As Transformações de Calibre são Transformações Canônicas?

(the gauge transformations are canonical transformations)

Gustavo Jesús Bracho Rodríguez
Instituto de Física - UFRGS,
Caixa Postal 15051, CEP: 91501-970, Porto Alegre - RS, Brasil

Recebido em 7 de Março, 1998

Se ilustra uma dirivação simples e direta das propriedades das transformações canônicas partindo das transformações de *calibre*. Para viavilizar esta derivação não será necessário utilizar tanto o princípio de Hamilton quanto o cálculo de variações.

A simple and direct derivation of the properties of the canonical transformations from the transformations of gauge appears. This derivation does not need the application of the principle of Hamilton far from it of calculate of variations.

O Lagrangiano de um sistem dinâmico é definido somente considerando a soma da derivada total no tempo de qualquer função de coordenadas e tempo. Como exemplo, se consideramos $\mathcal{L}(q,\dot{q},t)$ e $\mathcal{L}'(q,\dot{q},t)$ sejam duas escolhas de Lagrangianos diferentes, e se eles diferem só pela derivada total com respecto ao tempo da mesma função $f(q,t)$ de coordenadas e tempos.

$$\mathcal{L}'(q,\dot{q},t) = \mathcal{L}(q,\dot{q},t) + \frac{df(q,t)}{dt} \tag{1}$$

então eles são dinâmicamente equivalentes, ou seja, ambos $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}'$ satisfazem as equações de movimento de Lagrange [1]. Geralmente a eq.(1), também é considerada como uma transformação de calibre.

O objetivo deste trabalho é demonstrar que uma transformação de calibre tal como a apresentada na eq.(1), é também uma transformação canônica, preservando a sua vez também as equações de movimento de Hamilton.

Agora demonstraremos primeiro a equivalência de $\mathcal{L}(q,\dot{q},t)$ e $\mathcal{L}'(q,\dot{q},t)$; para tal finalidade vamos a começar com as equações de movimento de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0 \tag{2}$$

onde $\mathcal{L} = T - V$ é o Lagrangiano do sistema. Ao diferenciar uma função arbitrária $f(q,t)$ com respecto ao tempo, obtemos

$$\frac{df}{dt} = \sum_j \frac{\partial f}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial f}{\partial t} \tag{3}$$

Procedendo à derivação da eq.(3) com respecto a $\dot{q}_j$, temos

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q_j} \tag{4}$$

derivando novamente com respecto a t.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\frac{df}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial q_j}\ . \tag{5}$$

Se procedemos à mudança da ordem de diferenciação do lado direito da eq.(5), obtemos que

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\frac{df}{dt} = \frac{\partial}{\partial q_j}\frac{df}{dt}\ . \tag{6}$$

Agora se procedemos à comparação da eq.(2) com a eq.(6), observamos sem dificultade nenhuma que a expresão $df(q,t)/dt$, satisfacem idênticamente as equações de Lagrange. Como consequência disto, é possível adicionar $df(q,t)/dt$ ao Lagrangiano $\mathcal{L}$ e criar um novo Lagrangiano $\mathcal{L}'$

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{df}{dt} \tag{7}$$

que é dinâmicamente equivalente a $\mathcal{L}$. Mas esta transformação de calibre produz uma mudança no momento generalizado conjugado para q_j:

$$\begin{aligned} p_j^{'} &= \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}_j} \\ &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\mathcal{L} + \frac{df}{dt}\right) \\ &= p_j + \frac{\partial f}{\partial q_j} \end{aligned} \tag{8}$$

onde foi utilizada a eq.(4).

Para demonstrar que a transformação de calibre (vide eq.(1)), é também uma transformação canônica, temos que trabalhar com o Hamiltoniano transformado $\mathcal{H}'$:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}'(q,p',t) &= \sum_j p_j' \dot{q}_j - \mathcal{L}' \\ &= \sum_j p_j \dot{q}_j - \mathcal{L}' + \sum_j \frac{\partial f}{\partial q_j}\dot{q}_j - \frac{df}{dt} \\ &= \mathcal{H}(q,p,t) - \frac{\partial f}{\partial t} \end{aligned} \tag{9}$$

onde neste caso, foram utilizadas as eqs.(3) e (8) respectivamente. Com isto, as equações de Hamilton ficam conservadas:

$$\dot{p}_j' = -\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial \dot{q}_j} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \dot{q}_j} \tag{10}$$

e

$$\dot{q}_j' = -\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial \dot{p}_j} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \dot{p}_j} \tag{11}$$

devido ao fato que $\partial f(q,t)/\partial t$ não é uma função de $\dot{q}$ e $\dot{p}$.

Com isto fica demonstrado que a transformação de calibre (eq.(1)), pode ser considerada também como uma transformação canônica, e que a função $f(q,t)$, pode ser tratada como a função geratriz. Naturalmente, isto representa um subgrupo muito estreito do conjunto de todas as transformações canônicas utilizadas pelos físicos teóricos.

Referências

[1] Mann, R. A., *Rhe Classical Dynamics of Particle, Galilean and Lorentz Relativity.* Academic Press, New York, Cap. 2, (1974).