

Máquina de Atwood

(Atwood machine)

Alexsandra Siqueira, Aparecida do C.S.Almeida e Jaime Frejlich*

*Laboratório de Óptica, Instituto de Física
Universidade Estadual de Campinas
13083-970 Campinas-SP*

Recebido em 14 de Julho, 1998

Discutimos a realização prática do experimento da máquina de Atwood para medir a aceleração da gravidade da Terra e estudamos os fatores que determinam o desempenho do instrumento e a precisão dos resultados. Mostramos o interesse didático deste experimento para ilustrar alguns aspectos da Mecânica, e sobretudo para enfatizar a importância do tratamento dos dados e da análise da propagação de erros como ferramenta para estimar a precisão dos resultados e para otimizar as condições de operação.

We discuss practical realization of the Atwood machine experiment for the measurement of the Earth gravitational acceleration. We analyse the factors that determine its performance and the precision of its results. We demonstrate its interest for teaching mechanics, and mainly for illustrating the importance of an adequate and careful treatment of experimental data. We emphasize the interest of using the error propagation theory both to predict the precision of results and to optimize the operation conditions.

I Introdução

São poucos os experimentos que podem ser utilizados com sucesso nos laboratórios básicos universitários, para ilustrar questões fundamentais de Mecânica e de processamento de dados. O experimento da máquina de Atwood pertence a essa categoria e por isso neste artigo propomos seu estudo e utilização para a medida da aceleração da gravidade da Terra, com objetivos didáticos. Mostramos que esse instrumento deve ser construído com muito cuidado para dar resultados razoáveis, e que muitos efeitos que são normalmente desprezados devem, pelo contrário, ser considerados.

O experimento envolve o estudo de diversos aspectos da Mecânica (dinâmica de corpos rígidos, da rotação e dos fluídos) e requer conhecimentos sobre tratamento de dados, principalmente no que se refere à teoria de propagação de erros, e alguns conhecimentos sobre cálculo integral.

Este artigo pretende colocar em evidência a importância do estudo da propagação de erros para o pla-

nejamento de um experimento e para auxiliar na escolha das condições ótimas de operação. A ênfase está colocada na predição do efeito das diferentes incertezas experimentais sobre o resultado final, e não no tratamento (“a-posteriori”) estatístico dos dados.

II Teoria

O instrumento está ilustrado na Fig. 1 e está formado por uma polia cilíndrica maciça (para facilitar o cálculo do seu momento de inércia) de latão com uma garganta muito rasa por onde passa o barbante (fio de algodão) amarrado nos dois extremos a dois cilindros metálicos (M_1 e M_2) também maciços. A polia rota sobre rolagens comerciais. A teoria de operação encontra-se em muitos textos de Física [1, 2] pelo que não perderemos o tempo com essa parte, indo direto para o conjunto de equações que descrevem o movimento de cada um dos dois pesos, e a rotação da polia:

$$M_1 a = T_1 - M_1 g \quad (1)$$

* e-mail: frejlich@if.unicamp.br

$$(M_2 + m)a = (M_2 + m)g - T_2 \quad (2)$$

$$I\alpha = (T'_2 - T'_1)R \quad I = MR^2/2 \quad \alpha = a/R \quad (3)$$

Como veremos mais adiante, não é possível desprezar o peso do barbante que liga as duas massas M_1 e M_2 passando pela garganta da polia, e por isso temos que considerar também sua dinâmica:

$$m_1 a = T'_1 - T_1 - m_1 g \quad m_1 \approx \rho(h_1^o - at^2/2) \quad (4)$$

$$m_2 a = T_2 - T'_2 + m_2 g \quad m_2 \approx \rho(h_2^o + at^2/2) \quad (5)$$

onde $h_{1,2}^o$ são os valores iniciais de $h_{1,2}$ (vide Fig.1) e ρ é a densidade linear de massa do barbante. Na formulação das Eqs. (4,5) assumimos a aproximação que a aceleração a do sistema é constante, o que vai ser confirmado mais adiante. A partir das cinco equações acima podemos obter a expressão da aceleração do sistema

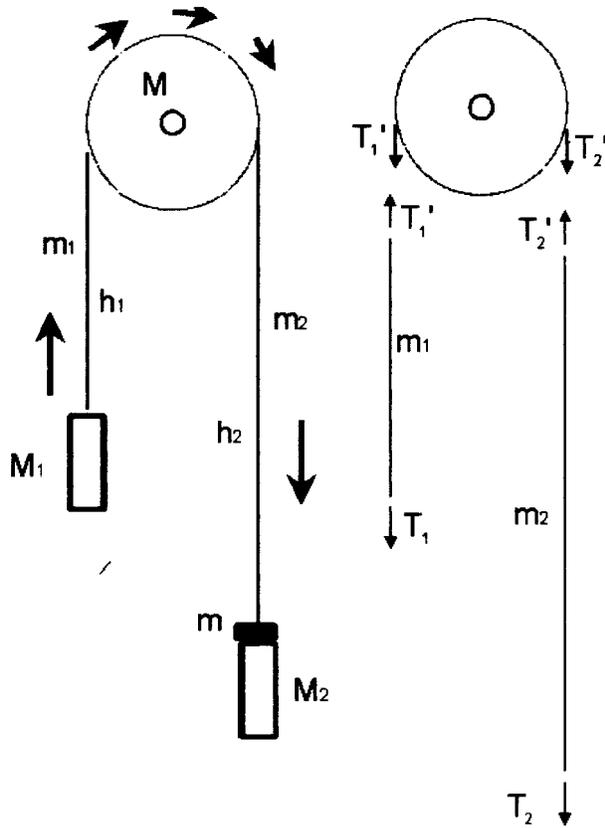


Figura 1. Esquema da máquina de Atwood, indicando as massas M da polia, M_1 e M_2 dos cilindros móveis, m da carga adicional, e m_1 e m_2 dos comprimentos correspondentes (h_1 e h_2) dos barbantes de cada lado da polia. À direita está o esquema do corpo livre com as forças $T'_{1,2}$ e $T_{1,2}$.

$$a = \frac{d^2 h}{dt^2} = \frac{D}{B^2 - t^2} \quad (6)$$

com

$$D = \frac{M_2 - M_1 + m}{\rho} + (h_2^o - h_1^o)$$

$$B^2 = \frac{M_1 + M_2 + m + M/2 + \rho(h_1^o + h_2^o)}{\rho g} \quad (7)$$

onde m é a carga adicionada em M_2 , e h é a altura da queda da massa M_2 , partindo do repouso. A solução da Eq. 6 é

$$h = \frac{D}{2} \ln\left(1 - \frac{t^2}{B^2}\right) + \frac{Dt}{2B} \ln \frac{B+t}{B-t} \quad (8)$$

que para $t/B \ll 1$ pode ser aproximada por

$$h = \frac{Dt^2}{2B^2} \quad (10)$$

Substituindo B e D pelas suas expressões na Eq.7 verificamos que a aceleração do sistema é de fato constante como suposto nas Eqs.(4,5). Rearranjando termos podemos escrever a Eq.10 como

$$g = \frac{2h}{t^2} \frac{M_1 + M_2 + m\rho(h_1^o + h_2^o) + M/2}{(M_2 - M_1) + m + (h_2^o - h_1^o)\rho} \quad (11)$$

A Eq. 11 permite calcular “ g ” em função dos parâmetros e variáveis experimentais.

III Análise do experimento

O experimento envolve diversos parâmetros, alguns dos quais podem ser escolhidos dentro de uma margem bastante ampla. Essa escolha deve permitir atingir o objetivo proposto (medida da aceleração da gravidade) com a maior precisão possível. Para isso vamos fazer uma estimativa das incertezas com que as diversas quantidades diretamente medidas podem ser obtidas, e utilizando o cálculo de propagação de erros [3], estimar a precisão esperada em “ g ”.

III.1 Propagação de erros

A partir da Eq.11 podemos estimar o limite superior (não esquecer que a propagação de erros é essencialmente “pessimista”) da incerteza no valor final de “ g ” em função das incertezas estimadas para os parâmetros experimentais, utilizando a teoria da propagação de erros assim

$$\frac{\Delta g}{g} \approx \frac{|\Delta M_1| + |\Delta M_2|}{M_2 - M_1 + m} + \frac{|\Delta M_1| + |\Delta M_2| + |\Delta M/2|}{M_1 + M_2 + M/2} + \frac{\Delta h}{h} + 2 \frac{|\Delta t|}{\sqrt{\frac{M_1 + M_2 + M/2}{M_2 - M_1 + m}}} \sqrt{\frac{g}{2h}} \quad (12)$$

A propagação de erros pode ser calculada de forma mais precisa onde a variância no resultado final é calculada a partir das variâncias dos diferentes parâmetros experimentais medidos [3]. Essa formulação é mais trabalhosa que a representada pela Eq. (12) e não resolve muito melhor o nosso problema, pela razão que não dispomos das variâncias das variáveis envolvidas (exceto para o tempo) mas apenas de uma estimativa “a-priori” de suas incertezas (vide Tabela 2). Substituindo os valores correspondentes (veja a Tabela 1) na Eq. 12 e utilizando as incertezas experimentais estimadas na Tabela 2, podemos calcular os valores para cada termo na soma:

$$\frac{\Delta g}{g} \approx \frac{0.2g}{-1.5g + m} + \frac{1}{3000} + \frac{0.2}{200} + 2 \frac{0.05s\sqrt{-1.5g + m}}{\sqrt{1200s^2g}} \quad (13)$$

Para evitar perdas de tempo inúteis devemos lembrar que este é um método aproximado e que as próprias incertezas individuais dos diferentes parâmetros envolvidos são fruto de estimativas necessariamente pouco precisas. Com estas considerações fica claro que podemos fazer aproximações que facilitem e simplifiquem os cálculos, como por exemplo, aproximar 168cm no denominador do terceiro termo na Eq. 13 pelo valor 200cm, e assim por diante. Note que a precisão de 0.05s na medida do tempo foi calculada como o desvio padrão para um número relativamente pequeno (10 medidas) do ponto de vista da Estatística, mas razoável do ponto de vista da prática experimental. As outras incertezas listadas na Tabela 2 foram apenas estimadas a partir do exame do instrumento utilizado para cada medida. A Eq.13 em função da sobre-carga “ $M_2 - M_1 + m$ ” está graficada na Fig. 2 (curva A) onde se podem ver algumas particularidades interessantes:

- Para valores pequenos de $M_2 - M_1 + m$ a estimativa de erro em “g” aumenta rapidamente por causa essencialmente do primeiro dos 4 termos na

Eq.13. É possível melhorar bastante o desempenho do instrumento, aumentando a precisão na medida de M_2 , M_1 e m , como ilustrado na curva C da Fig.2.

- Para valores grandes de “m” o erro também aumenta, ainda que de forma muito moderada: o responsável neste caso é o último termo da fórmula, ou seja o termo que envolve a incerteza na medida do tempo. Uma melhora nesta incerteza pode produzir um aumento importante na precisão final para “g”, para um intervalo amplo da sobre-carga (vide curva D na Fig.2).
- Existe um intervalo de valores para “ $M_2 - M_1 + m$ ” que dá o mínimo de erro e é nessa região (abscissas entre 20g e 60g aproximadamente na curva A) que as medidas devem ser feitas preferencialmente. O seu valor também nos dá uma indicação da precisão que pode ser atingida pelo instrumento: não deve ser pior que 2,5%.

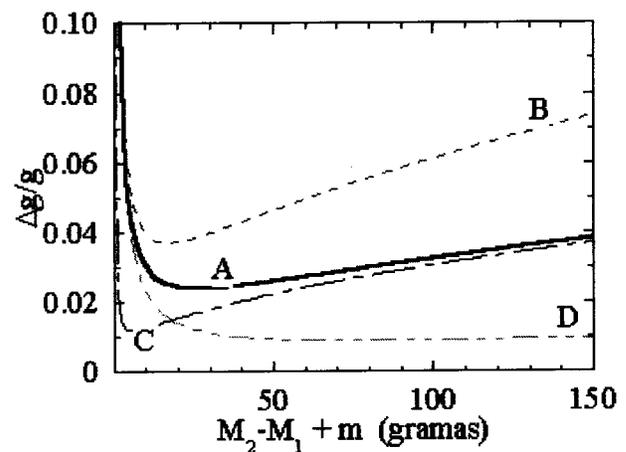


Figura 2. Representação gráfica da Eq.12 para os valores experimentais listados na Tabela 1, com as incertezas listadas na Tabela 2 para a curva A. As outras curvas foram calculadas para B: $|\Delta M_1| + |\Delta M_2| = 0.2g$ e $|\Delta t|=0.1s$; C: $|\Delta M_1| + |\Delta M_2| = 0.02g$ e $|\Delta t|=0.05s$; D: $|\Delta M_1| + |\Delta M_2| = 0.2g$ e $|\Delta t|=0.01s$ —.

Table 1:

Parâmetros experimentais	
M_1 1004.4 g
M_2 1002.9 g
m diversos
M 2080.5 g
h_2^o 43 cm
h_1^o 208 cm
ρ 3.406 mg/cm
h 168 cm
t varios

Table 2:

Incertezas estimadas	
ΔM_1 ± 0.1 g
ΔM_2 ± 0.1 g
Δm ± 0.01 g
ΔM ± 0.8 g
Δh_2^o ± 2 mm
Δh_1^o ± 2 mm
Δh ± 2 mm
Δt ± 0.05 s

III.2 Otimização do experimento

A observação da Fig. 2 permite tirar algumas conclusões sobre a forma de melhorar o desempenho do instrumento;

- O aumento na precisão da medida das massas M_1 , M_2 e m pode melhorar muito a precisão final na medida de “g” (vide curva **C**). O problema é que neste caso a região ótima para realizar as medidas se desloca para valores menores da sobre-carga, onde o atrito nos rolamentos da polia (vide sec.4.1) pode chegar a ser comparativamente importante.
- A precisão na medida da massa da polia não é muito crítica pois só aparece no segundo termo da Eq.12, que é o menor de todos.
- Nas condições experimentais ora definidas, não interessa aumentar a precisão na medida de “h” pois a precisão em “g” está limitada por outros parâmetros.
- A melhora na precisão da medida do tempo pode melhorar em muito o desempenho do instrumento, como mostra a curva **D** na Fig. 2: melhorar a precisão de $\pm 0.05s$ para ± 0.01 representa um fator de 3 na precisão final para “g”, num entorno bastante amplo de sobre-cargas. Evidentemente uma precisão tão grande na medida do tempo requer um sistema automático e não manual.

IV Medida da aceleração da gravidade da Terra

A medida foi feita para vários valores da sobre-carga, como indicado na Fig.3 onde pode se observar que inicialmente o valor de “g” é menor (até 7% para o valor médio) que o esperado, aumentando gradativamente até $M_2 - M_1 + m \approx 30g$. A partir daí os resultados decrescem levemente mas podem ser considerados constantes dentro de uma dispersão compatível com as barras de erro calculadas a partir da curva **A** na Fig.2. O comportamento da parte inicial da curva não pode ser devido à aproximação feita na Eq.(10) que envolve erros muito menores como pode ser observado no gráfico da Fig.4, mas pode ser atribuído à existência de atrito nos rolamentos da polia. Por outro lado podemos demonstrar que a resistência do ar tem um efeito pequeno em nosso experimento, e sobretudo, que ele não depende da sobre-carga. A diminuição dos valores médios de g em função da sobre-carga, na parte final da Fig.3, mesmo que possam ser considerados constantes dentro da margem de erro estimada, pode ser devida ao fato que o erro na medida do tempo (elemento predominante nesta parte da curva) não é totalmente aleatório mas tem uma componente sistemática devido ao tempo de reação do experimentador, já que a medida do tempo é manual.

IV.1 Atrito nos rolamentos

Esse atrito depende da qualidade dos rolamentos utilizados e os cuidados na construção, manutenção e manuseio da polia. O atrito so pode ser desprezado para valores suficientemente grandes da sobre-carga, e

isso explica os valores crescentes do valor aparente de “g” medido.

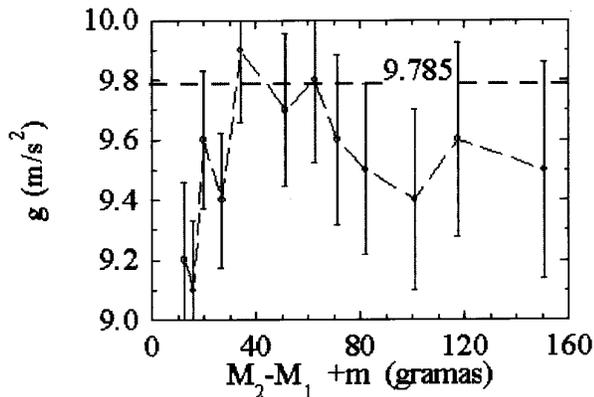


Figura 3. Resultado obtido para aceleração da gravidade da Terra, medida para diferentes valores de $M_2 - M_1 + m$, com os parâmetros experimentais listados na Tabela 2.

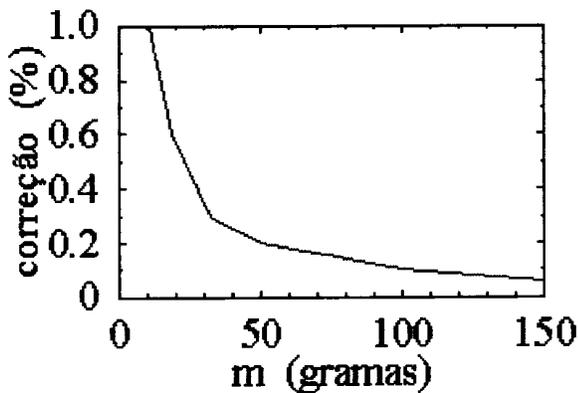


Figura 4. Erro estimado no cálculo de “g” devido a aproximação na Eq.10, para os parâmetros listados na Tabela 1.

IV.2 Resistência do ar

É importante estimarmos o efeito da resistência do ar, que mostraremos ser independente da sobre-carga e pequeno comparado com as nossas incertezas experimentais. O cálculo do movimento dos cilindros levando em conta a resistência do ar é bastante complicado, mas estimar o máximo efeito possível sobre o movimento é bastante fácil e é isso que faremos. Os cilindros utilizados no experimento são pouco aerodinâmicos e por isso seu movimento pode provocar uma resistência sensível do ar, mesmo em baixas velocidades. Supondo as piores condições possíveis em que se estabeleça um regime turbulento, a força de resistência provocada sobre a superfície circular (área $A \approx 25\text{cm}^2$) de cada base se movendo perpendicularmente com velocidade v no ar (densidade $\rho_o = 1.29\text{Kg/m}^3$) seria [2]

$$F_{res} = \alpha \rho_o A v^2 / 2 \quad \alpha \approx 1 \quad (1)$$

onde α é um coeficiente empírico que depende da forma da superfície. A velocidade $v = dh/dt$ pode ser calculada da Eq.(10). Comparando a (des)aceleração ($a_{res} \approx 2F_{res}/M_2$) resultante sobre um dos cilindros com a aceleração do sistema ($a \approx D/B^2$) temos no máximo

$$\frac{a_{res}}{a} = \frac{2\rho_o Ah}{M_2} \approx 0.01 \quad (2)$$

o que mostra:

- que esse efeito não varia com a sobrecarga ($M_2 \approx M_2 + m$) e por isso ele não pode explicar as peculiaridades da Fig.3
- que mesmo aceitando a presença de um regime turbulento, o efeito seria menor que as incertezas estimadas para o nosso experimento (curva A na Fig. 2).

V Discussão

A aceleração da gravidade da Terra é medida utilizando técnicas especiais que permitem uma grande precisão. O melhor valor medido com essas técnicas na região de Campinas-SP (onde o experimento descrito neste artigo foi realizado) é de $g=9.78563\text{ m/s}^2$ [4]. Na situação experimental definida neste trabalho, o valor de “g” pode ser medido com uma precisão melhor que 2.5% (para sobre-cargas entre 30g e 60g), e dentro dessa margem de erro, está em perfeito acordo com o valor indicado acima. É claro que um número grande de medidas e um tratamento estatístico dos dados pode melhorar os resultados mas não vai alterar as principais conclusões que podem ser extraídas desta análise preliminar. Para se melhorar a precisão obtida com a máquina de Atwood no presente experimento seria necessário:

- Medir as massas M_1, M_2 e m com maior precisão, o que para o caso das duas primeiras só poderia ser feito reduzindo bastante suas massas para poderem ser medidas numa balança de precisão. Se isso for feito, a massa da polia deveria ser aumentada para não elevar o valor do segundo e quarto termos na Eq.12. Lamentavelmente, nesse caso o intervalo ótimo de medida se deslocaria para os valores pequenos da sobre-carga, onde o atrito nos rolamentos da polia poderia interferir. Não

interessa pois aumentar a precisão nas massas a menos que se possa melhorar esses rolamentos.

- O uso de uma polia vazada e mais leve (tipo roda de bicicleta) poderia ser interessante para diminuir o atrito nos rolamentos (que diminuiria ao reduzir a carga da polia sobre eles) mas dificultaria o cálculo do momento de inércia além de aumentar a velocidade (e consequentemente a resistência do ar)
- Melhorar a precisão na medida do tempo é provavelmente a condição mais importante para melhorar o desempenho do instrumento. Considerando o tempo de reação humano, não é viável melhorar a precisão além de 0.05s, a menos que se utilize um sistema automatizado.
- Qualquer procedimento que melhore a precisão da medida além de 1% deve levar em conta que nesse caso o efeito da resistência do ar não poderia ser negligenciado (vide Eq.(15) e seria então necessário fazer as correções adequadas ou tomar providências para diminuir o efeito.
- Fica óbvio que a massa do barbante não pode, em geral, ser desprezado pois o seu valor é bastante superior ao da precisão estimada na medida da sobre-carga e das massas M_1 e M_2 . O uso de um fio de nylon do tipo usado em linhas de pesca não é recomendável pois, apesar de ser bem mais leve, ele é bastante elástico e por causa disso os resultados obtidos foram bastante ruins.
- Para as nossas condições experimentais, o empuxo do ar sobre a sobre-carga pode ser desprezado pois envolve forças da ordem da razão entre a densidade do ar (1.29Kg/m^3) e a do metal com que é feita a sobre-carga ($7-8 \times 10^3 \text{ Kg/m}^3$), resultando num erro no valor da sobre-carga da ordem de 0.02%, quase duas ordens de grandeza menor que na mais otimista das condições possíveis de operação descrita na Fig.2.

VI Conclusões

Apesar de ser óbvio, é interessante sublinhar que o presente instrumento não é adequado para se medir “g”

com a precisão necessária, e que existem outros instrumentos específicos para isso. O valor obtido para “g” neste experimento serve apenas para verificar a adequação do modelo adotado e para verificar se todos os fatores relevantes para a operação do instrumento foram corretamente considerados. Neste artigo mostramos que a máquina de Atwood é um instrumento relativamente complexo, no sentido que ele é afetado por fatores diversos, cujos efeitos em muitos casos são difíceis de equacionar com precisão. Mostramos que alguns dos fatores que normalmente são desprezados (resistência do ar, massa do barbante, atrito) devem ser considerados com cuidado, dependendo do grau de precisão requerido e das condições de trabalho. Finalmente e sobretudo, mostramos o interesse de estudarmos a propagação de erros não somente para estimar a incerteza esperada para o valor a ser calculado (neste caso “g”) mas sobretudo para analisar o efeito dos diferentes elementos sobre a medida que se quer obter. Podemos assim determinar quais são as melhores condições de operação e quais mudanças seriam interessantes para melhorar o desempenho do instrumento.

Agradecimentos

Agradecemos à Coordenação de Graduação do IFGW-UNICAMP que emprestou o material necessário para os experimentos. Agradecemos também aos Profs. Marta S.M.Mantovani e Eder Cassola Molina do IAG/USP-São Paulo-SP assim como à Stephen Hallinan de Geosystem srl., Milan/Italia, pelas informações interessantes e dados sobre a aceleração da gravidade da Terra na área de interesse.

References

- [1] Paul A. Tipler, “*Física 1*”, Guanabara Dois S.A. Rio de Janeiro (1978).
- [2] Robert M. Eisberg, Laurence S. Lerner, “*Física - Fundamentos e Aplicações*”, volume 1, McGraw-Hill (1981).
- [3] Hugh D. Young, “*Statistical treatment of experimental data*”, McGraw-Hill New York, San Francisco, Toronto, London (1962).
- [4] Marta S. M. Mantovani, Comunicação pessoal: Medido no Observatório Abrão de Morais, IAG, Valinhos, latitude:-23°06'15" e longitude:-46°57'50" com um gravímetro absoluto e gravímetros de mola, do tipo L&Romberg G.