A Função Geratriz para um Oscilador Harmônico Linear, Segundo a Teoria das Transformações Canônicas

(The generating function for a linear harmonic oscillator, by canonical transformations theory.)

Gustavo Jesús Bracho Rodríguez

Instituto de Física - UFRGS,

Caixa Postal 15051, CEP: 91501-970, Porto Alegre - RS, Brasil

Recebido em 7 de Março, 1998

Se apresenta um método para construir a função geratriz para um oscilador harmônico linear que transforma o movimento oscilatório em um movimento linear e retilíneo; isto é, $F_1(q,Q) = \frac{1}{2}m\omega q^2 \cot(a,Q)$. Para tal efeito, não é necessário ter conhecimento avanzado sobre a teoria de Hamilton-Jacobi, como também do formalismo da variáveis de ângulo de ação.

The generating function for a linear harmonic oscillator $F_1(q,Q) = \frac{1}{2}m\omega q^2 \cot(a,Q)$ which transforms oscillator motion into uniform rectilinear motion is constructed without using advanced knowlodge of the Hamilton-Jacobi theory or action angle variables.

Para os físicos especialistas em Mecânica Estatística e Teoria Quântica, as transformações canônicas é uma poderosa ferramenta de trabalho.

As transformações canônicas que tal qual como todos nós as conhecemos, que preservam o formalismo Hamiltoniano das equações de movimento são de grande interesse na teoria da transformação da dinâmica clássica [1]. Embora raramente seja resolvido um problema dinâmico por transformações canônicas, existe uma ampla compreensão do formalismo Hamiltoniano do espaço de fase . Geralmente este conhecimento do espaço de fase, é atingido estudando as transformações canônicas.

Em muitas situações é escolhido o oscilador harmônico na grande parte dos livros de texto que tratam do assunto, devido a sua física familiar e algebra simples, que ajudam ao estudante a obter uma melhor compreensão dos procedimentos empregados. Para tal finalidade, a função geratriz $F_1(q,Q) = \frac{1}{2}m\omega q^2 \cot(a,Q)$ é considerada [2], onde a é uma constante. Infelizmente não existe nenhum método padrão simples para determinar a função geratriz. Às vezes a função geratriz desejada pode ser encontrada por um método intuitivo, ou resolvendo a equação de Hamilton-Jacobi, ou ainda, pela utilização de avanzados conhecimentos de variáveis de ângulo de ação.

O objetivo principal deste trabalho, é a de apresentar um método alternativo para determinar a função geratriz de um oscilador harmônico linear sem fazer uso de conhecimentos avanzados da teoria de Hamilton-Jacobi, nem muito menos de variáveis de ângulo de ação, mais sim mediante a utilização das transformações canônicas.

O Hamiltoniado $\mathcal{H}$ de um oscilador harmônico linear de masa m tem a forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2} \\ &= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \end{aligned} \tag{1}$$

e as equações de movimento de Hamilton são

$$\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m} \tag{2}$$

e

$$\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = -m\omega^2 q \tag{3}$$

mediante a utilização destas equações é obtida uma equação de movimento familiar para todos nós

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0 \tag{4}$$

cuja solução é

$$q = C \sin(\omega t + \alpha) \tag{5}$$

onde $\alpha = 0$ (imposta pela condição inicial $q(0) = 0$).

Derivando a eq.(3) em relação ao tempo, e substituindo na eq.(1) é possível escrever a Hamiltoniana $\mathcal{H}$ em termos da amplitude C:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} m\omega^2 C^2 \ . \tag{6}$$

Como a energia potencial é independente de $\dot{q}$, isto permíte-nos considerar $\mathcal{H}$ como a energia do sistema, então

$$E = \frac{1}{2} m\omega^2 C^2 \tag{7}$$

ou

$$C = \sqrt{\frac{2mE}{\omega^2}} \ . \tag{8}$$

Agora se consideramos um novo sistema de coordenadas (P, Q), a Hamiltoniana para o caso de uma partícula livre, que chamaremos de $\mathcal{H}'$ é representada por

$$\mathcal{H}'(P,Q) = \frac{P^2}{2m} \ . \tag{9}$$

É natural pensar que a Hamiltoniana $\mathcal{H}'$ seja também igual à energia $E = P^2/2m$. Ao combinar esta última equação com a eq.(7), obtemos:

$$P = m\omega C \tag{10}$$

Nesta situação as equações de movimento de Hamilton estão dadas por

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \frac{P}{m} \\ \dot{P} &= 0 \end{aligned} \tag{11}$$

sendo as soluções destas duas últimas equações dadas por

$$\begin{aligned} Q &= \frac{Pt}{m} + \beta = \frac{Pt}{m} \\ P &= P_0 = constante \ , \end{aligned} \tag{12}$$

tendo como condições iniciais $Q(0) = 0$ e $P(0) = P_0$.

Procedendo à eliminação do tempo t como um parâmetro comum entre as soluções apresentadas nas eqs.(5) e (12) respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned} q &= C \sin \omega t \\ &= C \sin\left(\frac{Q}{C}\right) \\ &= \frac{P}{m\omega} \sin\left(m\omega \frac{Q}{P_0}\right) \end{aligned} \tag{13}$$

$$p = m\dot{q} = P\cos\left(m\omega\frac{Q}{P_0}\right) \tag{14}$$

Existe uma via para determinar se as equações (13) e (14) são transformações canônicas; esta via consiste em verificar si a forma diferencial

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - \sum_{i=1}^{n} P_i \delta Q_i = \delta F \tag{15}$$

é um diferencial exato quando expresado em termos das variáveis (q, P), então a transformação dada pelas $2n$ funções $Q_i(q,p,t)$, $P_i(q,p,t)$ é canônica e F é a função geratriz [3]. Se estabelece que as equações (13) e (14) são canônicas, devido à condição necessária e suficiente obtendo desta forma um diferencial exato:

$$\begin{aligned} p\delta q - P\delta Q &= \\ &= P\cos\left(m\omega\frac{Q}{P_0}\right)\delta q - \frac{m\omega q}{\sin\left(m\omega\frac{Q}{P_0}\right)}\delta Q \end{aligned} \tag{16}$$

ou mediante a utilização da eq.(13)

$$\begin{aligned} p\delta q - P\delta Q &= \\ &= P\cot\left(m\omega\frac{Q}{P_0}\right)\delta q - \frac{m\omega q^2}{q\sin\left(m\omega\frac{Q}{P_0}\right)}\delta Q \\ &= m\omega q\cot\left(m\omega\frac{Q}{P_0}\right)\delta q - \frac{m^2\omega^2 q^2}{P_0\sin^2\left(m\omega\frac{Q}{P_0}\right)}\delta Q \end{aligned}$$

$$= \quad \delta \left[\frac{1}{2} m\omega q^2 \cot \left(m\omega \frac{Q}{P_0} \right) \right] \tag{17}$$

que é um diferencial exato. Comparando a eq.(17) com eq.(15), vemos facilmente, que o gerador da transformação é do tipo $F_1(q, Q)$:

$$F_1(q, Q) = \frac{1}{2} m\omega q^2 \cot(a, Q)$$

Na análises anterior, demonstramos que efetivamente não é necessário fazer uso da teoria de Hamilton-Jacobi, e muito menos dos formalismo das variáveis de ângulo de ação para construir a uma função geratriz capaz de transformar o movimento oscilatório em um movimento linear.

Referências

1. Mann, R. A., *The Classical Dynamics of Particles, Galiean and Lorentz Relativity.* Academic Press, New York. (1974)
2. Goldstein, H., *Mecánica Clásica.* Editorial Aguilar, Madrid, (1975).
3. Chow, T. L., *Classical Mechanics.* John Wiley. New York (1995)