Sebastião e Silva e o Conceito de Distribuição

(Sebastião e Silva and the distribution concept)

N. C. A. da Costa
Instituto de Estudos Avançados
Universidade de São Paulo
Cidade Universitária, 05.655-010, São Paulo
e-mail:ncacosta@usp.br

J. A. Baêta Segundo
Departamento de Matemática e Computação da
Escola Federal de Engenharia de Itajubá
Caixa Postal 50, 37.500-000, Itajubá, MG

Recebido em 11 de Março, 1999

Este é um trabalho expositivo no qual apresentamos o tratamento axiomático da teoria das distribuições, desenvolvido pelo matemático português José Sebastião e Silva (1914-1972). Nosso principal objetivo é mostrar que, do ponto de vista pedagógico, a axiomática de Silva constitui-se, talvez, no melhor modo de se introduzir o conceito de distribuição aos usuários da Matemática, especialmente aos físicos e engenheiros.

This is an expository paper in which we present the axiomatic treatment of the theory of distributions, developed by the Portuguese mathematician José Sebastião e Silva (1914-1972). Our main goal is to show that, from the pedagogical point of view, Silva's axiomatic constitutes perhaps the best way to introduce the concept of distribution to the non mathematician, especially to physicits and engineers.

I Introdução

A versão clássica, *à la* Schwartz, da teoria das distribuições [5,6], elaborada no seio da análise funcional, é, em geral, pouco atraente ao físico teórico e ao engenheiro que, no entanto, se utilizam com freqüência de seus resultados. Contudo, alguns destes resultados, especialmente aqueles ligados à composição da distribuição delta de Dirac, δ, com uma função f, $\delta[f(x)]$, são de difícil acomodação no domínio da teoria clássica das distribuições, ao contrário do que sugerem as heurísticas comumente apresentadas, em contextos aplicados, como justificativas para os referidos resultados.

Dentre as várias contribuições de José Sebastião e Silva (1914-1972) [8], um dos mais importantes matemáticos portugueses, destaca-se o seu trabalho sobre uma teoria axiomática das distribuições [7], hoje algo olvidado. Nele, com axiomas extremamente simples, Silva constrói uma axiomática que captura o conceito de distribuição em sua versão clássica, mais precisamente, a teoria de Schwartz se constitui num modelo da axiomática de Silva que, por sua vez, é categórica, isto é, admite, essencialmente, um único modelo, no sentido de que quaisquer dois modelos são necessariamente isomorfos.

No contexto destas observações insere-se o presente trabalho, expositivo, com objetivos de natureza didático-pedagógica, ao qual pretendemos dar continuidade com um outro de índole físico-mátemática. Nesta primeira parte, expositiva, procuramos reapresentar as idéias de Silva sobre as distribuições, de tal forma a realçar sua simplicidade ao mesmo tempo que as relacionamos com a teoria clássica de Schwartz. Acreditamos que a axiomática em pauta constitui-se numa via alternativa para o ensino das distribuições que, pela natureza simples de seus conceitos primitivos, poderá ser apresentada em um estágio muito menos avançado do que aquele requerido ao entendimento da versão clássica, apresentando, assim, um maior atrativo aos usuários da matemática. Na verdade, este trabalho é uma tentativa de transferir ao leitor esta nossa crença.

No que diz respeito à parte de índole físico-matemática, que pretendemos apresentar em futuro próximo, iremos nos concentrar naquelas operações para as quais a teoria clássica das distribuições constitui-se num habitat um tanto quanto hostil, como, por exemplo, a multiplicação de distribuições e a composição de uma distribuição com uma função, em particular a citada composição $\delta[f(x)]$, no sentido de responder as seguintes questões:

(i) A axiomática de Silva, para as distribuições, é forte o suficiente para acomodar de forma sensata estas operações ?

(ii) Na hipótese de uma resposta negativa à questão (i), não seria então possível modificar-se a referida axiomática de forma a, mantendo seus aspectos positivos de simplicidade e categoricidade, dar respaldo às citadas operações ?

O presente trabalho, além desta introdução, está organizado da seguinte forma: na próxima seção, fornecemos alguns dados biográficos sobre Sebastião e Silva, nas terceira e quarta seções, o cerne do trabalho, apresentamos, respectivamente, a axiomática e a construção de Schwartz como um de seus modelos, aliás, o único a menos de isomorfismos. A quinta e ultima seção, além de alguns comentários acerca das (a nosso ver) vantagens didático-pedagógicas da versão à la Silva da teoria das distribuições, comenta, fornecendo alguma indicação bibliográfica, maneiras alternativas de abordar as distribuicões.

II Nota biográfica

José Sebastião e Silva, nascido em Portugal, na vila de Mértola, em 1914, doutorou-se em mátemática em 1949 na Faculdade de Ciências de Lisboa onde, posteriormente, foi professor catedrático.

Durante mais de vinte anos foi diretor do Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa no qual, então dirigido por Antônio Ancieto Monteiro, realizou suas primeiras pesquisas em equações algébricas e topologia geral.

Após uma incursão em temas de lógica (sob a tutela de F. Enriques) durante sua estadia na Itália (1942-46), inicia, neste país, a sua atividade em análise funcional, tendo trabalhado com F. Severi e L. Fantappié. Foram muitos os seus trabalhos neste domínio e ao leitor interessado sugerimos consultar a referência [8].

Sebastião e Silva, em virtude de uma vasta cultura científica e humanística e de grandes qualidades de pedagogo, atuou de forma eficaz no âmbito do ensino da Matemática em Portugal. Neste sentido, além da renovação do ensino da análise no setor universitário, atuou com decisão no sentido de promover uma modificação profunda nos programas e nos métodos de ensino do segundo grau. As referências acerca de seus trabalhos na área de ensino podem ser encontradas em [8].

Faleceu em 25 de maio de 1972.

III A axiomática de Sebastião e Silva

Como sabemos, na elaboração de uma teoria pelo método axiomático devemos, antes de tudo, enumerar de forma exaustiva o *ponto de partida*, isto é, aqueles conceitos que serão considerados como primitivos, não definidos, bem como as propriedades que, com referência a estes conceitos, queiramos admitir, os axiomas. Em seguida comprometemo-nos a lançar mão apenas e tão somente dos conceitos primitivos e daqueles que, não sendo primitivos, tenham tido seus significados inteiramente esclarecidos pelos termos primitivos ou por outros já elucidados pelos primitivos, tais termos serão denominados definidos e o processo de introduzilos na teoria, isto é, de explicá-los a partir dos primitivos ou de outros termos definidos, recebe o nome de definição. Finalmente, proíbe-se recorrer a quaisquer suposições que não sejam as regras da lógica, os axiomas e suas conseqüências.

A atitude que se toma em uma teoria axiomática é a de considerar os conceitos primitivos como objetos despidos de qualquer interpretação e sobre os quais nada sabemos a não ser o que está expressamente dito nos axiomas. Desprezam-se os significados dos termos primitivos concentrando-se a atenção exclusivamente na *forma* dos axiomas. Desta feita, a obtenção de teoremas, as demonstrações, na medida em que só podem se ater à forma dos axiomas, independem das interpretações dadas aos termos primitivos e, portanto, podem ser consideravelmente generalizadas, ou seja, valerão em qualquer contexto interpretativo compatível com as exigências axiomáticas.

Quando, para uma teoria axiomática, encontramos uma interpretação possível, no sentido de que atende às exigências axiomáticas, diremos ter encontrado um modelo para o sistema de axiomas ou, mais simplesmente, um modelo da teoria. Neste sentido, dadas duas teorias, A e B, se for possível substituir os termos primitivos da teoria A por termos, primitivos ou não, da teoria B, de tal forma que os axiomas de A correspondentemente modificados, isto é, obtidos através da substituição de seus termos pelos correspondentes termos escolhidos em B, transformem-se em teoremas ou axiomas de B, diremos ter encontrado um modelo ou uma interpretação da teoria A dentro da teoria B. Logo, se em todos os teoremas de A fizermos as modificações pertinentes obteremos, sem dúvida, teoremas de B, isto é, proposições demonstráveis a partir dos axiomas de B.

É comum, na estruturação axiomática de um determinado assunto, lançar mão de teorias que já se encontram axiomatizadas, as quais denominaremos teorias precedentes. Assim, por exemplo, o cálculo de predicados de primeira ordem com igualdade e a teoria de conjuntos, são tomadas, em geral inconscientemente, como teorias precedentes na axiomatização da grande maioria dos temas. É também freqüente, principalmente no trabalho axiomático em ciências empíricas, como por exemplo a Física, considerar como precedentes, não apenas a lógica e a teoria geral dos conjuntos, como também outras partes da matemática como, por exemplo, a análise. Nestes casos, os axiomas da teoria que estiver sendo axiomatizada poderão se referir às noções primitivas da teoria em pauta, bem como aos conceitos das teorias precedentes, enquanto que os teoremas e axiomas destas últimas podem ser usados, na obtenção de conseqüências lógicas, como se figurassem na lista de axiomas da teoria sob análise.

A construção axiomática de Silva da teoria das distribuições é guiada por um princípio heurístico ao qual denominou *princípio de conservação das regras de cálculo*, cuja idéia encontra-se muito claramente exposta em alguns trechos do seu trabalho, referência [7], que a seguir apresentamos reagrupados e traduzidos livremente:

"O princípio heurístico que nos guiou nestas pesquisas é aquele da conservação das regras de cálculo: logo que uma operação torna-se impossível em certos casos, há uma tendência natural de se enfrentar a ordem estabelecida, continuando a operar formalmente, seguindo as regras que são válidas no domínio *clássico*. Este procedimento pode conduzir a nada mais que erros e contradições, mas, algumas vezes, alcança-se desta forma uma nova ordem, mais rica e mais harmoniosa.

Sendo f e g funções contínuas a valores complexos, definidas em um aberto Ω de R^n, e considerando a definição usual de derivada, as expressões

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2}, ...,$$

em geral, não fazem sentido. Mas, encontramos uma situação análoga a propósito da expressão $\sqrt{a}$, que não tem sentido, no domínio real, para $a < 0$, e que, como sabemos, se operarmos com estas expressões segundo as regras usuais não se obtém contradições: esta é a origem do conceito de número complexo. Guiando-nos pelo nosso princípio heurístico, o da conservação das regras de cálculo, e observando que, tal como no caso de $\sqrt{a}$, é possível operar com as *derivadas formais* (por exemplo, $\partial f/\partial_{x_1}$, sendo f contínua porém não necessariamente derivável) segundo certas regras *(a derivada de uma soma é a soma das derivadas, é permitido inverter a ordem de derivações,* etc.), sem jamais obter-se uma contradição, propomo-nos a dar uma definição do conceito de distribuição, por meio de um sistema de axiomas, que venha conceber uma distribuição, do ponto de vista local, precisamente como uma derivada formal de uma função contínua".

Os conceitos primitivos da axiomática de Silva são: *distribuição, domínio de existência, restrição, adição e derivação.* Como teorias precedentes temos: *a lógica clássica, a teoria geral de conjuntos e a análise (em R^n).* Os axiomas, apresentados a seguir, são simples o bastante para nos permitir afirmar que um primeiro curso de cálculo, de primeiro ano de graduação, fornece material suficiente à sua compreensão. Neste sentido, pedimos especial atenção do leitor, particularmente do professor, com a finalidade de, através de uma leitura atenta dos axiomas, convencer-se da correção de nossa afirmativa anterior acerca da possibilidade de um estudante, sem grande bagagem em matemática, ser capaz de captar a referida axiomática.

Os axiomas da teoria das distribuições de Silva são os seguintes:

Axioma 1.

Cada função complexa $f(x)$, definida e contínua em um aberto de R^n, é uma distribuição.

Axioma 2.

A toda distribuição Λ corresponde um aberto de R^n, denominado o domínio de existência (ou somente o domínio) de Λ, de forma que, se Λ é uma função contínua, o domínio de Λ é o domínio de existência (aberto) desta função no sentido usual.

Axioma 3.

Existe uma operação, denominada adição, que a cada par de distribuições Λ_1, Λ_2 com domínio Ω comum, faz corresponder uma distribuição de domínio Ω denominada a soma de Λ_1 com Λ_2 e denotada por $\Lambda_1 + \Lambda_2$ de forma que, se Λ_1 e Λ_2 são funções contínuas, $\Lambda_1 + \Lambda_2$ é a soma destas funções no sentido usual.

Axioma 4.

A qualquer distribuição Λ de domínio Ω e a todo índice $i = 1, 2, ..., n$, corresponde uma distribuição de domínio Ω, denominada a derivada parcial de Λ em relação a x_i e denotada por $D_{x_i}\Lambda$, de modo que:

(i) Se Λ é uma função que admite derivada parcial em relação a x_i (no sentido usual), contínua em Ω, $D_{x_i}\Lambda$ coincide com esta derivada;

(ii) Se Λ_1 e Λ_2 são distribuições com domínio comum, temos $D_{x_i}(\Lambda_1 + \Lambda_2) = D_{x_i}\Lambda_1 + D_{x_i}\Lambda_2$ para $i = 1, 2, ..., n$;

(iii) $D_{x_i}\ D_{x_k}\Lambda = D_{x_k}D_{x_i}\Lambda$, quaisquer que sejam a distribuição Λ e os índices i, k.

Axioma 5.

A cada distribuição Λ de domínio Ω e a todo aberto $w \subset \Omega$, corresponde uma distribuição Λ_w de domínio w, denominada a restrição de Λ a w, de forma que:

(i) se Λ é uma função contínua, Λ_w é a restrição desta função a w, no sentido usual;

(ii) se w' é uma parte aberta de w, temos $(\Lambda_w)_{w'} = \Lambda_{w'}$ para toda distribuição Λ de domínio Ω;

(iii) $(\Lambda_1 + \Lambda_2)_w = (\Lambda_1)_w + (\Lambda_2)_w$ para todo par de distribuições Λ_1, Λ_2 de domínio Ω;

(iv) $(D_{x_i}\Lambda_w)_w = D_{x_i}\Lambda$, quaisquer que sejam a distribuição Λ e o índice i.

Axioma 6. (Princípio do recolhimento de pedaços).

Se, dado um aberto Ω de R^n, fizermos corresponder a cada x de Ω uma vizinhança aberta Ω_x de x e uma distribuição Λ_x de domínio Ω_x, de maneira que, se as vizinhanças Ω_x, Ω_y de dois pontos de Ω tiverem uma interseção não vazia, as restrições de Λ_x e Λ_y a $\Omega_x \cap \Omega_y$ coincidam, então existe uma distribuição Λ de domínio Ω da qual a restrição a Ω_x é Λ_x, qualquer que seja x de Ω.

Convenções:

Se $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ é um multi-índice, isto é, uma n-upla de inteiros não negativos, escreveremos

$$D^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} ... D_{x_n}^{\alpha_n}.$$

Sendo dados dois multi-índices $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ e $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n)$ escreveremos $\alpha \leq \beta$ como abreviação de $\alpha_1 \leq \beta_1, ..., \alpha_n \leq \beta_n$.

Diremos que uma distribuição Λ é independente de $x_i (i = 1, 2, ..., n)$ se sua derivada $D_{x_i}\Lambda$ for nula.

Axioma 7.

Para toda distribuição Λ e todo intervalo Q de R^n, aberto e limitado, do qual a aderência está contida no domínio de Λ, existe uma função f definida e contínua em Q e um multi-índice α tais que $\Lambda_Q = D^\alpha f$.

Axioma 8.

Se Λ for uma distribuição independente de x_i $(i = 1, 2, ..., n)$, tendo por domínio um intervalo Q de R^n, e se tivermos $\Lambda = D^\alpha f$, f sendo uma função definida e contínua em Q e α um multi-índice, existe um outro multi-índice $\beta \leq \alpha$ e uma função g contínua em Q, independente de x_i no sentido usual, tais que $\Lambda = D^\beta g$.

Sem dúvida, a questão da existência de algum modelo para esse sistema de axiomas é das mais relevantes. Veremos na próxima seção, ainda que de modo esquemático, que a teoria das distribuições, tal como concebida por L. Schwartz, constitui-se num modelo para a teoria axiomática de Silva. Mais ainda, tal modelo é único a menos de isomorfismos já que, conforme demonstrado por Silva em [7], sua axiomática é categórica. Assim, os axiomas apresentados caracterizam, individualizam, as distribuições de L. Schwartz sem recorrer a noções mais avançadas de topologia geral e análise funcional requeridas pela versão clássica.

IV Um modelo da teoria de Silva

A idéia aqui é a de se *construir*, no seio de outras teorias matemáticas, objetos específicos que possam assumir o status dos conceitos primitivos da teoria de Silva, no sentido de que estes objetos satisfaçam as exigências axiomáticas da teoria. Mais precisamente, as definições, no contexto destas outras teorias, dos acima referidos objetos específicos, devem ser elaboradas de maneira que, para eles, os axiomas que implicitamente *definem* os conceitos primitivos sejam conseqüências lógicas, teoremas, das teorias nas quais foram edificados.

Tendo-se em vista a natureza deste trabalho, não e nossa intenção apresentar aqui um desenvolvimento completo. Pretendemos, no entanto, em largos traços, apresentar a definição clássica de distribuição, bem como alguns resultados associados, com o objetivo de dar ao leitor elementos que lhe indiquem ser muito razoável aceitar que as distribuições, em sua versão clássica, fornecem um modelo para a teoria de Silva. Aos interessados em completar as lacunas de nossa exposição sugerimos o excelente texto de W. Rudin, Functional Analysis [5], no qual nos apoiamos para o que a seguir expomos de maneira sumária. Vale ainda destacar que todos os conceitos de topologia geral e análise funcional utilizados em nossa apresentação, e que nela não se encontrem explicitamente definidos, o são segundo as definições formuladas em [5].

4.1 Distribuições em Ω

Seja $\Omega \subset R^n$ um aberto não vazio e seja também $(K_n)_{n \in \{1,2,...\}}$, $K_n \subset \Omega$ para $n = 1, 2, ...$, uma seqüência de compactos não vazios tal que K_n esteja incluído no interior de K_{n+1} e ainda $\bigcup_{n \in \{1,2,...\}} K_n = \Omega$. Tomemos o espaço vetorial complexo de todas as funções a valores complexos definidas e contínuas em Ω, aqui denotado por $C(\Omega)$. Este espaço com a topologia induzida pela família de seminormas separante

$$P_n(f) = sup\{|f(x)| : x \in K_n\}, \; n = 1, 2, ..., \quad e \quad f \in C(\Omega) \;,$$

é um espaço vetorial topológico, localmente convexo, cuja topologia é compatível com uma métrica invariante completa, isto é, $C(\Omega)$ com esta topologia é um espaço de Fréchet.

Definimos agora o conjunto $C^\infty(\Omega)$ como:

$C^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathcal{C} : D^\alpha f \in C(\Omega)$ para todo multi-índice $\alpha\}$,

onde

$$D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$$

com $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$. Claramente, $C^\infty(\Omega)$ com as operações usuais de adição de funções e multiplicação de uma função por número complexo é um espaço vetorial.

Sendo $K \subset \Omega$ um compacto, denotaremos por $\mathcal{D}_K$ o seguinte subespaço vetorial de $C^\infty(\Omega)$:

$$\mathcal{D}_K = \{f \in C^\infty(\Omega) : \text{ suporte de } f \subset K\} .$$

É fácil ver que a união de todos os subespaços $\mathcal{D}_K$, com $K \subset \Omega$ *percorrendo* os compactos de R^n, denotada por $\mathcal{D}(\Omega)$, é também um espaço vetorial. A este espaço, $\mathcal{D}(\Omega)$, denominaremos *espaço das funções teste*. Temos então que: $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ se e somente se $\phi \in C^\infty(\Omega)$ e o suporte de ϕ for um compacto de R^n incluído em Ω.

É possível mostrar que $\mathcal{D}(\Omega)$ pode ser munido de uma topologia τ que o torna um espaço vetorial topológico localmente convexo tal que:

Teorema 1.

Sendo Λ um funcional linear em $\mathcal{D}(\Omega)$, isto é, uma transformação linear de $\mathcal{D}(\Omega)$ em C (ambos vistos como espaços complexos), então as seguintes condições são equivalentes:

(a) Λ é contínuo (com relação a topologia τ);

(b) A todo compacto $K \subset \Omega$ corresponde um inteiro não negativo N e uma constante $c < \infty$ tais que a desigualdade $|\Lambda(\phi)| \leq c||\phi||_N$ vale para todo $\phi \in \mathcal{D}_K$, onde

$$||\phi||_N = max\{|D^\alpha \phi(x)| : x \in \Omega \;\; , \;\; |\alpha| \leq N\}$$

com $N = 0, 1, 2, ..., \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ e $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$ a ordem do multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$.

Podemos agora apresentar a principal definição desta seção:

Definição 1.

Uma distribuição em Ω é um funcional linear em $\mathcal{D}(\Omega)$, contínuo em relação a τ.

Denotaremos por $\mathcal{D}'(\Omega)$ ao conjunto de todas as distribuicões em Ω, que, com as usuais operações de adição de funcionais e multiplicação de funcional por número complexo é um espaço vetorial.

Sendo $f : \Omega \to \mathcal{C}$ localmente integrável em Ω, isto é f é Lebesgue-mensurável e

$$\int_K |f(x)|dx < \infty \quad \text{(no sentido de Lebesgue)}$$

para todo compacto $K \subset \Omega$, então

$$\int_\Omega f(x)\phi(x)dx$$

existe qualquer que seja $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Assim, a cada função f localmente integrável em Ω podemos associar o seguinte funcional linear em $\mathcal{D}(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \Lambda_f : \quad & \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{C} \\ & \phi \longmapsto \Lambda_f(\phi) = \int_\Omega f(x)\phi(x)dx. \end{aligned}$$

Visto que

$$|\Lambda_f(\phi)| \leq \int_K |f(x)||\phi(x)|dx \quad \text{para} \quad \phi \in \mathcal{D}_K,$$

e portanto, tendo-se em conta a definição de $\| \; \|_0$ dada no teorema 1,

$$|\Lambda_f(\phi)| \leq \left(\int_K |f(x)|dx\right) \| \phi \|_0 \quad \text{para} \quad \phi \in \mathcal{D}_K,$$

decorre, pelo teorema 1, que Λ_f é um funcional linear (em $\mathcal{D}(\Omega)$) contínuo, ou seja, uma distribuição em Ω.

Observemos que Λ_f é, essencialmente, *equivalente* à função f no sentido de que o conhecimento de Λ_f determina, *praticamente*, a função f. Naturalmente que se f e g forem funções localmente integráveis em Ω diferindo apenas num conjunto de medida nula, isto é, se $f = g$ quase em toda a parte (q. t. p.), então

$$\int_\Omega f(x)\phi(x)dx = \int_\Omega g(x)\phi(x)dx \quad \text{para } \phi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

ou seja, $\Lambda_f = \Lambda_g$. Todavia esta é toda a extensão da ambigüidade, já que, se $\Lambda_f = \Lambda_g$, então, pode-se mostrar que $f = g$ q.t.p.. Assim, tendo-se em conta a relação de equivalência $\sim$ em $Loc(\Omega)$ (espaço das funções localmente integráveis em Ω), definida por:

$$f \sim g \quad \text{se e só se} \quad f, g \in Loc(\Omega) \quad \text{e} \quad f = g \text{ q.t.p.},$$

podemos dizer que a distribuição Λ_f, associada à função $f \in Loc(\Omega)$, pode ser identificada com a classe de equivalência de f determinada pela relação de equivalência $\sim$ em $Loc(\Omega)$. Neste sentido temos que:

$$Loc(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega).$$

Visto que toda função $f : \Omega \to \mathcal{C}$ contínua em Ω é localmente integrável em Ω, então, a relação de inclusão acima nos mostra que toda função a valores complexos, definida e contínua em Ω, é uma distribuição em Ω. Vemos, assim, que a primeira exigência axiomática da teoria de Silva é satisfeita se interpretamos o conceito primitivo de distribuição pelo conceito de distribuição em Ω, tal como introduzido pela definição 1.

No que diz respeito aos termos primitivos domínio de existência (de uma distribuição) e adição (de distribuições), que integram a teoria axiomática de Silva, é fácil ver que os axiomas 2 e 3 se verificam com as seguintes interpretações: sendo Λ uma distribuição em Ω, ou seja, um funcional linear em $\mathcal{D}(\Omega)$, contínuo, diremos que o aberto $\Omega \subset R^n$ é o domínio de existência de Λ; sendo Λ_1 e Λ_2 duas distribuições com domínio Ω, entenderemos a adição de Λ_1 e Λ_2 como a usual operação de adição de funcionais lineares em $\mathcal{D}(\Omega)$, isto é, $(\Lambda_1 + \Lambda_2)(\phi) = \Lambda_1(\phi) + \Lambda_2(\phi)$ para todo $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

4.2 Igualdade local e restrição de distribuições

Após havermos *materializado*, no sentido de termos interpretado, no ítem anterior, os conceitos primitivos de distribuição, domínio de existência e adição, iremos agora, com o mesmo intuito, considerar o conceito de restrição.

Sejam Λ_1 e Λ_2 distribuições em Ω e $w \subset \Omega$ um aberto. Diremos que Λ_1 e Λ_2 são localmente iguais em w ou, em símbolos, que

$$\Lambda_1 = \Lambda_2 \quad \text{em} \quad w$$

se e somente se

$$\Lambda_1(\phi) = \Lambda_2(\phi)$$

para todo $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tal que o suporte de ϕ esteja incluído em w, isto é,

$$\Lambda_1 = \Lambda_2 \quad \text{em} \quad w$$

significa

$$\Lambda_1(\phi) = \Lambda_2(\phi) \quad \text{para todo} \quad \phi \in \mathcal{D}(w).$$

De posse do conceito de igualdade local podemos agora definir restrição de uma distribuição da seguinte forma:

Definição 2.

Seja Λ uma distribuição em Ω e $w \subset \Omega$ um aberto não vazio. A restrição de Λ a w, denotada por Λ_w, é o funcional linear em $\mathcal{D}(w)$ tal que

$$\Lambda_w = \Lambda \quad \text{em} \quad w$$

Resulta que a restrição de Λ a $w \subset \Omega$, Λ_w, é contínua em $\mathcal{D}(w)$ e portanto uma distribuição em w. Além disto, pode-se demonstrar que:

Teorema 2.

Suponha-se que Γ seja uma cobertura aberta de um aberto $\Omega \subset R^n$ e que, para cada $w \in \Gamma$ corresponda uma distribuição $\Lambda^w \in \mathcal{D}'(w)$ de tal forma que: $\Lambda^{w'} = \Lambda^{w"}$ em $w' \cap w"$ sempre que $w' \cap w" \neq \phi$. Então, existe uma única distribuição em Ω, $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$, tal que

$$\Lambda_w = \Lambda^w \quad \text{em} \quad w$$

para todo $w \in \Gamma$.

Os resultados acima mostram claramente que o conceito de restrição tal como introduzido pela definição 2, satisfaz às exigências dos axiomas 5 e 6 (excetuando-se, no axioma 5, por ora, a parte (iv)) da teoria de Silva.

No próximo ítem trataremos de formular uma definição para derivada de uma distribuição de tal forma que incorpore as propriedades exigidas pelo sistema de axiomas de Silva, completando assim a construção do nosso modelo.

4.3 - Derivada de uma distribuição

Tudo o que precisamos agora é de uma conveniente definição para derivada de uma distribuição, conveniente no sentido de satisfazer nossos axiomas. Os resultados que seguem a definição dada abaixo mostram a sua conveniência.

Definição 3

Seja Λ uma distribuição em Ω e $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ um multi-índice. A α-ésima derivada de Λ, aqui denotada por $D^\alpha \Lambda$, é, por definição, o seguinte funcional linear em $\mathcal{D}(\Omega)$:

$$\begin{aligned} D^\alpha \Lambda : \quad & \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{C} \\ & \phi \longmapsto (D^\alpha \Lambda)(\phi) = (-1)^{|\alpha|} \Lambda(D^\alpha \phi) \end{aligned}$$

onde, como anteriormente, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$ e

$$D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} ... \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} .$$

Sendo Λ uma distribuição em Ω e $K \subset \Omega$ um compacto, então, pelo teorema 1, existe $c < \infty$ e um inteiro não negativo N tais que:

$$|\Lambda(\phi)| \leq c \parallel \phi \parallel_N \quad \text{para} \quad \phi \in \mathcal{D}_K.$$

Assim,

$$|(D^\alpha \Lambda)(\phi)| = |\Lambda(D^\alpha \phi)| \leq c \parallel D^\alpha \phi \parallel_N \leq c \parallel \phi \parallel_{N+|\alpha|}$$

para todo $\phi \in \mathcal{D}_K$ (onde, na última desigualdade, usamos a definição de $|| \; ||_N$ dada no teorema 1), o que nos permite afirmar, tendo-se em conta, novamente, o teorema 1, que $D^\alpha \Lambda$ é também uma distribuição em Ω. Além disto, sendo β um outro multi-índice, e observando-se que D^α e D^β são operadores em $C^\infty(\Omega)$ que comutam, temos:

$$(D^\alpha(D^\beta\Lambda))(\phi) = (-1)^{|\alpha|}(D^\beta\Lambda)(D^\alpha\phi) = (-1)^{|\alpha|+|\beta|}\Lambda(D^\beta(D^\alpha\phi)) = \\ = (-1)^{|\alpha|+|\beta|}\Lambda(D^{\alpha+\beta}\phi) = (D^{\alpha+\beta}\Lambda)(\phi),$$

para todo $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, ou seja,

$$D^\alpha(D^\beta\Lambda) = D^\beta(D^\alpha\Lambda) = D^{\alpha+\beta}\Lambda\ .$$

Vemos, assim, a partir dos resultados acima, que, a menos da condição (i), que trataremos de verificar a seguir, todas as outras exigências do axioma 4, bem como a condição (iv) do axioma 5, são atendidas interpretando-se o conceito primitivo de derivada pelo introduzido na definição 3.

No que se refere ao item (i) do axioma 4, lembremonos que sendo $f : \Omega \to \mathcal{C}$ localmente integrável em Ω, então

$$\begin{aligned} \Lambda_f : \quad & \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{C} \\ & \phi \longmapsto \Lambda_f(\phi) = \int_\Omega f(x)\phi(x)dx \end{aligned}$$

é uma distribuição em Ω que, no sentido esclarecido no ítem 4.1, é identificada com a própria função f. Assim, como $\Lambda_f \equiv f$, é razoável definir-se a derivada generalizada de uma função f localmente integrável em Ω como a derivada da distribuição Λ_f a ela associada, isto é:

Definição 4. $D^\alpha_{gen.}f =^{def.} D^\alpha\Lambda_f.$

Suponhamos, agora, que $D^\alpha f$ exista no sentido clássico e que seja localmente integrável. Neste caso a identificamos com a distribuição $\Lambda_{D^\alpha f}$, isto é, $D^\alpha f \equiv \Lambda_{D^\alpha f}$. Cumpre indagar se, nesta situação, ocorrerá de $D^\alpha f = D^\alpha_{gen.}f$, ou tendo em vista a identificação acima e a definição 4, se

$$\Lambda_{D^\alpha f} = D^\alpha\Lambda_f$$

ou seja, se

$$\int_\Omega (D^\alpha f)(x)\phi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega f(x)(D^\alpha\phi)(x)dx$$

para todo $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. É fácil mostrar, integrando-se por partes, que, se f possuir derivadas parciais contínuas de todas as ordens até N e se $|\alpha| \leq N$, a expressão acima é verdadeira. Temos, assim, verificada a condição (i) do axioma 4.

Pode-se ainda mostrar que:

Teorema 3.

Seja Λ uma distribuição em Ω e $K \subset \Omega$ um compacto. Então, existe uma função contínua $f : \Omega \to \mathcal{C}$ e um multi-índice α tais que:

$$\Lambda(\phi) = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega f(x)(D^\alpha\phi)(x)dx$$

para todo $\phi \in \mathcal{D}_K$ ou, equivalentemente,

$$\Lambda(\phi) = (D^\alpha\Lambda_f)(\phi) = (D^\alpha_{gen.}f)(\phi)$$

para todo $\phi \in \mathcal{D}_K$.

Em outras palavras e de maneira informal, o teorema 3 nos diz que toda distribuição é, pelo menos localmente, a derivada (generalizada) de uma função contínua. Por este teorema vemos que também o axioma 7 é atendido por nossas interpretações.

Ao leitor sugerimos a tarefa de completar a demonstração de que as interpretações dadas aqui aos termos primitivos da teoria de Silva se constituem num modelo da referida teoria. Mais precisamente, sugerimos ao leitor mostrar que o exigido pelo axioma 8 é satisfeito pelas interpretações.

V Comentários finais

Após a leitura deste trabalho, mais precisamente das seções 3 e 4 onde apresentamos, respectivamente, a axiomática de Silva e aspectos da teoria clássica das distribuições, estes, suficientes à verificação de que as distribuições segundo Schwartz se constituem num modelo da teoria de Silva, e tendo-se em conta que a axiomática em apreço é categórica, o leitor atento dificilmente deixará de apreciar a forma simples com que Sebastião e Silva conseguiu *pinçar* conceitos tão elaborados. Sua síntese axiomática, repetimos, pode ser apreendida, sem dificuldade, por um aluno de graduação que tenha tido um primeiro curso de cálculo de um ano. A este mesmo aluno, no entanto, a construção de Schwartz, com seus delicados e sutis elementos de topologia geral e análise funcional, seria inacessível.

Ao invés das conhecidas *formulações* heurísticas, pedagogicamente danosas, de se *expor* e *justificar* as propriedades importantes associadas às distribuiçoẽs (como ocorre em muitos textos de física e de engenharia em nível de graduação e, em alguns casos, também de pós-graduação), a teoria de Silva fornece uma alternativa razoável. Ademais, conscientes de que, tipicamente, físicos e engenheiros, para exemplificar, não estão dispostos a se embrenharem em elaborações matemáticas sofisticadas, como a teoria clássica das distribuições, embora muitas vezes delas necessitem ter algum conhecimento, cremos que, analogamente ao que ocorre com os números reais, onde via de regra, não apenas os usuários da matemática, como também muitos matemáticos, apoiam-se nos axiomas de corpo ordenado (arquimediano) completo, esquecendo-se das construções (modelos) feitas por Dedekind, Cauchy e outros, esta também possa ser uma atitude aceitável, no concernente às distribuições, a ser adotada, especialmente por motivos didáticos. Mais especificamente, propomos a seguinte postura axiomática: de posse de uma axiomática simples e cientes de que para ela existem modelos, pode-se olvidar a construção destes últimos e apoiar-se apenas nas propriedades listadas nos axiomas e nos teoremas que delas se puderem derivar.

A idéia central, que consideramos relevante pelas razões acima, pode ser expressa, *mutatis mutandis*, com o que diz Spivak [9]: *É inteiramente irrelevante que um número real seja, digamos, uma coleção de números racionais: tal fato nunca deveria entrar na demonstração de qualquer teorema importante sobre números reais. Demonstrações aceitáveis deveriam usar apenas o fato de que os números reais formam um corpo ordenado completo...*

Para finalizar gostaríamos de destacar que aspectos históricos, bem como a apresentação de outras abordagens ao tema das distribuições, podem ser encontrados em J. Lützen [3]. Uma generalização da teoria usual de distribuições figura em da Costa et al. [2]. Recentemente S. Cortizo [1] desenvolveu uma teoria dos infinitésimos (e infinitos), que provê uma alternativa à teoria das distribuições. Vale também destacar que a análise não standard [4] pode ser utilizada na fundamentação da teoria em pauta, esclarecendo e simplificando muitas questões.

References

[1] Cortizo, S. *Extensões Virtuais.* Tese, Universidade de São Paulo, 1998.

[2] da Costa, N. C. A., Kouneiher, J. et Balan, A. P. M.: *Continu et Infinis:Introduction À L'Analyse Prè-et Antéréelle.* Bol. Soc. Paran. Mat., **17** 1/2, (1997) 51-64.

[3] Lützen, J.: *The Prehistory of the Theory of Distributions.* Springer-Verlag, 1982.

[4] Robinson, A.: *Non-Standard Analysis.* North-Holland, 1974.

[5] Rudin, W.: *Functional Analysis.* 2^{nd} edition, McGraw-Hill, 1991.

[6] Schwartz, L.: *Théorie des distributions.* Hermann et Cia, Paris, 1966.

[7] Sebastião e Silva, J.: *Sur Une Construction Axiomatique de la Théorie des Distributions.* Obras de José Sebastião e Silva, Volume II. Instituto Nacional de Investigação Científica. Lisboa, 1985.

[8] *Obras de José Sebastião e Silva.* Volumes, I, II e III. Instituto Nacional de Investigação Científica. Lisboa, 1985.

[9] Spivak, M.: *Calculus.* W. A. Benjamin, 1967.