

Uma Montagem Simples e Barata para Testar o Modelo $\vec{F} = -b\vec{v}$ para a Força de Resistência do Ar em Baixas Velocidades

(A simple, non-expensive set up in order to test the model $\vec{F}_R = -b\vec{v}$ for the resistive force of air at low velocities)

Wilton P. Silva, Cleide M. D. P.S. Silva e Jürgen W. Precker

Departamento de Física, Centro de Ciências e Tecnologia

Universidade Federal da Paraíba, 58109-970, Campina Grande, PB, Brasil

wilton@openline.com.br

Recebido em 10 de Novembro, 1998

Neste artigo é proposta uma montagem simples e barata para a realização de um experimento com um corpo em queda, envolvendo a força de resistência do ar em baixas velocidades. Nesta montagem utiliza-se um sistema mecânico para a medição de pequenos intervalos de tempo, com o qual se obtêm os dados para o estudo do comportamento da posição h do corpo versus o tempo t de queda. A expressão teórica para $h(t)$ é deduzida, supondo que a força resistiva seja do tipo $\vec{F}_R = -b\vec{v}$. A função $h(t)$ é ajustada aos dados experimentais e o resultado obtido está em excelente acordo com a previsão teórica para o valor da aceleração da gravidade. Isso indica que o modelo proposto para a força da resistência do ar está correto, e também que a montagem proposta é uma alternativa adequada a um laboratório de ensino.

In this paper we propose a simple, non-expensive set up to realize an experiment of a falling body involving the resistive force of air at low velocities. A mechanical system is used to measure the little time intervals needed by the body to fall a given distance h . The theoretical expression $h(t)$ is deduced assuming a resistive force of the type $\vec{F}_R = -b\vec{v}$. The function $h(t)$ is then fitted to the experimental values and the result shows an excellent agreement with the theoretical prevision of the value of the gravitational acceleration. This indicates that the proposed model for the resistive force of the air is correct and that the proposed set up is an adequate alternative for an education laboratory.

I Introdução

Quando um corpo está em movimento na presença de atmosfera, observa-se que sobre ele atua uma força em sentido contrário ao da velocidade, chamada de força de resistência do ar. Há muito tempo se sabe que em baixas velocidades essa força é dada pela expressão $\vec{F}_R = -b\vec{v}$. Entretanto, em muitos laboratórios de ensino não é feita uma experiência mostrando a validade do modelo porque, apesar de simples, o experimento não é tão barato. As montagens mais simples utilizam um trilho de ar mas, mesmo essas, não são tão acessíveis devido ao custo do compressor, e por necessitar de um dispositivo eletrônico ou de um faiscador para a medição de pequenos intervalos de tempo [1]. Neste artigo proporemos uma experiência alternativa

para discutir a validade do modelo $\vec{F}_R = -b\vec{v}$. O arranjo experimental proposto aqui envolve materiais de fácil aquisição, a um custo total de, no máximo, R\$ 20,00. Além disso, o arranjo é muito simples, sendo que o sistema de medição de pequenos intervalos de tempo é mecânico, o que facilita a montagem mesmo por estudantes sem conhecimento na área de eletrônica. O material necessário à montagem consta de um relógio com cronômetro, que pode ser comprado de vendedores ambulantes por cerca de R\$ 10,00. Além disso, necessitamos de uma ratoeira, um pregador de roupas, 2,5 m de fio duplo, uma bola de assopro, uma pedra com uma massa de aproximadamente 20 g, uma escala milimetrada e um pedaço de cordão. Este material faz parte do KEM - Kit para Experiências de Mecânica, desenvolvido e patenteado pelos dois primeiros autores

deste artigo.

II Aspectos teóricos relevantes

Considere que estejamos interessados em descrever a translação de um corpo em queda. Para tal, suponhamos que o corpo seja abandonado a partir do repouso, de um ponto O, que consideraremos como ponto de referência. À medida em que a velocidade aumenta, durante a queda, deve aumentar também a força de resistência do ar, em sentido oposto ao do movimento. Admitamos que após um tempo t o móvel tenha sido deslocado para uma posição \vec{h} . Um diagrama de corpo livre para o corpo em queda é mostrado na Fig. 1.

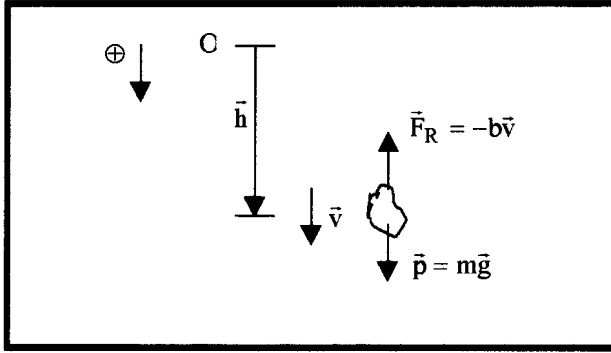


Figura 1. Queda de um corpo de massa m no ar. Em $t = 0$, o corpo é abandonado na posição $h = 0$ e começa a queda. No corpo atuam a força de resistência F_R e a força gravitacional p .

No diagrama, \vec{p} é o peso do corpo e \vec{F}_R é a força de resistência do ar sobre ele. Nesse estudo estamos supondo que essa força de resistência seja dada por $-b\vec{v}$, sendo b um parâmetro que depende da geometria do corpo. Como estamos interessados apenas na translação, podemos escrever a Segunda Lei de Newton para estudar o movimento do corpo do seguinte modo [2], [3], [8]:

$$mg - bv = m \frac{dv}{dt}. \quad (1)$$

A Eq. (1) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{1}{v - \frac{mg}{b}} dv = -\frac{b}{m} dt. \quad (2)$$

Assim, a expressão da velocidade do corpo após um tempo t é dada pela integração da Eq. (2):

$$\int_0^v \frac{1}{v - \frac{mg}{b}} dv = -\int_0^t \frac{b}{m} dt. \quad (3)$$

Esta é uma integral simples cujo resultado é:

$$v = v_\ell [1 - e^{-(b/m)t}], \quad (4)$$

onde v_ℓ é a velocidade limiar do copo, dada por $v_\ell = mg/b$.

Naturalmente, como $v = dh/dt$, o resultado (4) nos leva a uma nova equação diferencial dada por

$$dh = v_\ell [1 - e^{-(b/m)t}] dt. \quad (5)$$

Integrando o lado esquerdo da Eq. (5) de 0 a h e o lado direito de 0 a t , obtemos:

$$h = \frac{mg}{b} \left[t + \left(\frac{m}{b} \right) \left(e^{-(b/m)t} - 1 \right) \right]. \quad (6)$$

(6)

Então, caso o modelo $\vec{F}_R = -b\vec{v}$ seja válido para a força de resistência do ar, a equação horária de um corpo em queda é dada por (6).

Apenas como curiosidade, podemos investigar a equação horária dada em (6), para tempos bem menores que aquele em que o corpo atinge a velocidade limiar. Com essa restrição, quer dizer $bt/m \ll 1$, podemos expandir a exponencial da Eq. (6), truncando os termos a partir da quarta ordem. Com isso, teremos [2], [3]:

$$e^{-(b/m)t} \simeq 1 - \frac{b}{m}t + \frac{b^2}{2m^2}t^2 - \frac{b^3}{6m^3}t^3 \quad (7)$$

Substituindo o resultado (7) na Eq. (6), teremos a seguinte equação horária:

$$h \simeq \frac{1}{2}gt^2 - \frac{bg}{6m}t^3. \quad (8)$$

A interpretação da Eq. (8) é bastante óbvia: o termo cúbico é o primeiro termo da correção à queda livre devido à resistência do ar.

Naturalmente, caso admitíssemos $F_R = -bv^2$, um estudo análogo nos levaria ao seguinte resultado:

$$h = (m/b) \ln[\cosh(\sqrt{bg/m}t)]. \quad (9)$$

III Montagem experimental

Inicialmente, proporemos um sistema mecânico para a medição de pequenos intervalos de tempos e, em seguida, apresentaremos o experimento em si.

III.1 Dispositivo de medição do intervalo de tempo de queda

O sistema para acionar e travar o cronômetro é composto de um pregador de roupas (A), de uma ratoeira (B) com um gancho metálico (3) preso à sua base, de um relógio com cronômetro, de 2 m de fio duplo interligando o pregador ao cronômetro e também à ratoeira. Esses elementos devem ser conectados conforme mostra a Fig. 2.

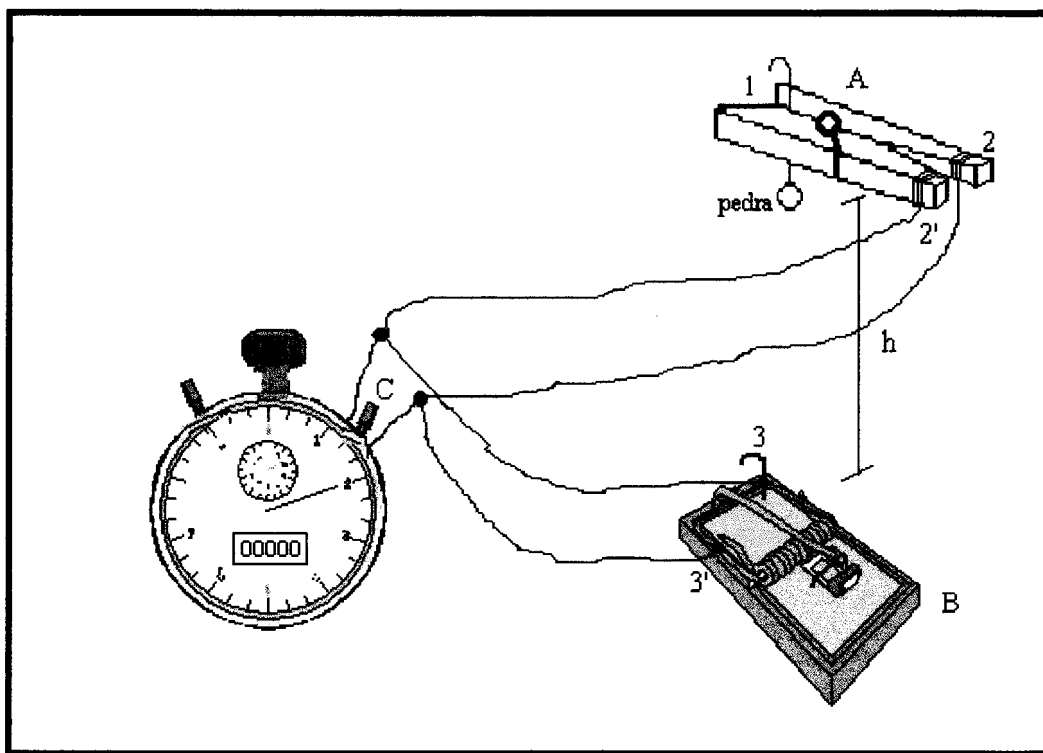


Figura 2. Arranjo experimental para medir o tempo de queda da pedra ao percorrer a distância h .

No relógio, os dois fios são conectados nos pontos que fazem contato ao se pressionar o pino C, que aciona e trava o cronômetro. Suponha, agora, que exista um corpo preso no ponto 1 do pregador A. Para soltar o corpo, devemos pressionar as ‘pernas’ do pregador o que, no caso, produz um contato entre os fios presos nos pontos 2 e 2’. Caso o cronômetro não esteja marcando um intervalo de tempo, será acionado. Quando o corpo abandonado cair sobre a ratoeira, disparando-a, um novo contato elétrico será estabelecido entre as peças 3 e 3’ da ratoeira. Assim, se o operador já tiver folgado o prendedor, o cronômetro travará indicando o intervalo de tempo de queda do corpo. Em geral, com 10 min de treinamento, obtém-se cerca de 70%

de ‘medidas boas’, o que requer pressionar e folgar o mais rapidamente possível o pregador, e ainda atingir o alvo (ratoeira) com o corpo em queda, provocando o desarme da ratoeira. O tempo de resposta do sistema pode ser conhecido medindo-se o tempo de queda da pedra de 20 g de uma altura h conhecida. Esse tempo pode ser comparado com o tempo medido por um sistema eletrônico ou com aquele previsto pela equação de queda livre, utilizando-se o valor nominal da aceleração da gravidade. Assim, os intervalos de tempo medidos com o sistema proposto podem ser corrigidos.

III.2 O arranjo experimental

Para evidenciar o efeito da resistência do ar podemos fazer o arranjo descrito a seguir. Primeiro, podemos amarrar um pequeno cordão na parte oposta à da boca da bola de assopro, objetivando sustentá-la entre as mandíbulas (1) do pregador (A) mostrado na Fig. 2. Depois, podemos encher a bola de assopro e amarrar a pedra de aproximadamente 20 g na sua boca, resultando no arranjo da Fig. 3.

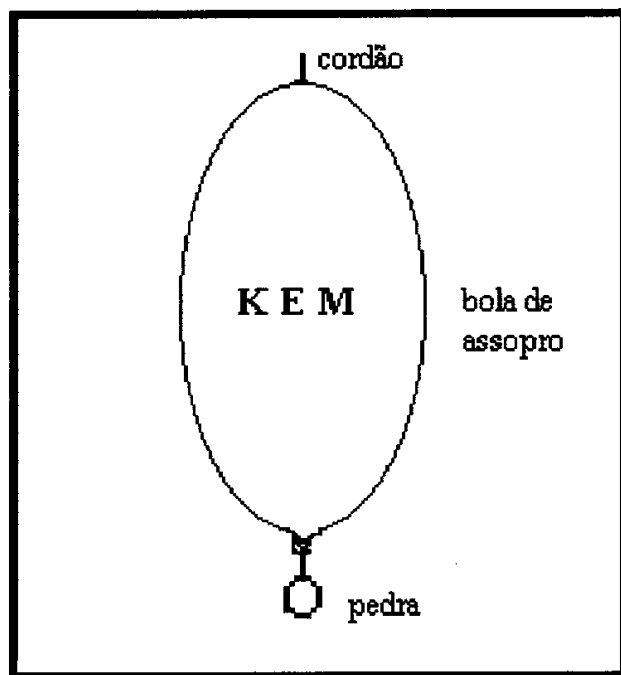


Figura 3. O corpo em queda consiste de uma pedra amarrada a uma bola de assopro que, devido ao grande volume, garante baixas velocidades limiares.

Prendendo-se o cordão entre as mandíbulas (1) do pregador (A) (veja a Fig. 2) e abandonando o sistema de alturas conhecidas, podemos obter uma tabela de h versus t e fazer a análise dos dados obtidos.

IV Resultados

Neste experimento obtivemos a tabela dada a seguir, sendo que o tempo obtido em cada ponto foi resultado da média de 6 leituras na qual foi somado um fator de correção de 0,01 s, devido ao tempo de resposta do sistema de medição de tempo. Este fator foi obtido comparando o tempo de queda de uma pequena pedra

de uma altura conhecida, com aquele determinado pela equação horária da queda livre.

IV.1 Dados coletados

	1	2	3	4	5
h(m)	0,248	0,425	0,675	0,925	1,325
t (s)	0,240	0,320	0,406	0,480	0,593

Tab. 1 - Dados obtidos experimentalmente do deslocamento h do sistema bola de assopro e pedra versus o tempo t de queda.

IV.2 Resultados esperados para a aceleração da gravidade

Cabe aqui observar que os dados foram coletados na cidade de Campina Grande, PB (Brasil), localizada na latitude $7,5^\circ$ sul. Como a gravidade ao nível do mar, g_{nm} , é dada por [4]

$$g_{nm} = 9,7807(1 + 0,00530 \sin^2 \phi)^1, \quad (10)$$

sendo ϕ a latitude, devemos ter: $g_{nm} = 9,782 \text{ m/s}^2$. A altitude da cidade é $\Delta h = 640 \text{ m}$ e, então, podemos fazer uma correção no valor determinado para g através da seguinte expressão, obtida da Lei da Gravitação Universal:

$$g = \frac{GM}{(R_{nm} + \Delta h)^2},$$

onde G é a constante de Gravitação Universal, M é a massa da terra e R_{nm} é o raio equatorial ao nível do mar, valendo $R_{nm} = 6,378 \times 10^6 \text{ m}$. Como $(\Delta h/R_{nm}) \ll 1$, podemos expandir a expressão anterior, desprezar os termos a partir da segunda ordem e escrever:

$$g = g_{nm} \left[1 - 2 \frac{\Delta h}{R_{nm}} \right] \quad (11)$$

Substituindo $\Delta h = 640 \text{ m}$ e $R_{nm} = 6,378 \times 10^6 \text{ m}$ na Eq. (11), obtemos $g = 9,780 \text{ m/s}^2$ que é o valor esperado para a aceleração da gravidade no local da experiência.

IV.3 Resultados obtidos para a aceleração da gravidade

Ajustando os dados coletados à função $h = (1/2)gt^2$, obtemos $g = (7,816 \pm 0,034) \text{ m/s}^2$ o que indica que o modelo da queda livre é realmente inadequado. Por outro lado, ajustando os dados à função dada na Eq. (8),

¹ Devido a um engano na impressão desta fórmula na referência [4], ela é apresentada erroneamente com um sinal de menos.

percebemos que o cálculo da aceleração da gravidade resulta em $g = (9,50 \pm 0,20) \text{ m/s}^2$. Isso deve significar que a razão b/m para o sistema em queda não é muito pequena, ou então que o modelo $\vec{F}R = -b\vec{v}$ não está correto para a força de resistência do ar, ou ainda que a montagem proposta não é adequada. Para descobriremos qual é a alternativa correta, vamos reescrever a Eq. (6) na forma [3]

$$h = C_1 C_2 t + C_2 [e^{C_1 t} - 1], \quad (12)$$

com $C_1 = b/m$ e $C_2 = m^2 g/b^2$. Comparando o parâmetro C_1 com o parâmetro C_2 percebemos que $C_2 = g/C_1^2$ o que resulta em

$$g = C_2 C_1^2. \quad (13)$$

Então, fazendo o ajuste dos dados à Eq. (12), podemos obter o valor da aceleração da gravidade através de (13). Por tratar-se de uma função não linear, devemos atribuir valores iniciais aos parâmetros C_1 e C_2 , a serem determinados. Fazendo $C_{10} = 0,5$ e $C_{20} = 1,0$, podemos utilizar o software "AJUSTE" [5], cujo desenvolvimento será objeto de futuros artigos, e obter:

$$\begin{aligned} C_1 &= 1,37525\dots s^{-1} \quad \text{e} \quad \sigma_{C_{1m}} = 0,213351\dots s^{-1} \\ C_2 &= 5,15890\dots m \quad \text{e} \quad \sigma_{C_{2m}} = 1,43334\dots m. \quad (14) \\ Cov(C_1, C_2) &= -0,30575\dots m/s. \end{aligned}$$

Aqui, as incertezas foram obtidas impondo-se um valor igual a 1 ao qui-quadrado reduzido do ajuste (χ_{red}^2), o que torna tal ajuste verossímil. Substituindo os resultados (14) na Eq. (13), encontramos:

$$g = (9,76 \pm 0,32) \text{ m/s}^2.$$

O desvio padrão do valor médio de g foi obtido através da fórmula geral de propagação de erros, obtida com aproximação de primeira ordem. Para uma função $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$, a fórmula para o desvio é dada por [6]

$$\sigma_{f_m} = \sqrt{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j} \frac{\partial f}{\partial z_k} \text{cov}(z_j, z_k)}. \quad (15)$$

O cálculo do erro propagado em uma função devido às covariâncias entre as variáveis independentes

está disponível no software 'AJUSTE', que também foi utilizado neste artigo para este fim. Como utilizamos apenas 5 dados experimentais no ajuste, o nível de confiança do intervalo obtido para g é de cerca de 63% [7]. Multiplicando o desvio padrão do valor médio de g , σ_{gm} , por 1,4, elevamos o nível de confiança para cerca de 68%. Então:

$$g = (9,76 \pm 0,36) \text{ m/s}^2 \quad (68\%).$$

Naturalmente, poderíamos calcular também o parâmetro b , o que iria requerer a medição da massa do sistema. Como planejamos um experimento barato, não previmos o uso de uma balança e, por isso, não faremos tal cálculo, o que seria possível com a utilização do KEM - Kit para Experiências de Mecânica, que inclui uma balança entre seus acessórios.

Há que se ressaltar que o ajuste dos dados à Eq. (9) resulta em $g = (8,92 \pm 0,14) \text{ m/s}^2$, o que permite afirmar que o modelo $F = -bv^2$ para a resistência do ar realmente não é adequado aos dados experimentais.

V Conclusões

A análise do resultado experimental obtido para a aceleração da gravidade, considerado bom, nos leva a duas conclusões relevantes.

A primeira é que, para as velocidades envolvidas, o modelo para a resistência do ar é realmente satisfatório.

Uma segunda conclusão é que o sistema mecânico proposto para a medição de pequenos intervalos de tempo satisfaz o rigor experimental desejado para um laboratório de ensino: a precisão nos resultados foi de 3,7%, enquanto que a acurácia foi de 0,2%.

Uma observação sobre as dificuldades de reprodução das condições experimentais se faz necessária. Isso se deve ao fato de que uma bola de assopro poder ser enchida de infinitas formas diferentes, resultando em parâmetros b/m diferentes. Entretanto isso não chega a ser tão importante porque o estudo da queda do sistema massa/bola de assopro em diferentes situações leva, invariavelmente, às mesmas conclusões que obtivemos aqui: um bom acordo entre o valor experimental de g e o valor da previsão teórica. Então, independentemente das dificuldades de reprodução das condições experimentais, podemos admitir a validade do modelo

$\vec{F} = -b\vec{v}$ em baixas velocidades e, conseqüentemente, a eficácia da montagem proposta.

Referências

1. Vuolo, José H. *Fundamentos da Teoria dos Erros*, 1a Ed. Editora Edgard Blücher (1992), pag. 171.
2. Symon, Keith R. *Mechanics*, 2a Ed., Addison - Wesley Publishing Company (1967), pag. 35.
3. Silva, Wilton P. e Silva, Cleide M. D. P. S. *Mecânica Experimental para Físicos e Engenheiros*, Originais submetidos à UFPB/Editora Universitária, pag. 155.
4. Beer, Ferdinand P. e Jr, E. R. Johnston *Mecânica Vetorial para Engenheiros: Dinâmica* VOL. II - 3a. Ed., S. Paulo, McGraw-Hill do Brasil (1980), pag. 70.
5. Ajuste, V 12.8, DF/CCT/UFPB (1998) - Silva, Wilton P. e Silva, Cleide M. D. P. S.
6. Silva, Wilton P. e Silva, Cleide M. D. P. S. *Tratamento de Dados Experimentais* 2a Ed. (Revisada e Ampliada), UFPB/Editora Universitária (1998) pag. 112.
7. Helene, Otaviano A. M. e Vanin, Vito R. *Tratamento Estatístico de Dados em Física Experimental*, Edgard Blücher Ltda (1981) pag. 91
8. Alonso, Marcelo e Finn, Eduard J. *Física: um Curso Universitário* VOL. I (*Mecânica*), Ed. Edgard Blücher Ltda, São Paulo (1972) pag, 164.