O Movimento de Precessão da Terra

Rodrigo Dias Tarsia
Departamento de Física , ICEx - UFMG
Caixa Postal 702, 30161 - 970 - Belo Horizonte

Recebido em 25 de Janeiro, 1999

A descrição matemática completa do movimento de precessão da Terra é bastante complexa mas os princípios físicos e os seus efeitos podem ser compreendidos com um modelo simples que coloca em evidência as características principais do movimento. Isso é feito neste artigo com o uso das equações de Euler para um corpo rígido e com uma linguagem apropriada a um curso de nível intermediário de dinâmica de corpos rígidos.

I Introdução

O movimento de precessão da Terra é citado em muitos livros de Mecânica e relacionado com o estudo do pião simétrico. Os modelos usados frequentemente são muito simples[1,2] e, embora interessantes, não mostram claramente a maioria dos efeitos de interação entre o Sol, a Lua e a Terra.

A precessão da Terra foi descoberta por Hiparco em 129 a.C., ao comparar suas medidas de posição da estrela Spica (α Virginis) com as de Timocharis, feitas em 273 a.C.. A variação desta posição foi interpretada por Hiparco como uma rotação da esfera das estrelas fixas em torno de um eixo perpendicular ao plano da órbita da Terra (a eclíptica). Foi Copérnico quem deu a interpretação correta através de sua teoria heliocêntrica: o eixo de rotação da Terra descreve um cone de revolução em torno do eixo perpendicular à eclíptica, no sentido retrógrado em relação ao movimento da Terra em torno do Sol. Finalmente, Newton foi o primeiro a descrever a precessão com argumentos geométricos. De acordo com ele, pelo fato da Terra não ter uma forma esférica e seu eixo de rotação estar inclinado em relação à normal ($\hat{n}$) ao plano da eclíptica, a força de atração gravitacional do Sol que atua no lado da Terra mais próximo a ele é maior que a exercida sobre o lado mais afastado dele. A Terra fica então sujeita a um momento de torção $\vec{N}$ situado sobre a eclíptica e de sentido oposto ao seu movimento de translação. Este momento tende a alinhar o momentum angular $\vec{L}$ da Terra com $\hat{n}$, causando o movimento de precessão de $\vec{L}$ em torno de $\hat{n}$.

O eixo de rotação da Terra está inclinado em relação ao eixo perpendicular à eclíptica de um ângulo $\epsilon \simeq 23°\,26'$ (obliquidade da eclíptica). Além disso, à medida que a Terra descreve sua órbita em torno do Sol, este eixo mantém sua direção aproximadamente fixa no espaço. Em consequência, a posição do Sol em relação ao Equador terrestre varia ao longo do ano de modo que a linha que une os centros do Sol e da Terra faz um ângulo com este plano, que varia entre $0°$ e $23°\,26'$, tanto para o norte quanto para o sul dele. O resultado disso é que o momento exercido pelo Sol sobre a Terra é variável durante o ano.

Do mesmo modo, a Lua exerce um momento sobre a Terra, que também é variável, pois a Lua tem seu plano orbital inclinado em relação à eclíptica de um ângulo $i \simeq 5°\,08'$. Assim, o momento resultante das fôrças gravitacionais do Sol e da Lua sobre a Terra é variável com o tempo. Esta é a principal diferença entre a precessão do pião simétrico e a da Terra, que geralmente não é citada nos textos de Mecânica.

O método de cálculo a ser utilizado constitui-se na determinação dos momentos exercidos pelo Sol e pela Lua sobre a Terra; em seguida, obtêm-se os termos principais da precessão com a integração das equações de Euler, que determinam as taxas de variação com o tempo dos ângulos de Euler (escolhidos apropriadamente). O modelo adotado compreende as seguintes hipóteses:
(a) a órbita da Terra em torno do Sol é suposta circular, com seu plano fixo no espaço;
(b) a órbita da Lua em torno da Terra também é suposta circular. Como sua inclinação em relação à eclíptica é pequena, ela será suposta coincidente com este plano;
(c) a Terra será considerada um elipsóide de revolução, com a razão dos eixos principais de inércia dada por[3]: $\beta = (C - A)/C = 1/305,3$ em que C é o momento principal de inércia em relação ao eixo de rotação, A o momento em relação a um eixo no plano equatorial da Terra.

II O momento perturbador

Sejam os seguintes sistemas de referência, em relação aos quais serão determinados os elementos da rotação da Terra (Figura 1):

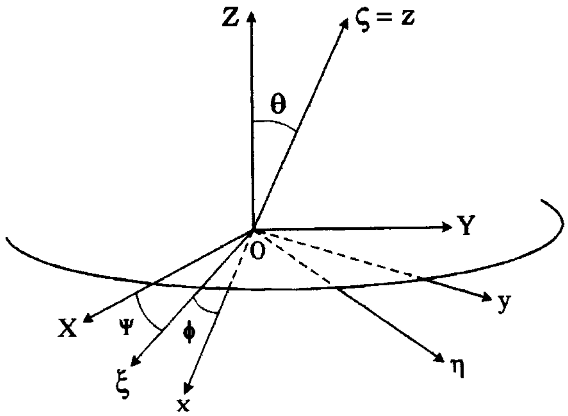

Figura 1.

(a) S(OXYZ), com orígem no centro da Terra O e possuindo direções fixas na eclíptica, com OZ dirigido perpendicularmente a ela e orientado no sentido do hemisfério norte relativo à Terra;

(b) S(Oxyz), fixo na Terra, com direções fixas no Equador terrestre e com Oz coincidente com o eixo de rotação da Terra, orientado com sentido positivo para o Pólo Norte terrestre;

(c) S($O\xi\eta\zeta$) com $O\zeta$ coincidente com Oz, e $O\xi$ orientado ao longo da interseção dos planos da eclíptica e equador terrestre, com sentido positivo para o Ponto Vernal.[1] Este sistema serve de intermediário nas transformações dos sistemas anteriores. Devido à simetria do elipsóide terrestre, seus eixos podem ser considerados como eixos principais de inércia da Terra.

A rotação da Terra fica determinada completamente pela variação temporal dos ângulos de Euler $\psi = \mathrm{XO}\xi$, $\phi = \xi\mathrm{Ox}$ e $\theta = \mathrm{ZO}\zeta$, mostrados na Figura 1; os ângulos ϕ e θ são contados no sentido direto; o ângulo ψ é contado no sentido retrógrado porque a linha dos nodos $O\xi$ se move neste sentido.

Seja um elemento de massa dm da Terra. A fôrça que o corpo perturbador C exerce sobre ele (Figura 2) é:

$$d\vec{F} = -\frac{G\,M\,dm}{r^3}\,\vec{r} = -\frac{dK}{r^3}\,\vec{r} \qquad (dK = G\,M\,dm)$$

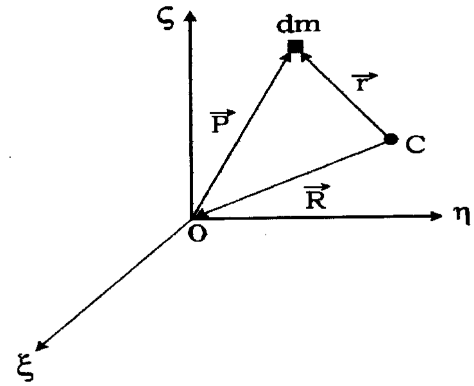

Figura 2

O momento dessa força em relação ao centro de massa (O) da Terra é, com $\vec{r} = \vec{P} - \vec{R}$:

$$d\vec{N} = \vec{P}\,\mathrm{x}\,d\vec{F} = \frac{dK}{r^3}\,(\vec{P}\,\mathrm{x}\,\vec{R})$$

Se (X, Y, Z) são as componentes de $\vec{R}$ e (x, y, z) as de $\vec{p}$ em relação a $O\xi\eta\zeta$, vem:

$$\begin{bmatrix} dN_\xi \\ dN_\eta \\ dN_\zeta \end{bmatrix} = \frac{dK}{r^3} \begin{bmatrix} yZ - zY \\ zX - xZ \\ xY - yX \end{bmatrix}$$

O termo r^{-3} pode ser expresso de outra maneira:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^3} &= \left[(\vec{P} - \vec{R}) \cdot (\vec{P} - \vec{R})\right]^{-3/2} = \\ &= \frac{1}{R^3}\left[1 + \left(\frac{P}{R}\right)^2 - \frac{2\,\vec{P}\cdot\vec{R}}{R^2}\right]^{-3/2} \end{aligned}$$

O maior valor que P pode ter é o do raio da Terra: $R_T = 6,378\,\mathrm{x}\,10^3$ km; o valor de R para o Sol é $R_S \simeq 1,496\,\mathrm{x}\,10^8$ km e para a Lua, $R_L \simeq 3,844\,\mathrm{x}\,10^6$ km. Portanto, $P << R$ e a expressão acima pode ser desenvolvida com o teorema binomial, resultando em

$$r^{-3} \simeq \frac{1}{R^3}\left[1 + \frac{3}{R^2}\,(xX + yY + zZ)\right].$$

Então, as componentes do momento perturbador no sistema S($O\xi\eta\zeta$) são:

$$\begin{bmatrix} dN_\xi \\ dN_\eta \\ dN_\zeta \end{bmatrix} = \frac{dK}{R^3}\,[1 + B] \begin{bmatrix} yZ - zY \\ zX - xZ \\ xY - yX \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{3}{R^2}\,(xX + yY + zZ)$$

Como $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ são eixos principais de inércia, estas expressões podem ser integradas sobre o volume

[1] O Ponto Vernal é o nodo ascendente da Eclíptica sobre o Equador Celeste. A passagem do Sol por este ponto em seu movimento anual aparente (que ocorre em 20 ou 21 de março), determina o início da primavera (outono) no hemisfério norte (sul).

da Terra para determinar as componentes do momento perturbador sobre toda ela. Esta integração é simples de ser feita pois, como O é o centro de massa da Terra,

$$\int_V x\,dm = \int_V y\,dm = \int_V z\,dm = 0$$

Além disso, as integrais dos produtos de inércia são nulas i.é,

$$\int_V x\,y\,dm = \int_V x\,z\,dm = \int_V z\,y\,dm = 0$$

Então

$$\begin{aligned} N_\xi &= \frac{3\,G\,M}{R^5} Y\,Z \int_V (y^2 - z^2)\,dm = \\ &= \frac{3\,G\,M}{R^5} Y\,Z\,(C-A) \\ N_\eta &= -\frac{3\,G\,M}{R^5} X\,Z \int_V (x^2 - z^2)\,dm = \\ &= -\frac{3\,G\,M}{R^5} X\,Z\,(C-A) \\ N_\zeta &= \frac{3\,G\,M}{R^5} X\,Y \int_V (x^2 - y^2)\,dm = 0. \end{aligned}$$

Em Astronomia, a posição do corpo perturbador em relação à Terra é medida pelo ângulo λ - denominado longitude eclíptica - que o vetor $\vec{R}$ faz com a direção $O\xi$. Se X', Y', Z' são as componentes deste vetor no sistema OXYZ temos que

$$X' = R\cos(\lambda + \psi); \quad Y' = R\,\mathrm{sen}(\lambda + \psi); \quad Z' = 0.$$

As componentes do vetor $\vec{R}$ no sistema $O\xi\eta\zeta$ são obtidas das acima pela transformação

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = R_\xi(-\theta) R_Z(\psi) \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R\,cos\,\lambda \\ R\,cos\,\theta\,sen\,\lambda \\ R\,sen\,\theta\,sen\,\lambda \end{bmatrix}$$

em que $R_\gamma(\delta)$ representa uma rotação de um ângulo δ em torno do eixo $O\gamma$.

As componentes não nulas do momento perturbador no sistema $O\xi\eta\zeta$ tornam-se

$$\begin{aligned} N_\xi &= \frac{3\,G\,M}{R^3} (C-A)\,sen\,\theta\,cos\,\theta\,sen^2\lambda = \\ &= \frac{3\,G\,M}{2\,R^3} (C-A)\,sen\,\theta\,cos\,\theta\,[1 - cos(2\,\lambda)] \\ N_\eta &= -\frac{3\,G\,M}{R^3} (C-A)\,sen\,\theta\,sen\,\lambda\,cos\,\lambda = \\ &= -\frac{3\,G\,M}{2\,R^3} (C-A)\,sen\,\theta\,sen(2\,\lambda). \end{aligned}$$

III As equações de Euler

As equações de Euler, dadas por

$$\frac{d\vec{L}}{dt} + \vec{\omega}\,\mathrm{x}\,\vec{L} = \vec{N},$$

escritas em termos das componentes do vetores no sistema Oxyz fixo na Terra. $\vec{L}$ é o momentum angular da Terra, $\vec{\omega}$ é a velocidade angular de rotação do sistema de referência a ela ligado, em relação ao inercial OXYZ, e $\vec{N}$ é o momento perturbador que atua sobre a Terra. Como esta possui um movimento de rotação em torno de seu eixo Oz, as componentes de $\vec{L}$ no sistema de eixos principais de inércia Oxyz, fixo na Terra, são

$$L_x = A\,\omega_x \qquad L_y = A\,\omega_y \qquad L_z = C\,(\omega_z + \Omega),$$

onde Ω é a velocidade angular de rotação da Terra em torno de seu eixo. As equações de Euler ficam então

$$\begin{aligned} A\,\dot{\omega}_x + (C-A)\,\omega_y\,\omega_z + C\,\omega_y\,\Omega &= N_x, \\ A\,\dot{\omega}_y - (C-A)\,\omega_x\,\omega_z - C\,\omega_x\,\Omega &= N_y, \\ C\,\frac{d}{dt}(\omega_z + \Omega) &= N_z. \end{aligned}$$

Mas $\Omega = 2\,\pi$ radianos/dia $= 7,272\,\mathrm{x}\,10^{-5}$ rad/s; no caso do Sol, $\omega = \omega_S = 2\,\pi$ rad/ano $= 1,991\,\mathrm{x}\,10^{-7}$ rad/s; no da Lua, $\omega = \omega_L = 2\,\pi/27,3217$ rad/dia $= 2,662\,\mathrm{x}\,10^{-6}$ rad/s. Assim, o produto das componentes de $\vec{\omega}$ pode ser desprezado em relação a Ω. As componentes da derivada de $\vec{\omega}$ podem também ser desprezadas em uma primeira aproximação e as equações acima se reduzem a

$$N_x = C\,\omega_y\,\Omega \qquad N_y = -C\,\omega_x\,\Omega \qquad N_z = 0.$$

Para resolver estas equações é necessário escrever N_x, N_y e N_z em função de N_ξ, N_η e N_ζ. Isso é feito através de

$$\begin{bmatrix} N_\xi \\ N_\eta \\ N_\zeta \end{bmatrix} = R_z(-\phi) \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{bmatrix}$$

resulta em

$$\begin{aligned} N_\xi &= N_x\,cos\,\phi - N_y\,sen\,\phi = \\ &= C\,\Omega\,(w_x\,sen\,\phi + w_y\,cos\,\phi) \\ N_\eta &= N_x\,sen\,\phi + N_y\,cos\,\phi = \\ &= -C\,\Omega\,(w_x\,cos\,\phi - w_y\,sen\,\phi). \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} w_x\,sen\,\phi + w_y\,cos\,\phi &= \dot{\psi}\,sen\,\theta \\ w_x\,cos\,\phi - w_y\,sen\,\phi &= \dot{\theta}, \end{aligned}$$

Logo, com as expressões de N_ξ e N_η e com $\theta = \epsilon$ (obliquidade da eclíptica), vem

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{3\,G\,M}{2\,\Omega\,R^3}\left(\frac{C-A}{C}\right) cos\,\epsilon\;[1 - cos(2\,\lambda)] \\ \dot{\epsilon} &= -\frac{3\,G\,M}{2\,\Omega\,R^3}\left(\frac{C-A}{C}\right) sen\,\epsilon\,sen(2\,\lambda) \end{aligned}$$

IV Discussão

Nas equações acima, M é a massa do corpo perturbador, R seu raio-vetor em relação ao centro da Terra e λ a sua longitude eclíptica. Para o Sol, $M_S = 1,989\,\mathrm{x}\,10^{30}$ kg , $R_S = 1,496\,\mathrm{x}\,10^{8}$ km, e a constante das equações fica é dada por

$$B_S = \frac{3\,G\,M_S}{2\,\Omega\,R_S^3}\left(\frac{C-A}{C}\right)$$

ou $B_S = 8,426\,\mathrm{x}\,10^{-5}$ rad/ano $= 17'', 380$ /ano.

Supondo que a Lua tem seu plano orbital coincidente com a eclíptica, as equações acima também são aplicáveis a ela. Assim a constante B_L para a Lua pode ser obtida diretamente de B_S; lembrando que $M_L = (M_L/M_S)\,M_S = 3,694\,\mathrm{x}\,10^{-8}\,M_S$ e $R_L = (R_L/R_S)\,R_S = 2,569\,\mathrm{x}\,10^{-3}\,R_S$ vem:

$$B_L = \frac{3\,G\,M_S}{2\,\Omega\,R_S^3}\,\frac{M_L}{M_S}\left(\frac{R_S}{R_L}\right)^3\left(\frac{C-A}{C}\right) = \alpha\,B_S$$

$$\alpha = \frac{M_L}{M_S}\left(\frac{R_S}{R_L}\right)^3 = 2,18$$

Isso mostra que o momento perturbador da Lua é cerca de $2,2$ vezes maior que o do Sol. As taxas de variação de ψ e ϵ, devidas ao efeito somado da Lua e do Sol escrevem-se entãocomo

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= (1+\alpha)\,B_S\,cos\,\epsilon\; - \\ &\quad -B_S\,cos\,\epsilon\;[cos(2\,\lambda_S) + \alpha\,cos(2\,\lambda_L)] \\ \dot{\epsilon} &= -B_S\,sen\,\epsilon\;[sen(2\,\lambda_S) + \alpha\,sen(2\,\lambda_L)]\,. \end{aligned}$$

Essas equações descrevem o movimento do sistema $\mathrm{O}\xi\eta\zeta$ em relação a OXYZ. Pode-se fazer $\lambda_S = \omega_S\,t$, $\lambda_L = \omega_L\,t$, $\epsilon = \epsilon(t_0) = \epsilon_0$ e integrá-las, obtendo-se

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= (1+\alpha)\,B_S\,cos\,\epsilon_0\,(t-t_0) - \\ &\quad -\frac{B_S\,cos\,\epsilon_0}{2}\left[\frac{1}{\omega_S}\,sen(2\,\lambda_S) + \frac{\alpha}{\omega_L}\,sen(2\,\lambda_L)\right] \\ \Delta\epsilon &= \frac{B_S\,sen\,\epsilon_0}{2}\left[\frac{1}{\omega_S}\,cos(2\,\lambda_S) + \frac{\alpha}{\omega_L}\,cos(2\,\lambda_L)\right] \end{aligned}$$

em que t_0 é uma constante de integração. A primeira das equações acima mostra que $\psi(t)$ decresce linearmente com t; então, o eixo $\mathrm{O}\xi$ (ou o Ponto Vernal) se desloca sobre a eclíptica no sentido retrógrado em relação ao da rotação da Terra em torno de seu eixo. Superposto a este movimento, existe uma oscilação de $\mathrm{O}\xi$ em torno de uma posição média, resultante das ações do Sol e Lua. Este termo não existe no caso do pião simétrico porque nele, o momento do pêso do pião é constante.

O termo não periódico dado por

$$\Delta\Psi = (1+\alpha)\,B_S\,cos\,\epsilon_0\,(t-t_0)$$

é denominado precessão em longitude. Em geral $(t-t_0)$ é medido em anos ou séculos em relação a uma época t_0.

A taxa média de precessão lunissolar é:

$$\begin{aligned} <\dot{\psi}> &= \frac{1}{2\,\pi}\int_0^{2\,\pi}\dot{\psi}\,d\lambda = (1+\alpha)\,B_S\cos\epsilon = \\ &= 3,18\,B_S\cos\epsilon \end{aligned}$$

Inserindo os valores numéricos, $B_S = 17'', 38$/ano (segundos de arco/ano); $\cos\epsilon_0 = 0,9175$ obtém-se

$$\begin{aligned} <\dot{\psi}_S> &= 15'', 95\,/\mathrm{ano}; \\ <\dot{\psi}_L> &= 34'', 60\,/\mathrm{ano}; \\ <\dot{\psi}> &= 50'', 55\,/\mathrm{ano} \end{aligned}$$

Este último valor é muito próximo do determinado atualmente: $<\dot{\psi}> = 50'', 29$/ano[(4)].

O Ponto Vernal desloca-se sobre a eclíptica de 1 grau em $3600''/50, 55''$/ano $= 71, 22$ anos e faz uma volta completa sobre este plano em $360°\,\mathrm{x}\,71, 22 = 25\,638$ anos (o valor atualmente aceito para o período da precessão é de 25 770 anos).

O termo periódico de $\Delta\psi$ (com coeficientes em segundos de arco por ano):

$$\Delta\psi' = -1'', 268\,sen(2\,\lambda_S) - 0'', 550\,sen(2\,\lambda_L)$$

é chamado de nutação em longitude e, combinada com a integral de $\dot{\epsilon}$

$$\Delta\epsilon = 0'', 206\,cos(2\,\lambda_S) + 0'', 089\,cos(2\,\lambda_L)$$

e chamada de nutação em obliquidade, constitui a nutação da Terra. O termo solar nessas expressões tem um período de 6 meses trópicos; o lunar, de 13,66 dias (semiperíodo de revolução trópica da Lua). Como $\Delta\psi'$ é medido sobre a eclíptica e $\Delta\epsilon$, perpendicularmente a ela, os termos solar e lunar podem ser combinados de modo a se ver a nutação do eixo de rotação terrestre: sob a influência do Sol, este eixo descreve uma elipse de semi-eixos com $1,27$ e $0,21$ segundos de arco de dimensão; sob a influência da Lua, esta elipse tem semi-eixos de $0,55$ e $0,09$ segundos de arco. Estas curvas são descritas no mesmo sentido do movimento de translação da Terra.

Os efeitos da precessão e da nutação solar e lunar podem ser compostos para dar o movimento do eixo de rotação terrestre no epaço. Sob o efeito do Sol, a trajetória é uma ciclóide com seus pontos de retorno correspondendo aos equinócios. O eixo descreve dois arcos por ano. Sob o efeito da Lua, a curva é também um ciclóide, com aproximadamente 27 arcos por ano.

A discussão acima tem como hipótese fundamental que a Lua se move sobre a eclíptica e segue, em uma linguagem mais moderna, a mesma argumentação de Newton. Embora a aproximação acima seja muito boa para a precessão, ela não é suficiente para a descrição da nutação. Devido ao plano da órbita lunar ser inclinado em relação à eclíptica há grandes variações da obliquidade desta órbita em relação ao equador terrestre (entre $18^\circ 18'$ e $28^\circ 36'$). Além disso, a linha dos nodos da órbita lunar com a eclíptica possui um movimento retrógrado sobre este plano, de período $18,6$ anos. Estes dois fatos dão orígem a um termo periódico mais importante, descoberto por Bradley em 1745, cujas amplitudes são $17,20''$ em longitude e $9,21''$ em obliquidade, e que não pode ser obtido com as hipóteses adotadas aquí.

Referências

1. Marion, J. B., *Classical Dynamics*, Academic Press, New York, 1965.
2. Haisch, B. M., Am. Journ. of Phys., **49**, 636 (1981).
3. Allen, C. W., *Astrophysical Quantities* (3^{rd} Edition), The Athlone Press, London, 1973.
4. *Explanatory Supplement of the Astronomical Ephemeris* (Ed. K. Seidelmann) - University Science Book, Mill Valley, USA, 1992.