A Mecânica de Poucos Corpos

(Mechanics of a few-body)

A. C . M. Stein-Barana
Departamento de Física, IGCE, Unesp, Rio Claro
Caixa Postal 178,
CEP: 13500-970, Rio Claro, SP, Brasil

Recebido em 6 de Agosto, 1998

Discutimos o caso particular, mas não menos interessante e esclarecedor, do problema mecânico de alguns corpos de mesma massa sujeitos a um potencial harmônico de dois corpos.

We discuss the particular case of the mechanical few body problem, assuming equal masses and a two-body harmonic potencials.

I Introdução

Face às dificuldades em abordarmos o problema de muitos corpos para estudantes do curso de mecanica clássica, sugerimos um passo intermediário estudando-se o problema de poucos corpos. É particularmente interessante e elucidativo o caso em que os corpos tem a mesma massa e se define de modo apropriado as coordenadas relativas entre as partículas. A Langrangiana não apresenta termos cruzados e é possível separar variáveis facilitando a solução da equação de Lagrange. No caso de um sistema de muitas partículas é sempre possível separar o movimento do centro de massa, mas as demais coordenadas não. Em geral, resta um sistema complexo de equações acopladas raramente solúvel analiticamente.

A seguir iremos desenvolver os problemas de duas, três e quatro partículas introduzindo coordenadas conhecidas e de domínio comum. São elas: a coordenada de centro de massa R do sistema, a coordenada relativa r_{ij} entre os pares (i,j) de partículas distintas. Uma terceira coordenada relativa é definida entre a coordenada de centro de massa de um par e o par ou partícula restante.

II Problema de dois corpos

Sejam duas partículas de massa m_1 e m_2 e coordenadas de posição $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ em relação à origem do sistema. A massa total do sistema e a massa reduzida são dadas por:

$$M = m_1 + m_2 \tag{1}$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{M} \tag{2}$$

A coordenada de centro de massa é expressa como:

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + M_2\vec{r}_2}{M} \tag{3}$$

e a coordenada relativa entre a partícula 1 e a partícula 2 por:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \tag{4}$$

A Lagrangiana do sistema é

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}_2^{\,2} + V(\vec{r}) \tag{5}$$

Das equações (3) e (4) temos que:

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{\mu}{m_1}\vec{r} \tag{6}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{\mu}{m_2}\vec{r} \tag{7}$$

Expressando (5) em termos de (6) e (7), obtemos a função Lagrangiana apenas em termos das coordenadas $\vec{R}$ e $\vec{r}$.

$$L = \frac{M\dot{\vec{R}}^2}{2} + \frac{\mu\dot{\vec{r}}^2}{2} + V(\vec{r}) \tag{8}$$

A equação de Lagrange para a variável R é dada por:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\vec{R}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\vec{R}} = 0 \tag{9}$$

resultando que o centro de massa se desloca com velocidade $\dot{\vec{R}}$=constante. Se fizermos $\dot{\vec{R}} = 0$, então a Lagrangiana se reduz a:

$$L = \frac{\mu \dot{\vec{r}}^2}{2} + V(\vec{r}) \tag{10}$$

e a equação de Lagrange $\mu\ddot{\vec{r}} = -\frac{\partial V(\vec{r})}{\partial \vec{r}}$ é a equação de movimento de uma única partícula de massa μ sujeita a uma força $\vec{F} = -\partial V(\vec{r})/\partial \vec{r}$..

III Problema de três corpos

Considerando-se que as massas são iguais para as 3 partículas ($m_1 = m_2 = m_3 = m$), definimos do modo usual as novas variáveis:
coordenada do centro de massa

$$\vec{R} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3}{3} \tag{11}$$

coordenada relativa entre as partículas 1 e 2

$$\vec{d} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{2} \tag{12}$$

Definimos a coordenada relativa entre o centro de massa das partículas 1 e 2 e a partícula 3 restante

$$\vec{s} = \left(\frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}\right) - \vec{r}_3 = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2 - 2\vec{r}_3}{2} \tag{13}$$

A Lagrangiana é conhecida como:

$$L = \frac{m\dot{\vec{r}}_1^2}{2} + \frac{m\dot{\vec{r}}_2^2}{2} + \frac{m\dot{\vec{r}}_3^2}{2} + V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) \tag{14}$$

Sendo que podemos expressar $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ e $\vec{r}_3$ em termos das variáveis $\vec{R}$, $\vec{d}$ e $\vec{s}$ como:

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \vec{d} + \frac{\vec{s}}{3} \tag{15}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} - \vec{d} + \frac{\vec{s}}{3} \tag{16}$$

$$\vec{r}_3 = \vec{R} - \frac{2}{3}\vec{s} \tag{15}$$

Trabalhando a Lagrangiana obtemos:

$$L = \frac{m}{2}(3\dot{\vec{R}}^2) + \frac{m}{2}(2\dot{\vec{d}}^2) + \frac{m}{2}\left(\frac{2}{3}\dot{\vec{s}}^2\right) + V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) \tag{18}$$

Observando tal expressão, nota-se que é conveniente redefinir as variáveis como:

$$\vec{R}_{cm} = \sqrt{3}\vec{R} \tag{19a}$$

$$\vec{D} = \sqrt{2}\vec{d} \tag{19b}$$

$$\vec{S} = \sqrt{\frac{2}{3}}\vec{s} \tag{19c}$$

Então, a Lagrangiana fica expressa como uma soma de energias cinéticas e o potencial $V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3)$, notando-se a separação entre o movimento do centro de massa e os movimentos relativos:

$$L = \frac{m}{2}\dot{\vec{R}}_{cm}^2 + \frac{m}{2}\dot{\vec{D}}^2 + \frac{m}{2}\dot{\vec{S}}^2 + V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) \tag{20}$$

No caso particular em que o potencial é tipo oscilador harmônico para cada par de partículas, temos:

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) = \frac{1}{2}k(\vec{r}_{12}^2 + \vec{r}_{13}^2 + \vec{r}_{23}^2) \tag{21}$$

onde:

$$r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$$

Então:

$$V = \frac{1}{2}k(6d^2 + 2s^2) = \frac{1}{2}k\left(6\frac{D^2}{2} + 2\left(\frac{3}{2}\right)S^2\right)$$

$$V = \frac{3k}{2}(D^2 + S^2) \tag{22}$$

Finalmente, a Lagrangiana pode ser escrita como:

$$L = \frac{m\dot{\vec{R}}_{cm}^2}{2} + \frac{m\dot{\vec{D}}^2}{2} + \frac{m\dot{\vec{S}}^2}{2} + \frac{3}{2}k(\vec{D}^2 + \vec{S}^2) \tag{23}$$

As equações de Lagrange fornecem novamente que o centro de massa se desloca com velocidade constante $\dot{\vec{R}}_{cm}^2 = cte$ e a separação de variáveis se faz presente na forma de equações de movimento do mesmo tipo:

$$m\ddot{\vec{D}} - 3k\vec{D} = 0 \tag{24a}$$

$$m\ddot{\vec{S}} - 3k\vec{S} = 0 \tag{24b}$$

IV Problema de quatro corpos (mesma massa)

Novamente, a coordenada de centro de massa é a usual

$$\vec{R} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 + \vec{r}_4}{4} \tag{25}$$

Coordenadas relativas entre as partículas (1 e 2) e (3 e 4):

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{2} \quad \vec{n} = \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_4}{2} \tag{26}$$

Coordenada relativa entre o centro de massa do par (1,2) e o centro de massa do par (3,4).

$$\vec{b} = \left(\frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}\right) - \left(\frac{\vec{r}_3 + \vec{r}_4}{2}\right) = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2 - \vec{r}_3 - \vec{r}_4}{2} \tag{27}$$

onde

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \vec{\omega} + \frac{\vec{b}}{2} \tag{28a}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} - \vec{\omega} + \frac{\vec{b}}{2} \tag{28b}$$

$$\vec{r}_3 = \vec{R} + \vec{n} - \frac{\vec{b}}{2} \tag{28c}$$

$$\vec{r}_4 = \vec{R} - \vec{n} - \frac{\vec{b}}{2} \tag{28d}$$

Então, a Lagrangiana de 4 corpos em termos dessas novas variáveis é:

$$L = \frac{m}{2}(4\dot{\vec{R}}^2) + \frac{m}{2}(2\dot{\vec{\omega}}^2) + \frac{m}{2}(2\dot{\vec{n}}^2) + \frac{m}{2}(\dot{\vec{b}}^2) + V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_4) \tag{29}$$

redefinimos:

$$\vec{R}_{cm} = \sqrt{4R} \tag{30a}$$

$$\vec{\Omega} = \sqrt{2}\vec{\omega} \tag{30b}$$

$$\vec{N} = \sqrt{2}\vec{n} \tag{30c}$$

Para um potencial tipo oscilador harmônico entre cada par de partículas:

$$L = \frac{m}{2}\dot{\vec{R}}_{cm}^2 + \frac{m}{2}\dot{\vec{\Omega}}^2 + \frac{m}{2}\dot{\vec{N}}^2 + \frac{m}{2}\dot{\vec{b}}^2 + 2k(\vec{b}^2 + \vec{\Omega}^2 + \vec{N}^2) \tag{31}$$

Obtemos as equações de Lagrange

$$\dot{\vec{R}}_{cm} = cte \tag{32}$$

$$m\ddot{\vec{\Omega}} - 4k\vec{\Omega} = 0 \tag{32a}$$

$$m\ddot{\vec{N}} - 4k\vec{N} = 0 \tag{32b}$$

$$m\ddot{\vec{b}} - 4k\vec{b} = 0 \tag{32c}$$

V Conclusão

Essa não é uma discussão completa sobre o problema de poucos corpos, mas sim uma técnica a ser sugerida aos alunos do curso de Mecânica Clássica, de maneira a introduzí-los no 'mundo' de mais de uma partícula. Os estudantes podem se sentir estimulados ao cálculo de sistemas com mais de 4 corpos e a procurar um possível algorítmo.

Referências

1. A discussão sobre o problema de dois corpos e coordenadas de centro de massa é apresentada em textos de mecânica clássica; veja por exemplo, T.W.B. Kibble, Mecânica Clássica (Editora Polígono S.A., 1970), pp. 132-135.