [68] S. K. Wong, *N. Cimento A* **65** (1970) 689.
- [69] R. Mills, *Am. J. Phys.* **57** (1989) 493.
- [70] M. C. B. Andrade, A. E. Santana e J. D. M. Vianna, *Poincaré-Lie algebra and relativistic phase space*, a aparecer.
- [71] A. E. Santana, A. Matos Neto e J. D. M. Vianna, *Rev. Bras. Fis.* **14** (1992) 72.
- [72] A. E. Santana, F. C. Khanna, H. Chu e Y. C. Chang, *Ann. Phys. (NY)* **249** (1996) 481.
- [73] L. M. da Silva, A. E. Santana e J. D. M. Vianna, *Braz. J. Phys.* **27** (1997) 619.
- [74] A. Matos Neto e J. D. V. Vianna, *N. Cimento B* **86** (1985) 117.