Uma Equação Barométrica Coerente com a Equação de Laplace

(A Coherent Barometric Equation with Laplace's Equation)

Wilson Lopes

Universidade Guarulhos: Praça Tereza Cristina, 1, 07023-070, Guarulhos, SP

Universidade de Mogi das Cruzes: Av. Dr. Cândido Xavier de Almeida Souza, 200

08780-911, Mogi das Cruzes, SP

Recebido em 11 de Novembro, 1998

Foram feitas algumas aproximações e transformações na equação de nivelamento de Laplace, obtendo-se uma equação que, neste trabalho, foi nomeada de Equação Barométrica Modificada de Laplace. Obtém-se, com essa equação, bons resultados para as variações da pressão, com a altitude e latitude, na camada mais baixa da atmosfera terrestre, a Troposfera, onde o gradiente térmico varia de uma maneira quase constante com a altitude: $\alpha = 6,50 \times 10^{-3}$ °C/m propõe-se, também, uma equação barométrica, cujos resultados são muito próximos àqueles obtidos com a Equação Modificada de Laplace.

We present some approximations and transformations in Laplace's barometric equation, leading to an equation here called Laplace's Modified Barometric Equation. Employing this new expression, we obtain good results for the variations of pressure, with altitude and latitude, in the lowest layer of the terrestrial atmosphere, the Troposphere, where the thermal gradient varies in an almost constant way with the altitude: $\alpha = 6,50 \times 10^{-3}$ °C/m. We propose, also, a barometric equation, whose results are very close to those obtained with the Laplace's Modified Barometric Equation.

I Introdução

Chama-se nivelamento a um conjunto de operações para se medir a diferença de altura entre dois pontos da superfície terrestre. Quando essa altura relativa é determinada através das variações da pressão, entre esses dois pontos, o nivelamento se diz barométrico (Libault, 1975).

Uma das equações de nivelamento barométrico, muito usada, é a de Laplace dada por

$$z - z_0 = 18400\left(1 + \beta\frac{t + t_0}{2}\right) log\left(\frac{p_0}{p}\right)\frac{2g_p}{g_{\lambda,z} + g_{\lambda,0}}\left[1 + 0,0185\left(\frac{\epsilon}{p} + \frac{\epsilon_0}{p_0}\right)\right]. \tag{1}$$

Neste trabalho, deve-se entender por p, t e ϵ, respectivamente, pressão atmosférica, temperatura e pressão de vapor, observadas no ponto P e que se encontra à altitude z. Essas mesmas grandezas físicas com índice "0", são consideradas ao nível do mar em que $z_0 = 0$ (as pressões barométricas, as pressões de vapor e as temperaturas devem ser medidas simultaneamente nos pontos P_0 e P). O coeficiente de dilatação dos gases é representado por $\beta = 1/(273,2)\ C^{-1}$; $g_{\lambda,0}$ e $g_p = 9,8060$ m/s^2 são, respectivamente, os valores da aceleração da gravidade ao nível do mar e nas latitudes λ e 45^0; $g_{\lambda,0}$ é o valor à latitude λ e à altitude z (Libault, op. cit.).

Pretende-se, neste trabalho, em primeiro lugar, proceder a uma aproximação na equação (1), em relação à pressão de vapor, obtendo-se a equação que será chamada de Equação Barométrica Aproximada de Laplace. Em segundo lugar, modificar a equação obtida, em relação à aceleração da gravidade, e obter a equação que será chamada de Equação Barométrica Modificada de Laplace. E, finalmente, propor uma equação barométrica cujos resultados sejam equivalentes aos obtidos com a Equação Modificada de Laplace.

II Equação barométrica aproximada de Laplace

Considera-se o ponto P_0, ao nível do mar, como sendo a projeção de P que se encontra numa altitude z (ver a Fig. 1). Esses dois pontos têm as mesmas coordenadas geográficas de latitude e longitude. Assim, não se leva em conta a pressão de vapor no ponto $P_0(\epsilon_0 = 0)$. Por outro lado, no ponto P, mesmo se considerando uma temperatura atmosférica relativamente alta, da ordem de 30 ^{0}C, à pressão normal de 1013 mb (equivalente à altura barométrica de 760 mmHg), a pressão de vapor é da ordem de $\epsilon \approx 42,41$ mb (equivalente à altura barométrica de 31,82 mmHg). Observa-se, portanto, que o termo entre colchetes da equação (1) é muito próximo de 1, a saber: [1 - 0,00185(42,41/1013)] $\approx$ 1.

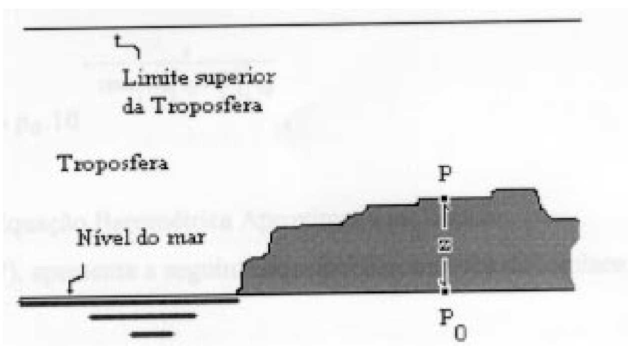

Figura 1. O ponto P_0, que se encontra ao nível do mar, é a projeção do ponto P que se encontra à altitude z. A latitude e longitude de P e P_0 são iguais.

Com a aproximação considerada acima, a equação (1) se transforma em

$$z \approx 18400 \left(1 + \beta \frac{t + t_0}{2}\right) log \left(\frac{p_0}{p}\right) \eta_g, \qquad (2)$$

onde

$$\eta_g = 2g_p/(g_{\lambda,z} + g_{\lambda,0}) \qquad (3)$$

representa um coeficiente dependente da aceleração da gravidade (esse coeficiente, de maneira implícita, depende da latitude e altitude).

Resolvendo-se a equação (2) para p, obtem-se

$$p \approx p_0 \cdot 10^{-\frac{z}{18400\left(1+\beta\frac{t+t_0}{2}\right)\eta_g}}. \qquad (4)$$

Assumindo-se, em (4), $t = t_0 - \alpha z$, onde $\alpha = 6,50 \times 10^{-3}$ °C/m representa o gradiente térmico padrão da baixa atmosfera, tem-se que

$$p \approx p_0 \cdot 10^{-\frac{z}{18400\left[1+\beta\left(t_0-\frac{\alpha z}{2}\right)\right]\eta_g}}, \qquad (5)$$

que representa a Equação Barométrica Aproximada de Laplace.

Dias (1917), apresenta a seguinte equação barométrica de Laplace:

$$p \approx p_0 \cdot 10^{\frac{z}{18400\left[1+0,00367\left(t_0-\frac{z}{360}\right)\right]}}, \qquad (6)$$

para a redução das pressões ao nível do mar.

Comparando-se as equações (5) e (6), chega-se a conclusão que $\beta = 0,00367 = 1/272,5$ °C^{-1}, $\alpha = 5,56 \times 10^{-3}$ °C/m e $\eta_g = 1$.

III Variação da aceleração da gravidade em função da latitude e altitude

A variação da aceleração da gravidade, com a latitude λ, é dada por (Cook, 1969)[1]:

$$g_\lambda = g_e(1 + \varphi \cdot \mathrm{sen}^2\lambda), \qquad (7)$$

onde $g_e = 9,7804 m/s^2$ representa a aceleração da gravidade no equador e $\varphi = 5,240 \times 10^{-3}$ é um fator numérico[2].

Deve-se incluir, na expressão (7), um termo que faça depender a aceleração da gravidade, também, da altitude z, a saber

$$g_{\lambda,z} \approx g_e(1 + \varphi \cdot \mathrm{sen}^2\lambda) - 2g_e z/R_T, \qquad (8)$$

onde $R_T = 6,371 \times 10^6$m representa o raio da Terra[3].

IV Equação barométrica modificada de Laplace

A equação (8) fornece a aceleração da gravidade, nas várias localidades da superfície terrestre, e está relacionada com a aceleração da gravidade no equador. Contudo, pode-se relacioná-la com a aceleração da gravidade à latitude de 45^0 e ao nível do mar, $g_p = 9,806$ m/s^2, que se assume como aceleração da gravidade padrão:

$$g_{\lambda,z} = \frac{g_p}{1 + \varphi/2} \cdot \left(K - \frac{2 \cdot z}{R_T}\right), \qquad (9)$$

onde $K = 1 + \varphi \mathrm{sen}^2\lambda$.

[1] Quando se trabalha com ângulos de co-latitude, a expressão (7) apresenta a função co-seno. Para ângulos de latitude, que são complementares da co-latitude, a expressão se apresenta com a função seno.

[2] Se fossem levadas em conta somente as influências da aceleração centrípeta nas variações da aceleração da gravidade, em relação à latitude, o fator numérico teria o valor de $\beta \approx 3,460 \times 10^{-3}$. O valor do fator usado na expressão (7), considera a aceleração centrípeta e o achatamento da Terra, onde o raio equatorial é cerca de 21,4 km maior que o polar. A contribuição do achatamento terrestre é de, aproximadamente, $1,78 \times 10^{-3}$.

[3] Assumiu-se, por hipótese, uma Terra esférica, de raio $R_T = (R_e^2 R_p)^{1/3} = 6,371 \times 10^6$m, com o mesmo volume do elipsóide de revolução, de raios equatorial e polar, respectivamente, iguais a $R_e = 6,3781 \times 10^6$ m e $R_p = 6,3567 \times 10^6$m (Estacey, 1977).

Convém notar que, ao nível do mar ($z = 0$), a equação (9) fornece

$$g_{\lambda,0} = \frac{g_p}{1+\varphi/2} K. \tag{10}$$

Substituindo-se as equações (9) e (10) em (3), obtem-se que

$$\eta_g = \frac{1+\varphi/2}{K - z/R_T}. \tag{11}$$

O valor do coeficiente η_g, calculado através da equação (11), substitui-se na equação (5), obtendo-se

$$p \approx p_0 \cdot 10^{-\frac{z}{18400\left[1+\beta\left(t_0 - \frac{\alpha z}{2}\right)\right]\frac{1+\varphi/2}{K-z/R_T}}}, \tag{12}$$

que representa a Equação Barométrica Modificada de Laplace.

V Equação Proposta

Construimos, a seguir, uma equação barométrica para a Troposfera, levando-se em conta as variações da aceleração da gravidade com a latitude e altitude. Antes de tudo, devemos considerar a atmosfera em equilíbrio hidrostático, de tal maneira que o vetor velocidade seja constante em todas as posições ou de valor nulo. Desta maneira vale a equação de Stevim (Halliday e Resnick 1962)

$$dp/dz = -\mu g_{\lambda,z}, \tag{13}$$

onde μ representa a densidade do ar atmosférico a uma altitude z e a aceleração da gravidade que varia com a latitude e altitude de acordo com a equação (9).

Admitindo-se a atmosfera com comportamento de gás ideal, a uma altitude z, onde a pressão e a temperatura são, respectivamente, p e T, a densidade é dada por

$$\mu = Mp/(RT), \tag{14}$$

onde $M = 28,96 \times 10^{-3}$kg/m^3 representa a massa molecular média do ar na troposfera desconsiderando-se a umidade (Houghton 1977) e $R = 8,314$ J/(mol K) é a constante dos gases. A temperatura T, na equação (14), em Kelvin, é definida por $T = T_0 - \alpha z$, que admite a atmosfera com comportamento padrão, onde $\alpha = 6,50 \times 10^{-3}$ K/m.

Assim, a equação (14) se transforma em

$$\mu = \frac{Mp}{R(T_0 - \alpha z)}. \tag{15}$$

Substituindo-se as equações (9) e (15) em (13), tem-se que

$$dp/dz = -\frac{Mp}{R(T_0-\alpha z)} \frac{g_p}{1+\varphi/2} \left(K - \frac{2z}{R_T}\right). \tag{16}$$

Separando-se as variáveis e integrando-se a equação (16), obtem-se

$$\begin{aligned}
\ln(p^*/p_0^*) &= \int_{p_0^*}^{p^*} dp/p = -\frac{Mg_p}{R(1+\varphi/2)} \left\{ \int_0^z \frac{(K - 2z/R_T)}{T_0 - \alpha z} dz \right\} \\
&= -\frac{Mg_p}{RT_0(1+\varphi/2)} \left\{ \left(K - \frac{2T_0}{R_T \alpha}\right) \int_0^z \frac{dz}{1-\alpha z/T_0} + \frac{2T_0}{R_T} \int_0^z dz \right\} \\
&= -\frac{Mg_p}{RT_0(1+\varphi/2)} \left\{ \frac{2T_0}{R_T \alpha} z - \frac{T_0}{\alpha}\left(K - \frac{2T_0}{R_T\alpha}\right) \ln\left(1 - \frac{\alpha}{T_0} z\right) \right\}.
\end{aligned} \tag{17}$$

Explicitando-se p^*, na equação (17), obtem-se que

$$p^* = p_0^* \cdot e^{-\frac{2Mg_p z}{RR_T\alpha(1+\varphi/2)}} \cdot \left(1 - \frac{\alpha z}{T_0}\right)^{\frac{Mg_p}{R\alpha(1+\varphi/2)}\left(K - \frac{2T_0}{R_T\alpha}\right)}, \tag{18}$$

onde p^* representa a pressão ao nível do mar.

As Tabelas abaixo foram geradas com as equações (12) e (18). Para se testar a coerência entre as duas equações, foram assumidas, arbitrariamente, as pressões e temperaturas ao nível do mar, para as latitudes: 0, - 45 e - 90^0 (localidades do hemisfério Sul)[4].

[4] As pressões p e p^* são medidas em milibares (mb). A relação entre a pressão medida em atmosfera (atm), o pascal (Pa) e o milibar (mb), é dada por: 1,000atm = 1,013$\times 10^5$ Pa = 1013 mb.

$\lambda=0^0$, $T_0=299{,}6K$, $p_0=1011mb$			$\lambda=45$, $T_0=283{,}2K$, $p_0=1011mb$			$\lambda=90^0$, $T_0=253{,}2K$, $p_0=1005$ mb		
z (m)	p (mb)	p* (mb)	z (m)	p (mb)	p* (mb)	z (m)	p (mb)	p* (mb)
0	1011	1011	0	1011	1011	0	1005	1005
100	999,6	1000	100	998,9	998,9	100	991,5	991,5
200	988,3	988,5	200	986,8	986,9	200	978,2	978,1
300	977,2	977,4	300	974,9	975,0	300	965,1	964,9
400	966,1	966,4	400	963,1	963,2	400	952,0	951,8
500	955,1	955,5	500	951,4	951,5	500	939,1	938,9
600	944,3	944,7	600	939,9	940,0	600	926,4	926,1
700	933,5	934,0	700	928,4	928,5	700	913,8	913,4
800	922,9	923,4	800	917,1	917,2	800	901,3	900,9
900	912,3	912,9	900	905,9	906,0	900	889,0	888,6
1000	901,8	902,5	1000	894,8	894,9	1000	876,8	876,3
1100	891,5	892,2	1100	883,8	883,9	1100	864,8	864,2
1200	881,2	881,9	1200	872,9	873,0	1200	852,9	852,3
1300	871,0	871,8	1300	862,1	862,3	1300	841,1	840,5
1400	860,9	861,8	1400	851,4	851,6	1400	829,4	828,8
1500	850,9	851,9	1500	840,9	841,0	1500	817,9	817,2
1600	841,1	842,0	1600	830,4	830,6	1600	806,5	805,8
1700	831,3	832,3	1700	820,1	820,2	1700	795,3	794,5
1800	821,6	822,6	1800	809,8	810,0	1800	784,1	783,3
1900	811,9	813,1	1900	799,7	799,9	1900	773,1	772,3
2000	802,4	803,6	2000	789,6	789,8	2000	762,3	761,4

Tabela 1: Valores de p, e p^* obtidos, respectivamente, com as equações (12) e (18), em função da altitude.

VI Conclusão

Usamos, na equação (1) a aproximação $1+0,0185(\epsilon/p+\epsilon_0/p_0) \approx 1$, obtendo-se a Equação Barométrica Aproximada de Laplace: a equação (5). Comparando-se essa equação com a equação (6), apresentada por Dias (1917), verificou-se que o coeficiente de dilatação dos gases e o gradiente atmosférico térmico são, respectivamente, $\beta = (1/272{,}5)$ °C^{-1} e $\alpha = 5,56 \times 10^{-3}$ °C/m, ligeiramente diferentes dos valores padronizados atualmente. Será que o coeficiente de dilatação dos gases e o gradiente atmosférico térmico eram conhecidos por Laplace com os valores apresentados por Dias? Em relação aos valores atuais, essas grandezas físicas apresentam os seguintes desvios: $E_\beta \approx 0,25\%$ e $E_\alpha \approx 14\%$. Por outro lado, na equação (6), não se leva em conta as variações da pressão com a latitude, assumindo-se $\eta_g = 1$, o que não nos parece correto.

Transformou-se a equação (5) na equação (12), pelo motivo de se ter encontrado maior facilidade em se calcular η_g em função de φ, K, z e R_T do que em função de possíveis valores tabelados de g_p, $g_{\lambda,z}$ e $g_{\lambda,0}$.

As equações (12) e (18) são equivalentes. Chegamos a essa conclusão pela simples observação dos resultados das pressões p e p^*, calculados, respectivamente, com as equações (12) e (18) e registrados na Tabela 1.

Poder-se-ia levar em conta, também, na equação (18), a umidade atmosférica, pelas variações que o vapor d'água poderia causar em M que representa a massa molecular média da baixa atmosfera terrestre.

References

[1] COOK, A. H. *Gravity and the Earth.* London: Wykeham Publications, 1969. 95 p.v.6. (The Wykeham Science Series: for schools and universities).

[2] DIAS, A. de Padua. *Meteorologia e Climatologia.* São Paulo: Secção de Obras do "O Estado". 1917. 245 p.

[3] HALLIDAY , D. e RESNICK, R. *Physics For Students of Science and Engineering.* New York: John Wiley & Sons. 1962. 1075 p.

[4] LIBAULT, A. *Geocartografia.* São Paulo: Editora Nacional. 1975. 388 p.

[5] STACEY, F. D. *Physics of the Earth.* New York: John Willey & Sons, 1977. 414 p. 2. ed.