O Oscilador Relativístico Forçado

(The forced relativistic oscillator)

Bruno C. C. Mota
Departamento de Física, Universidade Federal de Minas Gerais
Belo Horizonte, MG, Brasil
bruno@fisica.ufmg.br
and
Carlos H. C. Moreira
Departamento de Matemática, Universidade Federal de Minas Gerais
Belo Horizonte, MG, Brasil
cmoreira@mat.ufmg.br

Recebido em 2 de Setembro, 1998

Apresentamos uma abordagem do oscilador harmônico relativístico que, no caso livre, se baseia no uso de funções especiais e, no caso forçado, no uso de expansões em série de correções relativísticas. É apresentada uma sistemática recursiva para obtenção das sucessivas correções que leva à solução de uma cadeia de problemas de osciladores não-relativísticos forçados.

We show a study of the relativistic harmonic oscillator that, in the free case, is based upon the use of special functions and, in the forced case, upon the use of expansions in series of relativistic corrections. A systematic recursive scheme to obtain the successive corrections by solving a chain of forced non-relativistic oscillator problems is presented.

I Introdução

As equações de movimento de Newton admitem generalizações relativísticas que apenas em um número limitado de casos podem ser resolvidas explicitamente. Contudo, vale o princípio pelo qual as soluções relativísticas devem se reduzir às soluções não-relativísticas, aqui denominadas clássicas, no limite $c \to \infty$ e por isso faz sentido procurar soluções na forma de série de potências de c^{-2}, onde o termo de ordem zero corresponde à solução clássica e os demais são correções relativísticas de ordem crescente. Neste trabalho desenvolvemos um estudo das soluções da equação de movimento do oscilador harmônico relativístico em uma dimensão espacial. Abordaremos o caso livre (sem forçamento) e o caso forçado senoidalmente. Apesar da não-linearidade das equações diferenciais, ainda é possível obter vários resultados interessantes na forma de séries de potências. Para o caso livre destacamos o período da oscilação e para o caso forçado a trajetória $x(t)$ e a energia absorvida pelo sistema. Os métodos matemáticos empregados são todos acessíveis a alunos de cursos de graduação em ciências exatas: solução de equações diferenciais, séries de potências, funções especiais e transformadas de Laplace.

A equação de força para o oscilador harmônico relativístico unidimensional difere do equivalente clássico pela substituição do momento linear mv pelo momento relativístico

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{1}$$

onde m é a massa de repouso da partícula. Nos livros-texto padrão de Mecânica Clássica (veja por exemplo Goldstein [2]) mostra-se que isso é suficiente para garantir a requerida invariância sob transformações de Lorentz. Portanto, a equação de força se torna

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) = -kx + F_{ext}. \tag{2}$$

No caso livre a equação acima pode ser tratada no espaço fase, isto é, considera-se a velocidade v como função da posição x. Isso será feito na Seção 2 deste artigo e o que se obtém daí é uma expressão para a conservação da energia relativística e a solução inversa $t(x)$ (tempo em função da posição) na forma de combinação de integrais elípticas, que será usada para identificar o período do movimento na forma de série de potências (valor clássico, seguido de correções relativísticas). Na Seção 3 estudamos o oscilador com forçamento senoidal. A dependência explícita da força externa com o tempo inviabiliza o estudo no espaço fase. Ao invés disso, aplicamos técnicas de expansão em série diretamente sobre a equação de movimento, obtendo que as correções relativísticas de ordem crescente são as soluções de uma seqüência de equações diferenciais do tipo oscilador harmônico clássico com forçamento que envolve as correções de ordem mais baixa. Os métodos se aplicam tanto para o caso ressonante quanto para o caso não-ressonante. Obtemos ainda as primeiras correções relativísticas para a energia absorvida pelo oscilador. Considerações finais virão na Seção 4.

II O oscilador relativístico livre

Na equação (2) removemos o termo de força externa e passamos ao espaço fase. Para isso, efetuamos a derivação com respeito ao tempo e usamos a regra da cadeia para fazer a substituição

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}v. \tag{3}$$

A equação diferencial de primeira ordem resultante é separável,

$$m\int\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} v\,dv = -k\int x\,dx, \tag{4}$$

e pode ser integrada explicitamente, fornecendo

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{kx^2}{2} = E. \tag{5}$$

A constante de integração E é a energia total relativística do sistema, que se conserva ao longo da trajetória. Observe que a energia relativística difere da energia total clássica pela inclusão da energia de repouso mc^2 e por termos de ordem c^{-2}.

$$E = mc^2 + \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} + \mathcal{O}(c^{-2}) \tag{6}$$

Na Figura 1 traçamos diagramas de fase para os osciladores harmônicos clássico e relativístico. Na horizontal temos a posição x e na vertical a velocidade v. Utilizamos os valores $c = 1$, $k = 5$ e $m = 1$. Cada valor de E fornece uma curva sobre o diagrama de fase. O valor mínimo aceitável para a energia é mc^2, o que corresponde somente ao ponto $(0, 0)$. As energias usadas na Figura 1 são 1.01, 1.05 e de 1.25 a 7.00, com incrementos fixos de 0.25. Como era de se esperar, no caso clássico (equação 6 sem os termos de ordem c^{-2} ou superior) obtemos elipses e no caso relativístico (equação 5) curvas semelhantes a elipses para energias mais baixas, que vão se achatando na direção de v a medida que v_{max} se aproxima de c.

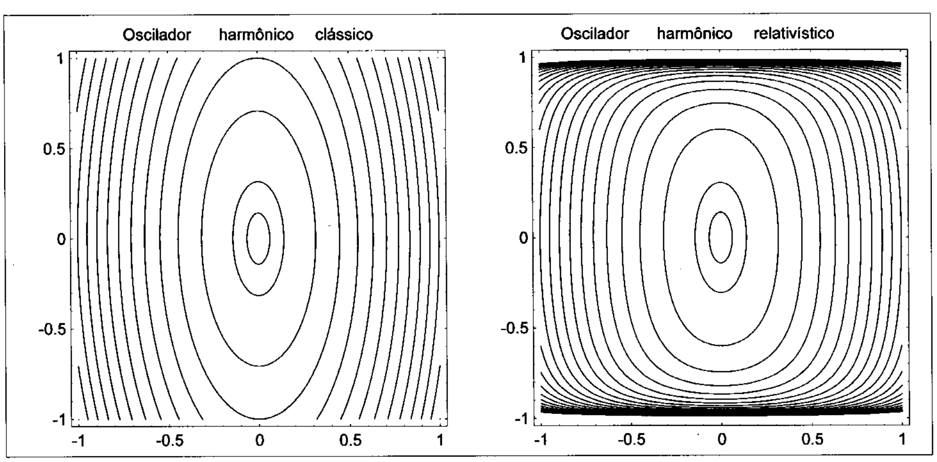

Figura 1. Diagramas de fase: posição por velocidade.

Na equação (5) isolamos v,

$$v = \frac{dx}{dt} = c\sqrt{1 - \left(\frac{mc^2}{E - \frac{1}{2}kx^2}\right)^2}, \quad (7)$$

voltando assim para as variáveis x e t. A nova equação diferencial é de primeira ordem e também separável. Escolhemos a condição inicial $x(0) = 0$, obtendo

$$t(x) = \frac{1}{c}\int_0^x \left[1 - \left(\frac{mc^2}{E - \frac{1}{2}ks^2}\right)^2\right]^{-1/2} ds. \quad (8)$$

Por conveniência notacional, defina $\kappa = k/2mc^2$ e denote por b a amplitude do movimento, ou seja, o módulo do valor de x correspondente a $v = 0$ na equação da energia relativística (5). Assim podemos escrever

$$t(x) = \frac{1}{c}\int_0^x \left\{1 - \frac{1}{[1 + \kappa(b^2 - s^2)]^2}\right\}^{-1/2} ds \quad (9)$$

e após alguma manipulação algébrica chegamos à expressão

$$t(x) = \frac{1}{c}\int_0^x \frac{1 + \kappa(b^2 - s^2)}{\sqrt{2\kappa(b^2 - s^2)\left[1 + \frac{1}{2}\kappa(b^2 - s^2)\right]}} ds. \quad (10)$$

Implementamos a mudança de variável $s = b\,\mathrm{sen}\,\varphi$ e com isso chegamos a

$$t(x) = \frac{1}{c}\left[\frac{b}{\lambda}\,E\left(\mathrm{arcsen}\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{b}}, \lambda\right) - \frac{\lambda}{\kappa b}\,F\left(\mathrm{arcsen}\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{b}}, \lambda\right)\right], \quad (11)$$

onde

$$\lambda = \sqrt{\frac{\kappa b^2}{2 + \kappa b^2}} \quad (12)$$

e as funções $F(.,.)$ e $E(.,.)$ são as integrais elípticas de primeira e segunda espécie (veja, por exemplo, [3]), dadas respectivamente por:

$$F(\theta, \lambda) = \int_0^\theta \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \lambda^2 \mathrm{sen}^2\varphi}}, \quad (13)$$

$$E(\theta, \lambda) = \int_0^\theta \sqrt{1 - \lambda^2 \mathrm{sen}^2\varphi}\, d\varphi. \quad (14)$$

Nosso interesse principal é calcular o período de oscilação e para tanto, a exemplo de Goldstein [2], usamos o fato que exatamente um quarto do período total é gasto para a partícula ir da origem até $x = b$. Assim

$$T = \frac{4}{c}\left[\frac{b}{\lambda}\,E\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) - \frac{\lambda}{\kappa b}\,F\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right)\right]. \quad (15)$$

As integrais elípticas completas admitem expansões em séries de potências [3]:

$$F(\frac{\pi}{2}, \lambda) = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right]^2 \lambda^{2n}\right\}, \quad (16)$$

$$E(\frac{\pi}{2}, \lambda) = \frac{\pi}{2}\left\{1 - \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right]^2 \frac{1}{2n-1}\,\lambda^{2n}\right\}, \quad (17)$$

e daí se obtém a seguinte expansão para T:

$$T = \frac{2\pi}{c\sqrt{2\kappa}}\sum_{n=o}^{\infty}\left[\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right]^2 \frac{2n + 1 + \kappa b^2}{(1 - 2n)\sqrt{1 + \kappa b^2/2}}\left(\frac{\kappa b^2}{2 + \kappa b^2}\right)^n. \quad (18)$$

A série de potências acima possui raio de convergência igual a 1 e assim a expressão acima será válida para todo $\kappa > 0$. Coletando termos de ordem mais baixa e usando a definição de κ, segue que

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\left[1 + \frac{3kb^2}{16mc^2} + \mathcal{O}(c^{-4})\right]. \tag{19}$$

Como era de se esperar, o termo dominante para c grande coincide com o período do oscilador harmônico clássico. A primeira correção relativística de T corresponde a 3/8 da razão entre a energia potencial máxima e a energia relativística de repouso. Vale observar que o sinal desse termo aparece trocado no resultado fornecido em [2].

III O oscilador relativístico forçado

Vamos agora adicionar um forçamento externo do tipo senoidal. Portanto, na equação (2) tomamos $F_{ext} = F\,\mathrm{sen}(\omega t)$. Efetuando a derivação temporal indicada, obtemos

$$\ddot{x}\left(1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}\right)^{-3/2} + {\omega_0}^2 x = \frac{F}{m}\,\mathrm{sen}(\omega t). \tag{20}$$

Expandimos o termo da esquerda em série de potências,

$$\ddot{x}\left[1 + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{(2i+1)!}{(2^i\,i!)^2}\left(\frac{\dot{x}^2}{c^2}\right)^i\right] + {\omega_0}^2 x = \frac{F}{m}\,\mathrm{sen}(\omega t), \tag{21}$$

e procuramos soluções para a equação acima na forma de série de potências:

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t)c^{-2} + x_2(t)c^{-4} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x_n(t)c^{-2n}. \tag{22}$$

Note que $x_n(t)c^{-2n}$ é a correção relativística de n-ésima ordem na solução. Derivamos formalmente a expressão acima e substituimos na equação (21). Agrupamos os termos de mesma ordem em c^{-2} e o resultado é:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\ddot{x}_n + {\omega_0}^2 x_n\right)c^{-2n} = \frac{F}{m}\,\mathrm{sen}(\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\,c^{-2n}, \tag{23}$$

onde

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\,c^{-2n} = -\ddot{x}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(2i+1)!}{(2^i\,i!)^2}\left(\frac{\dot{x}^2}{c^2}\right)^i. \tag{24}$$

Da equação acima pode-se obter $f_n(t)$ substituindo a expansão em série (22) e identificando o termo que carrega c^{-2n} no lado direito. Segue imediatamente que $f_n(t)$ é um polinômio nas derivadas primeira e segunda de x_0, x_1,…,x_{n-1}. Na equação acima devemos igualar termos de mesma ordem em c^{-2}, obtendo uma seqüência de equações diferenciais do tipo de oscilador harmônico clássico forçado. A equação para $x_0(t)$ carrega o forçamento externo senoidal e é exatamente a mesma equação diferencial que se aplica ao caso não-relativístico:

$$\ddot{x}_0 + {\omega_0}^2 x_0 = \frac{F}{m}\,\mathrm{sen}(\omega t), \tag{25}$$

e portanto, como era de se esperar, esse termo coincide com a solução clássica do problema. Um pouco menos esperado é que cada correção relativística posterior vem a ser solução de uma equação do tipo oscilador harmônico clássico forçado:

$$\ddot{x}_n + {\omega_0}^2 x_n = f_n(t). \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{26}$$

Por exemplo

$$\ddot{x}_1 + {\omega_0}^2 x_1 = -\frac{3}{2}\,\dot{x}_0^2\,\ddot{x}_0, \quad (27)$$

$$\ddot{x}_2 + {\omega_0}^2 x_2 = -\frac{15}{8}\,\dot{x}_0^4\,\ddot{x}_0 - \frac{3}{2}\,\dot{x}_0^2\,\ddot{x}_1 - 3\,\dot{x}_0\,\ddot{x}_0\,\dot{x}_1. \quad (28)$$

A solução de (25) pode ser obtida da forma usual (por exemplo, pelo método dos coeficientes indeterminados, veja [1]). Quando a freqüência ω de forçamento é diferente da freqüência normal de oscilação ω_0 entramos em regime de batimento, com uma solução limitada no tempo. Por simplicidade, tomamos condições iniciais nulas, obtendo nesse caso

$$x_0^{\rm bat}(t) = \frac{F\omega}{m\omega_0(\omega^2 - \omega_0^2)}\,\mathrm{sen}(\omega_0 t) - \frac{F}{m(\omega^2 - \omega_0^2)}\,\mathrm{sen}(\omega t). \quad (29)$$

Se $\omega = \omega_0$, entramos no regime de ressonância, no qual a solução adquire uma parcela com aplitude que cresce linearmente com o tempo.

$$x_0^{\rm res}(t) = \frac{F}{2m\omega^2}\,\mathrm{sen}(\omega t) - \frac{F}{2m\omega}\,t\,\cos(\omega t) \quad (30)$$

Note que a origem do termo ilimitado na solução de ressonância se deve à ação de um forçamento oscilatório com freqüência igual à freqüência natural do sistema, o qual não necessariamente deve estar na forma precisa do lado direito da equação (25). Em conexão com esse fato, é interessante observar que as correções relativísticas x_1, x_2, etc, devem conter termos com amplitude crescente no tempo mesmo quando $\omega \neq \omega_0$, pois no lado direito de (26) comparecem termos envolvendo derivadas de x_0, que trazem termos oscilatórios na freqüência natural. Veja por exemplo as equações (27) e (28).

Pode-se obter recursivamente qualquer número de correções relativísticas. Uma implementação sistemática disso faz uso da transformada de Laplace. Aplicamos a transformada sobre a equação (26), obtendo

$$s^2\mathcal{X}_n(s) - s\,x_n(0) - \dot{x}_n(0) + {\omega_0}^2\mathcal{X}_n(s) = \mathcal{F}_n(s), \quad (31)$$

onde $\mathcal{X}_n = \mathcal{L}\{x_n\}$ e $\mathcal{F}_n = \mathcal{L}\{f_n\}$. Daí segue

$$\mathcal{X}_n(s) = \frac{\mathcal{F}_n(s)}{s^2 + {\omega_0}^2} + \frac{s\,x_n(0) + \dot{x}_n(0)}{s^2 + {\omega_0}^2}. \quad (32)$$

Usando a transformada de Laplace inversa e o teorema da convolução, segue que

$$x_n(t) = x_n(0)\cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{x}_n(0)}{\omega_0}\,\mathrm{sen}(\omega_0 t) + \frac{1}{\omega_0}\int_0^t \mathrm{sen}(\omega_0 t - \omega_0\tau) f_n(\tau)\,d\tau. \quad (33)$$

As condições iniciais para as correções relativísticas x_1, x_2, etc, podem ser zeradas se tomarmos $x_0(0) = x(0)$ e $\dot{x}_0(0) = \dot{x}(0)$.

Como exemplo, calculamos a primeira correção relativística na situação em que ocorreria ressonância clássica, isto é, $\omega = \omega_0$. O cálculo pode ser facilmente executado com um programa de manipulação algébrica. Aqui usamos o *Mathematica* e obtemos

$$\begin{aligned} x_1^{\rm res}(t) = \frac{F^3}{m^3\omega^4}\Big[& -\frac{333}{16384}\,\mathrm{sen}(\omega t) + \frac{51}{16384}\,\mathrm{sen}(3\omega t) + \frac{9\omega}{512}\,t\,\cos(\omega t) \\ & + \frac{27\omega}{4096}\,t\,\cos(3\omega t) + \frac{9\omega^2}{512}\,t^2\,\mathrm{sen}(\omega t) - \frac{15\omega^2}{2048}\,t^2\,\mathrm{sen}(3\omega t) \\ & - \frac{3\omega^3}{256}\,t^3\,\cos(\omega t) + \frac{3\omega^3}{512}\,t^3\,\cos(3\omega t) + \frac{3\omega^4}{512}\,t^4\,\mathrm{sen}(\omega t)\Big] \end{aligned} \quad (34)$$

Em x_0 temos um termo com amplitude que cresce com t. Em x_1 temos um termo que cresce com t^4 e, trabalhando a expressão para x_2, veremos que nesse caso temos um termo que cresce com t^7. De um modo geral, x_n terá termos com amplitude máxima da ordem de t^{3n+1}, multiplicado por $F^{2n+1}\omega^{n-1}m^{-2n-1}$. Incorporando ainda o fator c^{-2n}, concluimos que só podemos garantir a convergência da expansão perturbativa para tempo inferior a

$$t_{max} = \left(\frac{m^2c^2}{F^2\,\omega}\right)^{1/3}. \tag{35}$$

De maneira análoga pode-se calcular as primeiras correções relativísticas no caso não-ressonante (batimento) $\omega \neq \omega_0$. Segue que $x_1(t)$ conterá um termo da forma $t\cos(\omega_0 t)$ e as correções subseqüentes conterão termos com potências mais altas de t. A Figura 2 mostra a forma da primeira correção relativística no caso de batimento e permite observar o crescimento da amplitude com t. Essa peculiariedade não deve ser levada demasiado a sério, pois as correções relativísticas vêm acompanhadas de potências de c^{-2} e só se tornam grandes para tempos extremamente grandes. Além disso, no momento que x_1 se torna significativo em comparação com x_0, o mesmo ocorre para as correções de ordem mais alta e a própria expansão perturbativa se torna duvidosa, pois é obtida sob uma hipótese de convergência que fica arruinada quando cada termo da série se torna grande.

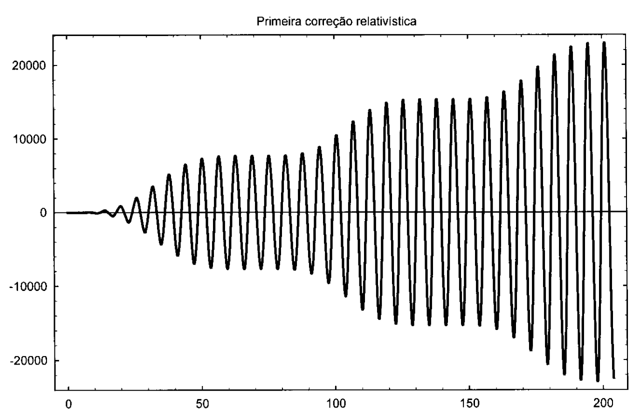

Figura 2. Batimento no OHRF.

As correções relativísticas da energia total absorvida pelo oscilador forçado também podem ser obtidas a partir das correções sobre $x(t)$. Na expressão

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\dot{x}^2/c^2}} + \frac{m\omega_0^2}{2}\,x^2 \tag{36}$$

inserimos a forma perturbativa (22) para $x(t)$ e coletamos os termos dominantes:

$$E = mc^2 + E_0 + E_1 c^{-2} + \mathcal{O}(c^{-4}), \tag{37}$$

onde

$$E_0 = \frac{m}{2}\,\dot{x}_0^2 + \frac{m\omega_0^2}{2}\,x_0^2 \tag{38}$$

é a energia clássica e

$$E_1 = m\dot{x}_0\dot{x}_1 + m\omega_0^2 x_0 x_1 + \frac{3}{8}\,m\dot{x}_0^4 \tag{39}$$

é a primeira correção relativística. Dos resultados (30) e (34) vemos que no caso ressonante E_1 deve conter termos que crescem com t^5.

IV Considerações finais

Para o caso livre, a abordagem adotada não difere significativamente da vista em Goldstein [2] e outros textos padrão de Mecânica Clássica. A equação (8) é bem conhecida. Porém, ao contrário de outros textos, aqui obtemos uma solução explícita envolvendo funções especiais e só depois aplicamos expansões perturbativas. Com isso, obtemos uma expressão elegante para $t(x)$ e as correções de relativísticas de ordem mais alta para o período.

No caso forçado, vimos que as correções relativísticas sucessivas vêm da solução de equações diferencias lineares do tipo do oscilador harmônico clássico forçado. Em cada termo de forçamento entram as correções de ordem mais baixa e a própria solução clássica, que carrega termos oscilatórios na freqüência natural do sistema. Assim são produzidas correções relativísticas com termos polinomiais em t mesmo no caso não-ressonante. Esse é um resultado que não pareceria óbvio a princípio e leva a perguntar se com isso as correções relativísticas poderiam se tornar, para um tempo suficientemente grande, maiores que a parte clássica da solução. Essa conclusão não pode ser tirada porque nessa faixa de valores de t não apenas as primeiras correções relativísticas se tornam grandes, mas todas as demais, o que impede a convergência da própria expansão em série. Nessa situação extrema se torna necessário usar outro método para calcular a correção relativística da solução.

Os resultados obtidos neste artigo são acessíveis a estudantes de graduação. O problema do oscilador harmônico relativístico se converte em um exercício interessante, ainda que trabalhoso, para várias técnicas matemáticas que um estudante de Física deve dominar ao fim do ciclo básico. De especial interesse é a possibilidade de se usar programas de manipulação algébrica, como por exemplo o *Mathematica*, para se obter rápida e sistematicamente resultados que seriam consideravelmente trabalhosos de se obter de outra maneira.

Agradecimentos

Este trabalho foi parcialmente financiado pelo CNPq e pela FAPEMIG.

References

[1] Boyce, W. E.; Di Prima, R. C., *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, quinta edição, editora LTC, 1994.

[2] Goldstein, H., *Classical Mechanics*, second edition, Reading, Addison-Wesley, 1980.

[3] Gradshteyn, I. S.; Ryzhik, I. M., *Table of Integrals, Series, and Products*, fifth edition, ed. Alan Jeffrey, San Diego, Academic Press, 1994.