# Um Setor Especial Generalizado da Equação do Oscilador Harmônico Simples

(A Generalized Special Sector of Simple Harmonic Oscillator Equation)

Claudio Ichiba, Rogerio Ichiba e José Noboru Maki
*Universidade Estadual de Maringá*
*Centro de Ciências Exatas*
*Departamento de Física*
*Av. Colombo,5790, CEP87030-121, Maringá, PR*

Recebido em 20 de Novembro, 1998

Vamos mostrar uma generalização da equação vinda do problema de oscilador harmônico simples (OHS) em potências de $x(t)$. Estas equações apresentam soluções simples, tornam-se úteis nas ilustrações de problemas didáticos e para aplicações em testes de aproximações, tanto numéricas quanto analíticas.

We will show a generalization of the equation coming of the problem of simple harmonic oscillator in powers of $x(t)$ potencies. These equations present simple solutions. Hence they become useful in the illustrations of pedagogical problems and for applications in tests of approximations, both numeric and analytic.

## I Introdução

O desenvolvimento de métodos matemáticos que visam facilitar o trabalho dos físicos é um dos maiores entraves para chegar a soluções de determinados sistemas físicos não-lineares. Sabemos que soluções para equações diferenciais destes sistemas não são fáceis de se obterem. Desta forma, este artigo exibe uma classe generalizada de equações diferenciais do OHS concomitante com suas soluções.

Uma generalização de equações diferenciais é de grande valia no reforço de ensino ilustrativo se suas soluções forem simples, pois, torna-se possível expandir outras possibilidades didáticas e traz também, uma ajuda oportuna para aqueles que buscam aperfeiçoar seus programas computacionais, aprimorar os testes de técnicas em aproximações, além de muitas outras utilidades.

Com essa filosofia o presente artigo apresenta de forma intuitiva uma generalização para uma classe de equações com solução harmônica, isto é, função senoidal. Iniciaremos pela equação que descreve o OHS e evoluiremos para equações diferenciais não-lineares.

## II Um Método Intuitivo

A equação do OHS, é dada por

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t)+\omega^2x(t)=0, \tag{1}$$

onde $\omega$ é a freqüência angular. A solução geral é dada por

$$x(t)=A\cos(\omega t+\delta_1), \tag{2}$$

onde $A$ é a amplitude do movimento e $\delta_1$ a constante de fase que são obtidas pelas condições iniciais.

Se, por exemplo, o sistema for um bloco de massa $m$ suspensa por uma mola ideal num campo gravitacional então temos

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t)+\omega^2x(t)=g, \tag{3}$$

onde $x(t)$ representa direção vertical. A sua solução geral é dada por

$$x(t)=B\cos(\omega t+\delta_1)+g/\omega^2. \tag{4}$$

Se incidentemente o dobro da amplitude for, $2B=A=2g/\omega^2$, então teremos

$$x(t)=A\cos^2(\omega t/2+\delta_2). \tag{5}$$

Assim, a solução da equação (3) apresenta-se na forma quadrática, onde a constante de fase, $\delta_1=2\delta_2$. Podemos escalonar $t\rightarrow\omega t$ e $x(t)\rightarrow x(t)/A$.

Vamos generalizar o segundo membro da equação (3) com uma simulação de campo externo variável, adequando em potências de função $x(t)$. Para isso, veremos qual é uma das possíveis equações diferenciais caso um sistema dinâmico seja descrito pela função

$$x(t) = A\cos^3(\omega t/3 + \delta_3). \tag{6}$$

Verificamos que pode vir de uma equação diferencial não-linear dada por

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \omega^2 x(t) - \frac{2\omega^2}{3}A^{2/3}x(t)^{1/3} = 0, \tag{7}$$

onde o campo externo é o último termo da equação (7) e $A$ é um parâmetro ajustável de modo que ocorra um estado estacionário dado em (6).

Assim também, para um sistema com movimento descrito pela função

$$x(t) = A\cos^4(\omega t/4 + \delta_4), \tag{8}$$

verificamos que

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \omega^2 x(t) - \frac{3\omega^2}{4}A^{1/2}x(t)^{1/2} = 0, \tag{9}$$

e assim sucessivamente. Logo, por indução, temos que,

$$x(t) = A\cos^q(\omega t/q + \delta_q), \tag{10}$$

cuja equação generalizada, se escalonada, será dada por

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + x(t) - \frac{(q-1)}{q}x(t)^{q-2/q} = 0. \tag{11}$$

Para $i = 1$ temos a equação (1) do OHS. Para $q = 2$ temos OHS num campo externo constante, e assim por diante. É interessante notar que na equação (11) $q$ pode ser qualquer número real diferente de zero. Esta propriedade aparece por estarmos lidando com uma função periódica. O último termo da equação (11) representa a força de campo externo geral que pode ser produzida, por exemplo, no interior de uma espaçonave cuja propulsão (aceleração) pode ser ajustada a um $q$ desejado. Assim, para um observador externo, num referencial inercial, observar-se-á a lei de movimento (1) se a espaçonave estiver parada ou em movimento retilíneo e uniforme, nesse caso $q = 1$. Se estiver em movimento retilíneo e uniformemente variado, teremos a lei do tipo (3), nesse caso $q = 2$, vemos que há uma força constante atuando no sistema massa-mola ideal. Se a espaçonave acelerar de tal modo que forneça uma força proporcional a $x^{1/3}$ teremos $q = 3$, e assim por diante. Se o referencial estiver dentro da espaçonave e $q \geq 2$ então para este observador as equações diferenciais governadoras tornam-se de ordens superiores porque o referencial é não-inercial. Para um observador fora da espaçonave e em referencial inercial a lei que governa é de segunda ordem, a lei de Newton [1].

Para $q = -1$, temos a equação de Duffing [2],

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \omega^2 x(t) + \mu x^3(t) = 0, \tag{12}$$

onde $\mu = -2$ e $\omega = 1$. Esta equação (12) é encontrada freqüentemente em diversos estudos de sistemas hamiltonianos, por exemplo, na transformação da equação do pêndulo simples, assim como, em métodos perturbativos [2]. É interessante notar que a solução da equação (12) para parâmetros arbitrários $\mu$ e $\omega$ tem soluções que envolvem funções elípticas. Além disso, essa equação pode ser obtida por mudança de variáveis, como é feita na equação do pêndulo simples. Portanto, apresenta três setores de soluções distintas [4].

Os resultados do presente estudo são de fato bastante simplificados. Para comprovar isso, testamos algumas das resoluções provenientes das equações diferenciais (11) pelo pacote MATHEMATICA® 3.0 [3] o que resultaram em soluções à primeira vista assustadoras e impossíveis de se interpretar.

Uma continuidade deste trabalho é expandir essas formas de equações e suas soluções a outras funções trigonométricas e hiperbólicas

# III Conclusão

Através do presente método, baseado na estética indutiva, conseguimos encontrar uma equação diferencial não linear generalizada (11) que tem como solução potências reais da função harmônica. Abre-se a possibilidade de novas explorações em aplicações de métodos algébricos e numéricos aproximados onde há necessidade de soluções exatas para as suas comparações, além de uso didático. Vamos estender brevemente a presente abordagem para sistemas matematicamente semelhante e assim, aqueles cujas soluções tem dinâmicas descritas pelas soluções de funções periódicas e hiperbólicas [5].

# References


[1] Picoli Jr., Sérgio, *Trabalho de Graduação,* Publicação Interna do DFI/UEM, janeiro de 1999.

[2] Hagedorn, Peter, *Oscilações Não Lineares.* Editora Edgard Blücher Ltda.. São Paulo, SP. 1984.

[3] Wolfram, Stephen, *The Mathematica R. Book*, 3a. edição, Editora Cambridge University Press. USA, 1996.

[4] T. Davis, Harold, *Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations.* Dover Publications, Inc., New York 1960.

[5] Ichiba, Rogerio, *Trabalho de Graduação,* Publicação Interna do DFI/UEM, janeiro de 1999.