

As Distribuições de Lévy*

Lévy Distributions

Constantino Tsallis

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Rua Xavier Sigaud, 150

2290-180. Rio de Janeiro

E-mail: tsallis@cat.cbpf.br

Recebido em 26 de Junho, 2000

Muitos processos naturais seguem as distribuições de Lévy: da dinâmica de uma torneira gotejante ao comportamento de albatrozes errantes à procura de alimento. Por que essas distribuições são tão comuns e como podem ser usadas para prever o comportamento de sistemas físicos?

Many natural processes follow Lévy distributions, from the dynamics of a leaking tap to the foraging behaviour of wandering albatrosses. Why are they so common and how can they be used to predict the behaviour of physical systems?

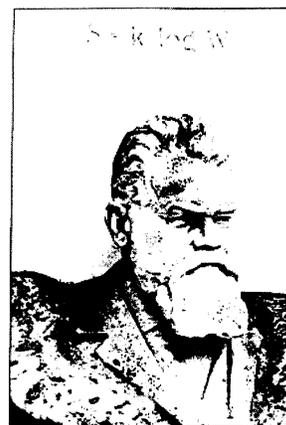
I Introdução

Alguns fenômenos naturais são fáceis de serem observados, enquanto outros são mensuráveis somente sob condições muito peculiares. Isto não nos diz muito sobre a importância de cada tipo de fenômeno, mas nos indica quão freqüentemente eles ocorrem: o primeiro tipo tende a ser comum, enquanto o segundo acontece raramente. Essas idéias ajudam a explicar porque há tantas distribuições gaussianas na natureza. Fenômenos tão diversos como a variação de altura das pessoas, a concentração de melanina na pele em um dado grupo humano e as intensidades de vários sons naturais seguem todos essa mesma lei estatística simples.

Uma das distribuições gaussianas mais importantes na física descreve o movimento térmico de átomos e moléculas. As partículas se deslocam através de pequenas distâncias antes de se chocarem umas com as outras, levando a um movimento aleatório que resulta na difusão “normal”. Esse processo explica porque uma colher de açúcar adoça toda uma xícara de café e porque o perfume usado por uma pessoa preenche um compartimento fechado.

Contudo, se a xícara de café fosse agitada energeticamente, turbulência poderia ocorrer e o açúcar se dispersaria mais rapidamente; nesse caso, o movimento da partícula não poderia mais ser descrito em termos de uma distribuição gaussiana. Evidências recentes, provenientes de experimentos feitos em alguns

fluidos específicos, sugerem que o movimento pode, ao contrário, seguir uma distribuição que foi introduzida, em 1937, pelo matemático francês Paul Lévy. O trabalho pioneiro de Benoit Mandelbrot mostrou que tais distribuições de Lévy são comuns na natureza - elas descrevem, por exemplo, a maneira pela qual albatrozes buscam por alimento, as flutuações nos preços do mercado ou os ritmos do coração.



Túmulo de Boltzmann no Cemitério Central de Viena.

*Este artigo é uma tradução, com ligeiras modificações, de texto publicado na revista Physics World, Julho de 1997, pp. 42 - 45, e na Japanese Physics Magazine “Parity” vol. 13, pp. 23 - 28, 1998. Tradução de Ildeu de Castro Moreira.

As estatísticas da difusão normal são bem entendidas e são rotineiramente usadas para prever várias propriedades macroscópicas de conjuntos de átomos e moléculas. A estrutura básica equivalente para as distribuições de Lévy foi desenvolvida somente recentemente, e sua capacidade preditiva está sendo testada no momento. Para ver como isto pode ser conseguido, precisamos entender inicialmente a estatística mais simples da difusão normal.

II Movimento molecular

Em 1828, Robert Brown estudou o movimento de grãos de pólen em uma célula fluida, fornecendo evidência forte de que o movimento térmico de moléculas é aleatório. Contudo, foi só em 1905 que Einstein apresentou uma base teórica para o movimento browniano. Ele descreveu o movimento de partículas individuais usando a estatística de Boltzmann- Gibbs, que havia sido recentemente formulada, e mostrou que as propriedades macroscópicas de difusão seguem uma distribuição gaussiana (Fig. 1a).

Para entender isto, reproduziremos essencialmente os argumentos de Einstein, usando agora uma linguagem da teoria de informação. Por simplicidade, imagine que a difusão ocorre em uma dimensão. A probabilidade de uma partícula realizar um único salto de dimensão x é descrita então por uma distribuição $p(x)$. Boltzmann mostrou que descrições microscópicas como essa podem ser conectadas ao mundo macroscópico por meio de sua entropia S (veja Boxe 1). Esta entropia é, em essência, uma medida da incerteza na posição da partícula, e sempre tende para um máximo, para um sistema que se aproxima do equilíbrio térmico.

O problema reduz-se então a maximizar a entropia,

$$S = - \int p(x) \ln[p(x)] dx$$

sujeita a dois vínculos. Primeiro, as probabilidades adicionam-se dando a unidade:

$$\int p(x) dx = 1.$$

Segundo, os saltos são usualmente muito pequenos, de modo que a partícula move-se sempre para uma posição próxima. Isso significa que a variância de $p(x)$, que caracteriza a largura da distribuição, deve ser finita. Para qualquer distribuição a variância, σ^2 , é o valor esperado de x^2 e é dada por

$$\langle x^2 \rangle = \int x^2 p(x) dx.$$

A técnica conhecida como cálculo das variações fornece a distribuição $p(x)$ que maximiza a entropia sujeita a esses dois vínculos. O resultado é a distribuição gaussiana

$$p(x) = (1/\pi kT)^{1/2} \exp[-x^2/kT],$$

onde k é a constante de Boltzmann, T a temperatura e $kT = 2\sigma^2$. Essa distribuição corresponde a um salto único mas, como estamos interessados no comportamento observável, necessitamos para isso da distribuição associada com muitos saltos.

Graças à estatística gaussiana, a distribuição para N saltos tem a mesma forma daquela referente a um único salto:

$$p(x; N) = (1/\pi NkT)^{1/2} \exp[-x^2/kNT].$$

Este resultado nos permite calcular várias propriedades macroscópicas do sistema. Por exemplo, achamos que $\langle x^2 \rangle$ é proporcional a Tt , onde t é o tempo transcorrido. Isso é essencialmente a lei de Fick, a característica básica do movimento browniano, que Einstein discutiu em 1905.

Para derivar essa distribuição gaussiana, usamos essencialmente dois pilares da termodinâmica. Primeiro, que a entropia de um sistema sempre tende para um máximo - em outras palavras, supomos a validade de um "princípio variacional". Segundo, que o vínculo sobre a variância assegura, por meio do chamado teorema do limite central, que qualquer sistema com uma variância finita sempre tende para uma distribuição gaussiana. Tal distribuição é chamada um "atrator".

Lévy descobriu que outras distribuições podem ser atratores em uma escala macroscópica. A diferença é que estas distribuições de Lévy, denotadas por $L_\gamma(x)$, não decaem rapidamente para distâncias grandes. Enquanto distribuições gaussianas decaem rapidamente, distribuições de Lévy decrescem com $1/x^{1+\gamma}$, onde γ está entre 0 e 2 (Fig. 1b). Do ponto de vista da finitude do segundo momento, as gaussianas correspondem ao caso em que $\gamma = 2$.

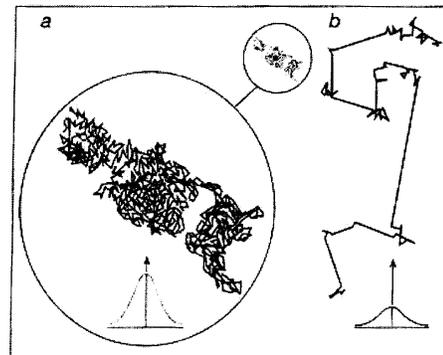


Figura 1. No movimento browniano, uma partícula faz saltos aleatórios e cada salto é geralmente pequeno. A difusão normal resultante é descrita por uma distribuição gaussiana com uma variância - que caracteriza a largura da distribuição - que é finita. Na difusão do tipo Lévy, vôos longos são intercalados com saltos mais curtos, de modo que uma região muito maior é coberta pela partícula. A variância de uma distribuição de Lévy diverge.

Isto significa que saltos muito mais longos, ou “vôos”, são possíveis para as distribuições de Lévy, o que leva a que suas variâncias diverjam. Um exemplo famoso é a distribuição de Cauchy-Lorentz, que é proporcional a $1/(c+x^2)$, onde c é uma constante positiva. Tais distribuições correspondem a $\gamma = 1$ e surgem em muitas situações físicas.

III As distribuições de Lévy na natureza

Muitos fenômenos comuns são descritos por distribuições de Lévy. Por exemplo, em 1993, C-K. Peng e colegas da Universidade de Boston, da Escola de Medicina de Harvard e do Instituto Nacional de Saúde de Bethesda, nos EUA, analisaram os intervalos de tempo entre batidas do coração. Descobriram que os padrões erráticos observados nas batidas de pessoas com coração saudável podem ser descritos por uma distribuição de Lévy com $\gamma = 1,7$, enquanto que dados de pacientes com falhas cardíacas severas estão muito mais próximos de uma distribuição gaussiana. Esta diferença poderia ajudar no entendimento dos processos fisiológicos detalhados que controlam a atividade cardíaca. Peng e seus colegas sugeriram que estes resultados poderiam surgir de uma competição não linear entre ramos do sistema nervoso involuntário.

No mesmo ano, Harry Swinney e seus colegas da Universidade do Texas estudaram o fluxo de um líquido em um recipiente girante que tinha a forma de uma máquina de lavar roupa. Este dispositivo experimental gera essencialmente um fluxo de fluido em duas dimensões. O grupo de Swinney encontrou que, em vários locais do líquido, apareciam vórtices, a marca da turbulência, Partículas traçantes foram seguidas por longos períodos de tempo e descobriu-se que alternavam entre estar em um vórtice particular e escapar para um vórtice vizinho. Os vôos entre vórtices seguiam uma distribuição de Lévy com $\gamma = 1,3$.

Em 1995, um grupo da Universidade Federal Fluminense, liderado por Paulo Murilo Castro de Oliveira e Thadeu J. P. Penna, usou métodos experimentais e numéricos para estudar uma torneira gotejante. Encontraram que os intervalos de tempo entre as gotas flutuam segundo uma distribuição de Lévy que tem um γ situado no domínio 1,66-1,85. O valor de γ derivado dos ritmos cardíacos (1,7) fica dentro deste domínio, um resultado que levou Penna a especular: “É o coração uma torneira gotejante?” Os pesquisadores argumentam que um processo hidrodinâmico comum poderia estar por trás de ambos os fenômenos.

Também em 1995 Rosario Mantegna e Gene Stanley,

da Universidade de Boston, mostraram que os mercados financeiros podem seguir também as distribuições de Lévy. Eles analisaram as variações no index *Standard and Poor's 500* da Bolsa de Nova York entre janeiro de 1984 e dezembro de 1989. A parte central da distribuição é bem descrita por $\gamma = 1,4$ e, encontrou-se, é notavelmente constante em todo o período de seis anos estudado. Esse comportamento poderia fornecer uma base para desenvolver modelos econômicos de formação de preços.

A lista das manifestações de Lévy na natureza não para por aí. Outros exemplos incluem o movimento de grupos micelares de moléculas na água salgada, estudados em 1990 por A. Ott e colaboradores da Escola Normal Superior em Paris, e o resfriamento a laser abaixo da energia de recuo de um fóton, estudado em 1994 por F. Bardou e colegas, também da Escola Normal Superior.

Em 1996, pesquisadores da Universidade de Boston e do Programa Britânico de Reconhecimento da Antártica [British Antarctic Survey] descobriram que mesmo um albatroz errante vive sua vida seguindo uma distribuição de Lévy. Quando buscam por alimentos, estas aves do mar voam longas distâncias; atuam, em seguida, em uma área pequena, para depois voarem novamente. Pesquisadores estão investigando agora se o comportamento em busca de alimentos de outras espécies, tais como formigas e abelhas, segue também as distribuições de Lévy.

IV Em busca de uma base teórica

Os exemplos acima mostram precisamente o quanto as distribuições de Lévy são comuns. Em função disso, muitas pessoas têm tentado formular uma base estatística para as distribuições de Lévy, de maneira similar ao que Einstein fez quando desenvolveu a estatística do movimento browniano. Esse problema interessou particularmente E. W. Montroll (já falecido) e Michael Shlesinger, que está agora no Departamento de Pesquisa Naval dos EUA, na Virgínia. Em 1983, eles generalizaram o método anteriormente usado para maximizar a entropia. A abordagem que utilizaram foi manter a mesma função entropia

$$S = - \int p(x) \ln[p(x)] dx,$$

mas alterar o vínculo na variância. Em princípio, isto pareceria ser um método sensato, porque sabemos que a variância da distribuição de Lévy diverge. Contudo, o vínculo que desenvolveram era muito complexo para ser

aceitável como algo a priori, e eles mesmos decidiram que era insatisfatório.

Uma maneira alternativa de atacar o problema é generalizar a função entrópica, seguindo as linhas que propus em 1988, ao invés de alterar o vínculo. Em 1995, André Souza e eu, juntamente com Silvio Levy, da Universidade de Minnesota, nos EUA, e Roger Maynard, da Universidade de Grenoble, na França, mostramos que um único parâmetro q pode ser usado para caracterizar uma forma generalizada para a entropia. A entropia torna-se, então,

$$S_q[p] = \{1 - \int [p(x)]^q dx\} / (q - 1)$$

e isto é maximizado com a imposição (vínculo) de que

$$\int x^2 [p(x)]^q dx$$

seja finito, e também com a exigência que

$$\int p(x) dx = 1.$$

Se usarmos a mesma técnica anteriormente mencionada, encontraremos que a distribuição se torna

$$p_q(x) \propto [1 - (1 - q)x^2/kT]^{1/(1-q)}.$$

Esta expressão se refere a um único salto. Ela se reduz à distribuição gaussiana para $q = 1$, e para a distribuição de Cauchy-Lorentz para $q = 2$ (Fig.2).

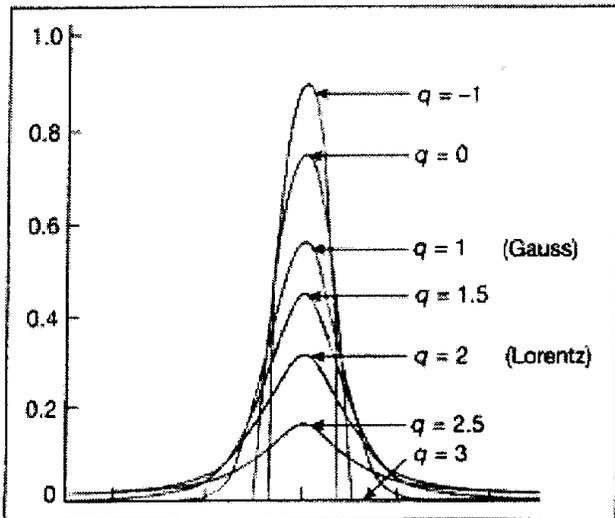


Figura 2. As distribuições generalizadas para um único salto, para vários valores de q . Depois de muitos saltos, são geradas distribuições gaussianas par $q < 5/3$ e distribuições de Lévy são produzidas para $q > 5/3$. A distribuição de Cauchy-Lorentz corresponde a $q = 2$. Para $q < 1$, as distribuições são estreitas e mostram muito pouca variabilidade.

Nesse caso geral é ligeiramente mais difícil obter a distribuição para muitos saltos, uma vez que devemos utilizar o chamado teorema do limite central generalizado

de Lévy-Gnedenko, que estende a aplicação do teorema do limite central usual para valores de q acima de $5/3$. Obtemos então distribuições de Lévy com $\gamma = (3 - q)/(q - 1)$. Para q abaixo de $5/3$, a distribuição final torna-se gaussiana após muitos saltos.

Esta abordagem generalizada coloca as distribuições de Lévy na mesma base teórica do movimento browniano [para uma reanálise recente da questão, veja a referência 7]. O método assegura que a distribuição generalizada preserva características importantes tais como estabilidade termodinâmica, com o resultado que unificamos essencialmente a estatística da difusão normal e das difusões do tipo Lévy. Isso significa que a lei de Fick e o coeficiente de difusão associado são também generalizados de forma consistente.

Como vimos, as propriedades macroscópicas de um sistema são gaussianas para $q < 5/3$ e seguem uma distribuição de Lévy para $q > 5/3$. A passagem de um regime para outro ocorre quando o coeficiente de difusão cresce para infinito (Fig. 3). Essa previsão poderia ser testada experimentalmente alterando-se os parâmetros apropriados - tais como a concentração de sal no experimento de Ott e colegas - para possibilitar a variação do valor de q .

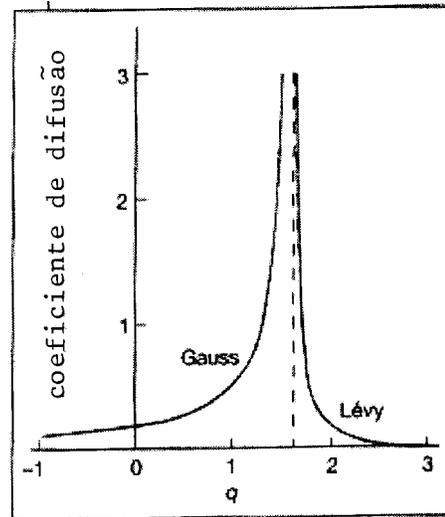


Figura 3. Os coeficientes de difusão do regime gaussiano (esquerda) e do regime de Lévy generalizado (direita) divergem em $q = 5/3$. Isto sinaliza a passagem entre os dois regimes.

Um conceito generalizado de entropia pode ser usado para analisar uma variedade de fenômenos físicos (veja Boxe 2). Mas o que isto significa no nível microscópico? Significa essencialmente que o “princípio ergódico” - que estabelece que uma partícula ocupa todos os estados de um sistema dentro de algum tempo - é violado de uma maneira não trivial. Pelo contrário,

o movimento é provavelmente fractal, em algum sentido, o que explicaria o aparecimento de muitas estruturas fractais na natureza. Muitas, se não todas, as estruturas fractais poderiam emergir por meio da criticidade auto-organizada que, por exemplo, imagina-se estar subjacente ao desenvolvimento de falhas na crosta terrestre. A marca distintiva de tais estruturas fractais são as leis de potência que caracterizam as distribuições de Lévy.

Somente o tempo dirá se estas estatísticas generalizadas provarão ser tão poderosas para prever o comportamento de alguns processos físicos como a formulação original de Einstein o foi para o movimento browniano. Na medida em que estudarmos sistemas mais exóticos, estejam eles situados bem distantes no Universo ou imersos na física da matéria condensada, com certeza as distribuições de Lévy emergirão repetidamente.

1. Boltzmann e a entropia

Entropia é um conceito fundamental da termodinâmica. O termo foi cunhado por Clausius, que forneceu alguns *insights* notáveis sobre suas propriedades. Ele disse: “A energia do Universo é constante. A entropia do Universo tende para um máximo.” Mas o significado mais profundo da entropia foi descoberto por Boltzmann, no final do século XIX. Ele se deu conta que a entropia poderia ser usada para conectar o movimento microscópico de partículas com o mundo macroscópico. A expressão de Boltzmann para a entropia é escrita agora na forma

$$S = -k \sum_{i=1}^W p_i \ln(p_i),$$

onde k é a constante de Boltzmann, W o número de estados possíveis em um sistema e p_i a probabilidade do sistema ser encontrado no estado i . Se todos os estados forem igualmente prováveis, então $p_i = 1/W$ e essa expressão se reduz a

$$S = k \ln(W),$$

fórmula esta que está esculpida no túmulo de Boltzmann. Para um número infinito de estados possíveis, a entropia pode ser expressa como uma integral,

$$S = - \int p(x) \ln[p(x)] dx.$$

As pessoas que trabalham no campo da teoria da informação têm tentado generalizar a expressão da entropia de Boltzmann,

$$S = -k \sum_{i=1}^W p_i \ln(p_i),$$

desde os anos 60. Em 1988, postulei que a expressão

$$S_q = k(1 - \sum_{i=1}^W p_i^q)/(q - 1)$$

constituía uma base possível para generalizar a termoestatística de Boltzmann-Gibbs, onde q é o índice entrópico e pode, em princípio, ser qualquer número real. Se levarmos em conta que p_i^{q-1} se aproxima de $1 + (q-1) \ln(p_i)$, no limite de $q = 1$, reobtemos a distribuição padrão que caracteriza a estatística de Boltzmann-Gibbs. Para o caso particular da equiprobabilidade, a fórmula de Boltzmann,

$$S = k \ln(W),$$

se generaliza em

$$S_q = k(W^{1-q} - 1)/(1 - q).$$

2. Uma forma geral de entropia

Um resultado interessante da teoria se refere ao efeito de considerarmos dois sistemas independentes, A e B , em conjunto. Para a termoestatística usual, encontramos que a entropia do sistema combinado é simplesmente a soma das entropias individuais. Contudo, para o caso generalizado (tomando $k = 1$), encontramos que

$$S_q(A + B) = S_q(A) + S_q(B) + (1 - q)S_q(A)S_q(B).$$

Isso significa que a entropia é maior do que a soma, para $q < 1$, e menor do que a soma, para $q > 1$. Dizemos que a entropia é extensiva para $q = 1$, super-extensiva para $q < 1$, e sub-extensiva para $q > 1$.

O peso de Boltzmann para o equilíbrio térmico, $\exp[-\epsilon_i/kT]$, onde ϵ_i é a energia do i -ésimo estado, é generalizado para $[1 - (1 - q)\epsilon_i/kT]^{1/(1-q)}$. Isso mostra uma importante diferença, desde que para o caso não extensivo ($q \neq 1$), temos agora leis de potência em vez das exponenciais tradicionais. Leis de potência estão intimamente relacionadas aos fractais, e são observadas em uma variedade grande de fenômenos naturais.

A não extensividade surge em sistemas com forças de longo alcance, tais como forças gravitacionais no Universo e interações a longa distância entre partículas em sistemas de matéria condensada. Eventos que envolveriam “memória” de longo termo no nível macroscópico são também não extensivos, como o são sistemas nos quais o espaço-tempo é, em algum sentido, fractalmente estruturado.

Na astronomia, Angel Ricardo Plastino e Angel Plastino, da Universidade de La Plata, na Argentina, mostraram, em 1994, que sistemas auto-gravitantes, tais como galáxias, poderiam ser não extensivos com $q = -1$. Piero Quarati e colegas da Politécnica de Torino, na Itália, acharam que o fluxo solar de neutrinos é caracterizado por um valor de q logo abaixo de 1, o que poderia ser relevante para o enigmático problema dos neutrinos solares. Acharam também, em colaboração com Marco Rego Monteiro e eu próprio, que as velocidades de aglomerados de galáxias relativas a seus sistemas de repouso cosmológicos, medidas pelo satélite COBE, poderiam seguir uma distribuição não-extensiva com $q \sim 0,24$.

Em sistemas de matéria condensada, acreditamos que temos agora uma base teórica firme para a difusão anômala tipo Lévy. Encontrou-se que a turbulência bidimensional em um plasma puro de elétrons é não extensiva, com $q = 1/2$. A. K. Rajagopal, do Laboratório de Pesquisa Naval, em Washington DC, estendeu recentemente, para estudar o caso geral, a teoria de resposta linear, que é rotineiramente usada para analisar propriedades de transporte em sistemas “normais”.

A não extensividade surge também na teoria do caos. Mostrei recentemente, junto com Angel Ricardo Plastino e Wei-Mou Zheng, do Instituto de Física Teórica em Beijing, China, que o mapeamento logístico - que mostra como um sistema evolui com o tempo - exhibe, na fronteira para o caos, uma sensibilidade às condições iniciais que segue uma lei de potência, caracterizada por um q próximo de 0,24. Francisco Tamarit e colaboradores, da Universidade de Córdoba, na Argentina, usaram isso como base para analisar um modelo para a evolução biológica. Muitos outros sistemas podem ser analisados em termos dessas estatísticas generalizadas [ver referências em 8 e 9], e poderiam fornecer novas idéias sobre os mecanismos subjacentes a determinado domínio dos fenômenos naturais.

Leituras adicionais

1. B. M. Boghossian, “Thermodynamic description of the relaxation of two-dimensional turbulence using Tsallis statistics”, *Phys. Rev. E* **53**, 4754 (1996).
2. R. N. Mantegna and H. E. Stanley, “Scaling behaviour in the dynamics of an economic index”, *Nature* **376**, 46 (1995).

3. T. J. Penna et al., “Travelling salesman problem and Tsallis statistics”, *Phys. Rev. E* **51**, R1 (1995).
4. M. F. Schlesinger, G. M. Zaslavsky and U. Frisch, “Lévy Flights and Related Topics in Physics” (Springer, Berlin) (1995).
5. C. Tsallis, “Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics”, *J. Stat. Phys.* **52**, 479 (1988).
6. C. Tsallis, S. V. F. Lévy, A. M. C. Souza and

R. Maynard, "Statistical-mechanical foundation of the ubiquity of Lévy distributions in nature", *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3589 (1995).

7. D. Prato and C. Tsallis, "Nonextensive foundation of Lévy distributions", *Phys. Rev. E* **60**, 2398 (1999).

8. Artigos de revisão sobre o tema podem ser

encontrados na página da revista *Brazilian Journal of Physics*: [http://www.sbf.if.usp.br/WWW/pages/Journals/BJP/Vol 29/Num1/index.htm](http://www.sbf.if.usp.br/WWW/pages/Journals/BJP/Vol%2029/Num1/index.htm)

9. Uma bibliografia geral e atualizada sobre essa estatística generalizada encontra-se na página: <http://tsallis.cat.cbpf.br/biblio.htm>