O Campo Elétrico Gerado por uma Distribuição Fractal de Cargas

(The eletric field produced by a fractal charge distribution)

Leonardo L. Portes

Departamento de Física, Universidade Federal de Minas Gerais

Cx Postal 702, CEP 30123-970 Belo Horizonte, MG, Brasil

leonardo@fisica.ufmg.br

Recebido em 22 de Fevereiro, 1999

Qual seria o campo elétrico produzido por uma distribuição de cargas de dimensão fractal D_q? Neste trabalho apresentamos a resposta para algumas distribuições especiais, obtidas a partir da poeira de Cantor. Encontramos, para algumas regiões do espaço, um comportamento geral $E(r) \sim \frac{1}{r^{2-D_q}}$, onde r se refere a posição em planos de simetria da distribuição a partir da origem (e não a todo o espaço).

What would be the electrical field produced by a charge distribution with fractal dimension D_q? In this paper we present the answer for some special distributions, obtained from the Cantor dust. We find, in some regions in the space, a general behavior $E(r) \sim \frac{1}{r^{2-D_q}}$, where r is the position in symmetry planes of the distribution from the origin (not the whole space).

I Introdução

No estudo da eletrostática nos defrontamos, em geral, com distribuições simples de cargas: esferas, planos, cilindros, linhas, pontos etc. Nesses casos, onde os objetos eletricamente carregados possuem geometria euclidiana, podemos escrever explicitamente a função densidade de cargas, $\rho(r_0)$, e assim calcularmos o campo elétrico gerado. Vejamos, por exemplo, uma esfera de raio R, cuja densidade de cargas cresce linearmente com o raio: $\rho(r_0) = Ar_0$, sendo A é uma constante de proporcionalidade. A equação de Coulomb[1] afirma que, para qualquer distribuição de cargas, o campo gerado num ponto $\overrightarrow{r}$ do espaço é

$$\overrightarrow{E}(r) = \int\int\int_V \frac{\rho(r)}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_0|^3} \left(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_0\right) d^3 r_0. \quad (1)$$

Substituindo o valor da densidade de cargas da esfera em questão reescrevemos (1) como

$$E(r) = \int_V \frac{Ar}{|r - r_0|^2} d^3 r_0 \; . \quad (2)$$

Devido a simetria esférica da distribuição pudemos deixar de lado o caráter vetorial de (1), que simplifica bastante a integração. Uma forma às vezes mais direta de encontrarmos o campo elétrico é através da lei de Gauss[2]. Por ambos os caminhos chegamos ao resultado

$$E(r) = \frac{AR^4}{8r^2} \equiv \frac{constante}{r^2}, \quad (3)$$

e se desejarmos o vetor $\overrightarrow{E}(r)$ sabemos que possui o módulo acima, direção radial e sentido para fora (dentro) se a distribuição for de cargas positivas (negativas).

O passo primordial no cálculo (analítico) do campo elétrico é escrevermos a função densidade de cargas $\rho(r_0)$, como no exemplo acima. Isso nem sempre é possível, como no caso de um objeto de dimensão fractal carregado eletricamente. Uma das características desse tipo de objeto é sua não analiticidade, o que inviabiliza escrever sua densidade de cargas explicitamente (embora sempre possamos adotar o cálculo numérico).

Relembremos alguns resultados da eletrostática que nos ajudarão a prosseguir. Se r é a distância de um ponto do espaço a um objeto eletricamente carregado o campo gerado por:

[1] Ao longo do texto não usaremos explicitamente nenhuma unidade de medida, mas escrevemos a equação de Coulomb dessa forma supondo um sistema de medida no qual $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 1$.

1. uma carga puntual é proporcional a r^{-2} (o mesmo para uma distribuição uniforme de simetria esférica, com no exemplo acima - vide eq. (3));

2. uma linha infinitamente longa e de ρ uniforme varia com r^{-1};

3. um plano infinito, também de ρ uniforme, é constante: $E(r) \sim r^0$.

Nos casos acima observamos o comportamento geral

$$E(r) \propto \frac{1}{r^{2-D}}, \tag{4}$$

D sendo a dimensão do objeto eletricamente carregado.

Podemos nos perguntar se haveria distribuições de cargas, às quais pudéssemos atribuir uma dimensão fractal D_q, cujos campos tivessem essa característica: depender de forma tão simples da dimensão do objeto, como na eq.(4). A resposta que encontramos, depois de calcular numericamente a eq.(2) para várias distribuições de cargas de carater fractal, foi afirmativa. A importância dessa confirmação é a de reforçar nossa intuição sobre o comportamento do campo elétrico, em relação à geometria da distribuição de cargas. Mas, antes de continuarmos, definiremos a *dimensão fractal de carga*.

II Dimensão Fractal de Carga D_q

Quando um objeto é auto-similar, a massa $M(r)$ contida dentro de uma esfera de raio r obedece à relação de escala

$$M(r) \propto r^{D_m}. \tag{5}$$

O expoente D_m é chamado de *dimensão de massa* e nos diz como a matéria preenche o espaço. Esta é uma definição da noção de fractal comumente usada na física [3][5].

O correspondente eletrostático é a distribuição de cargas no espaço. Podemos caracterizá-la por uma relação análoga a (5)[1]:

$$Q(r) \propto r^{D_q}, \tag{6}$$

onde $Q(r)$ se refere à carga total na interseção entre a distribuição de cargas e uma esfera de raio r (podemos usar, da mesma forma, quadrados ou cubos de aresta r). Se, por exemplo, a carga na interseção com um círculo de raio r_1 for Q_1 e com um círculo de raio r_2 for Q_2 a dimensão fractal de carga (o expoente D_q de (6)) será

$$D_q = \frac{\log Q_2 - \log Q_1}{\log r_2 - \log r_1} \equiv \frac{\log \frac{Q_2}{Q_1}}{\log \frac{r_2}{r_1}} \tag{7}$$

O próximo passo será a construção de *fractais de carga* em dimensões de imersão $d = 1$ e $d = 2$, com os quais verificaremos (4). Todos serão baseados no fractal conhecido como *Poeira de Cantor*.

III Dimensão de Imersão $d = 1$

III.1 A poeira de Cantor eletricamente carregada

A poeira de Cantor é um fractal cuja dimensão de imersão é 1 (i.e., ela está contida em uma linha). Sua construção segue duas etapas: interpolação e extrapolação[4]. Na primeira consideremos o segmento de reta $[0, 1]$ ao longo do eixo x, chamado de iniciador[1] (figura 1). Retiramos uma fração central c, como $1/3$ (chamamos isso de gerador). Ficamos, então, com dois segmentos , $[0, \frac{1}{3}[$ e $]\frac{2}{3}, 1]$. Repetimos o processo infinitas vezes, o que nos leva a um conjunto infinito de pontos espalhados no intervalo. Tal como está, a poeira de Cantor não é auto-similar. Com este fim, copiamos, segunda etapa, o conjunto $[0, 1]$ anterior em $[2, 3]$, obtendo um objeto três vezes maior que o primeiro ($[0, 3]$) e assim sucessivamente. Finalmente, chegamos a um conjunto que se estende de 0 a ∞ e cuja dimensão, como definida em (5), é

$$D_m = \frac{\log 2}{\log 3} = 0,6309....$$

Variando o quanto retiramos na primeira etapa (se $c = \frac{1}{2}$ ou $c = \frac{1}{4}$, por exemplo), obtemos dimensões diferentes, mas sempre entre 0 e 1.

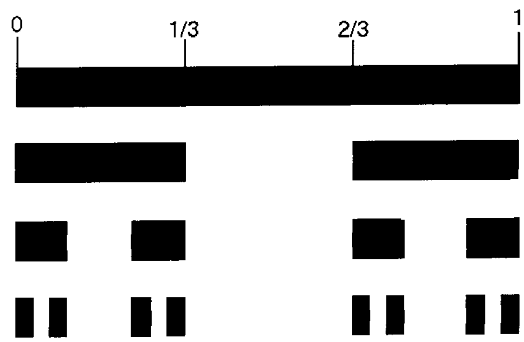

Figura 1. Construção da Poeira de Cantor.

Podemos construir um fractal de carga baseado na poeira de Cantor considerando como iniciador o segmento $[0, L]$ linearmente carregado no eixo X, de carga total Q (o fato de um dos extremos ser L e não 1 nos ajudará posteriormente). Se no processo de interpolação retirarmos um segmento da reta, e junto a carga contida neste, ao final não nos restará carga alguma, pois a carga total será $Q(n) = (1-c)^n Q$, n o número de iterações, e

$$\lim_{n \to \infty} (1-c)^n Q = 0.$$

Por esta razão, o gerador, ao invés de simplesmente eliminar um segmento central, distribui as cargas da fração c central igualmente para $[0, \frac{L(1-c)}{2}[$ e $]\frac{L(1+c)}{2}, L]$. Ficamos, então, com dois segmentos de carga $\frac{1}{2}Q$. Na próxima geração, teremos quatro segmentos de carga $\frac{1}{4}Q$ e assim sucessivamente. Numa geração n teremos 2^n segmentos de carga $\left(\frac{1}{2}\right)^n Q$, embora a carga total permaneça constante. Efetuando a etapa de extrapolação, cobriremos o segmento $[0, \infty[$ de cargas.

Como estamos fazendo uma analogia com a linha reta e infinita (uniformemente) carregada, devemos estender nosso fractal no segmento $]-\infty, 0]$. Para tal simplesmente refletiremos o conjunto $[0, \infty[$ através do plano YoZ. Um outro modo seria colocarmos um plano condutor infinito, aterrado, preenchendo o plano YoZ, que equivale, pelo método das imagens[2], à reflexão.

Tal reflexão coloca duas cargas na origem. Como o acréscimo de apenas uma carga puntual não interfere no comportamento geral do campo E, consideraremos, para efeito de cálculo, apenas uma carga na origem.

Devido à simetria de reflexão em relação ao plano YoZ, o campo elétrico nele é radial, e seu módulo depende apenas da distância r a origem:

$$E(\overrightarrow{r} \in YoZ) = E(r).$$

Variando r, conjecturamos encontrar $E(r) \sim \frac{1}{r^{\alpha}}$.

III.2 Cálculo de $E(r)$

Como não podemos simular computacionalmente um fractal genuíno infinito, $]-\infty, \infty[$, o faremos grande o suficiente, $]-L, L[$, e limitaremos o processo de interpolação até uma geração N. Esse objeto, tal como está, ainda não é um fractal, mas um conjunto finito (e numerável) de pequenas barras carregadas (que indexaremos pela letra i) no qual, se fizermos o limite $N \to \infty$, se torna um fractal. Ele é chamado de *pré-fractal*[1].

Ao calcularmos o campo elétrico numa dada posição P, devemos fazer com que o comprimento das barras da $N-ésima$ geração seja bem menor do que a distância destas a P. Dessa forma, é mais conveniente observarmos não a geração N, mas o comprimento l_N de suas barras, que é dado por $l_N = \left(\frac{1}{2}\right)^N L\left(1-c\right)^N$. Assim, quando mencionarmos que para um dado fractal $l_N < k$ estaremos dizendo que paramos o processo de iteração ao atingir a primeira geração em que o comprimento das barras é inferior a k. O limite $N \to \infty$ se torna equivalente, então, a $k \to 0$.

Para cada campo $\overrightarrow{E}(r)_i$ (estamos olhando $\overrightarrow{r} \in YoZ$), gerado por uma barra i situada em x_i, haverá um $\overrightarrow{E}(r)_j$, gerado por sua reflexão na posiçao $x_j = -x_i$, fazendo as componentes x de $\overrightarrow{E}(r)_i$ e $\overrightarrow{E}(r)_j$ se anularem. Dessa forma, basta considerarmos duas vezes a parte radial de $E_i(r)$ das barras localizadas no semieixo não negativo de X. Como cada barra é muito pequena em relação a sua distância ao plano YoZ aproximaremos seu campo pelo de uma carga puntual.

Após essas simplificações chegamos a

$$E(r) = 2\sum_i \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^N Qr}{\left(r^2 + x_i^2\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{8}$$

O conjunto x_i define o fractal usado e depende de L, k e c . Ele foi gerado por um algoritmo simples que funciona como o processo de interpolação. Através dele, calculamos a expressão (8) para $c = \frac{1}{3}$ (ou seja, $D_q = \frac{\log 2}{\log 3}$), $\left(\frac{1}{2}\right)^N Q = 1$, $L = 10$ e $k = 10^{-4}$. A distância r variou entre $0,1$ e 1, pois desta forma $k << r << L$, ou, em outras palavras, nem tão perto para vermos o comprimento das barras e nem tão longe para não percebermos que a distribuição é finita. Na figura 2.a mostramos $\log E(r) \times \log r$. Vemos que este gráfico é praticamente uma reta (o coeficiente de correlação é $R = 0,9999998$), o que sugere uma relação do tipo lei de potência

$$E(r) \propto \frac{1}{r^{\alpha}}, \tag{9}$$

onde α é a inclinação da reta. Fazendo a regressão linear, encontramos

$$\alpha = 1,36776 \pm 0,00008,$$

que é bem próximo do valor esperado

$$(2 - D_q) = 1,36907....$$

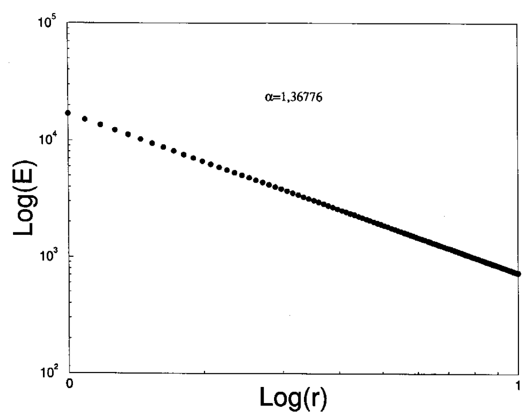

Figura 2a. Gráfico *logxlog* para o campo elétrico em função da distância r. A inclinação force $\alpha = 1,36776 \pm 0,00008$.

Como vimos, podemos explorar dois limites: $L \to \infty$ e $N \to \infty$ $(k \to 0)$ e esperamos que $\alpha = \alpha\left(L, k\right)$. Apresentamos o comportamento de α, nesses limites, nas figuras 2.b e 2.c, respectivamente. Na primeira, temos $\alpha(L, k = 10^{-4}) \times \log L$ e constatamos que $L \to \infty \Longrightarrow \alpha \to \left(2 - D_q\right)$. Como para $L > 100$ os valores de α são praticamente os mesmos, fixamos $L = 100$ e variamos k na fig. 2.c: $\alpha(L = 100, k) \times \log k$. Novamente, observamos que α se aproxima do valor teórico $k \rightarrow 0 \Longrightarrow \alpha \rightarrow (2 - D_q)$, chegando a uma concordância de três casas decimais (Tabela I)!

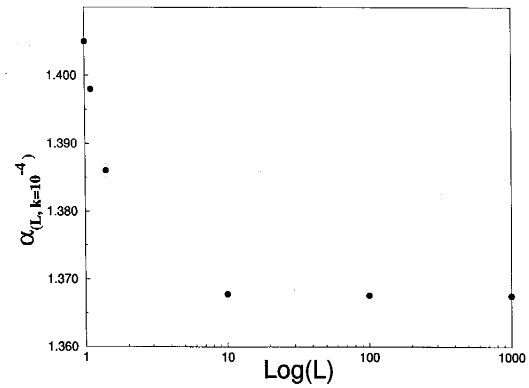

Figura 2b. Expoente α em função do tamanho (L) do fractal. O valor de k for fixado em $k = 10^{-4}$.

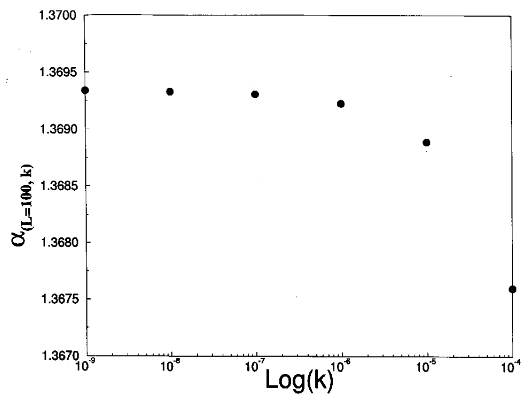

Figura 2c. Expoente *alpha* em função do parâmetro k. O tamanho do fractal foi fixado em $L = 100$.

Repetimos esses cálculos para dimensões fractais diferentes (bastando modificar a fração c no algorítimo) e encontramos as mesmas características acima. Montamos a tabela I com os melhores[2] valores do expoente α. Nela constam os dados referentes a $L = 100$ e $k = 10^{-9}$).

Tabela I: Valores de α e $2 - D_q$ para algumas distribuições de dimensões diferentes.

c	D_q	$2 - D_q$	α
$1/3$	$0,63093$	$1,36907$	$1,36934 \pm 0.00007$
$1/2$	$0,5000$	$1,5000$	1.5018 ± 0.0005
$3/4$	$0,333$	$1,666$	1.682 ± 0.003
$1/4$	$0,79248$	$1,20752$	$1.29327 \pm 0,00003$

IV Dimensão de Imersão $d = 2$

IV.1 Barras de Cantor carregadas

Consideremos distribuições com dimensão de imersão 2 e contidas em planos. Uma opção é simplesmente estender o conjunto $]-\infty, \infty[$ anterior, infinitamente, ao longo do eixo Y. Após essa operação, chegamos a um conjunto de fitas infinitamente longas, com densidade de carga ρ, no plano XoY, simetricamente dispostas ao plano YoZ (fig. 3).

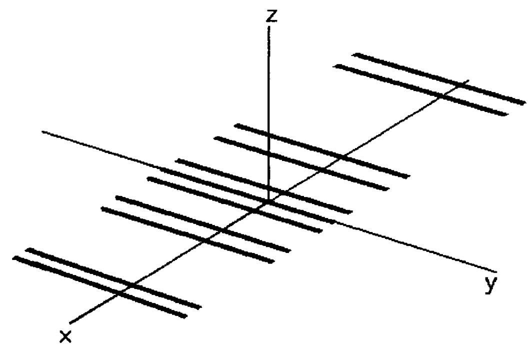

Figura 3. Poeira de Cantor estendida ao longo do eixo Y. A dimensão deste objeto é igual à da poeira que o gerou acrescida de 1.

Se medirmos a carga na interseção desse conjunto com um quadrado cujos lados, de comprimento r, são paralelos aos eixos X e Y veremos que ela segue a lei de potência (6). A dimensão de carga desse conjunto de *barras carregadas* é igual à da poeira de Cantor que o gerou mais 1.

Pelos mesmos argumentos anteriores, somente as contribuições paralelas ao eixo Z não se cancelam, e o campo $E(\overrightarrow{r} \in YoZ) = E(z)$ será a soma dos campos gerados por linhas infinitas carregadas (veja que devido a largura das fitas elas podem ser aproximadas por linhas)

$$E(z) = 2 \sum_i \frac{\rho}{z^2 + x_i^2}, \tag{10}$$

onde ρ é a densidade linear de cargas de uma linha. Calculamos (10) da mesma forma que na seção anterior. O algorítimo dos x_i foi o mesmo, bastando mudar o campo gerado para a forma (10). Fizemos $c = \frac{1}{3}$ ($D_q = \frac{\log 2}{\log 3} + 1$), $\rho = 1$, r variando de 0,1 a 1, $L = 10$

[2]Para cada fractal calculamos vários expoentes α, cada um relativo a parâmetros k e L diferentes. Os melhores valores se referem a k pequeno e L grande, simultaneamente.

e $k = 10^{-4}$. Novamente o campo $E(z)$ se comportou como na fig. 2.a, sendo o coeficiente de correlação $R = 0,9999892$. A regressão linear forneceu

$$\alpha = 0.3721 \pm 0.0002.$$

Exploramos os limites $k \to 0$ e $L \to \infty$ como no caso anterior. Novamente α tende rapidamente a $(2 - D_q)$.

Repetimos essa análise para outras dimensões de carga e montamos a tabela II, com valores de α para $L = 100$ e $k = 10^{-9}$.

Tabela II: Valores de α e $2 - D_q$ para as barras de Cantor.

c	D_q	$2 - D_q$	α
$1/3$	$1,630930$	$0,369070$	0.369296 ± 0.00003
$1/2$	$1,5000$	$0,5000$	$0,5011 \pm 0,0002$
$3/4$	$1,333$	$0,666$	$0,679 \pm 0.002$
$1/4$	$1,79248$	$0,20752$	$0,29366 \pm 0,00002$

IV.2 'Anéis de Cantor'

Um fractal que se mostrou muito interessante pode ser construido girando-se a poeira de Cantor $[0, \infty[$ em torno do eixo Z. O resultado final é um conjunto auto-similar de anéis concêntricos de raio x_i (fig. 4). A carga elétrica foi colocada de duas maneiras distintas. Primeiro, fizemos com que a densidade linear de cargas de cada anel fosse a mesma. Depois a carga total de cada anel foi feita igual. As dimensões para cada caso são diferentes, sendo a da segunda menor que a da primeira.

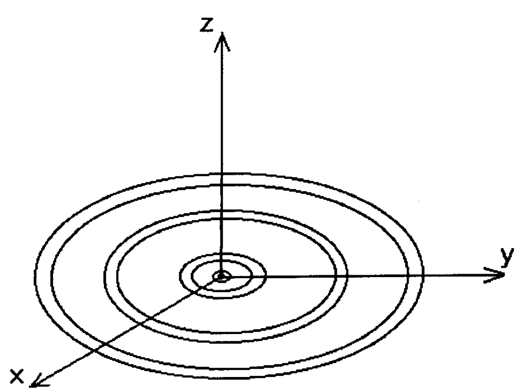

Figura 4. "Anéis de Cantor". A dimensão fractal de carga depende de como distríbuimos as cargas elétricas nos anéis.

Devido à simetria cilíndrica em torno do eixo Z, o campo ao longo deste só possui a componente z e é da forma $E(\overrightarrow{r} \in Z) = E(z)$ e dado por (para um pré-fractal)

$$E(z) = \sum_i \frac{zQ_i}{z^2 + x_i^2}. \qquad (11)$$

Assim, procuraremos o comportamento (6) nesse eixo. O conjunto x_i é o mesmo usado nos casos anteriores.

IV.2.1 Densidade de cargas constante

Com essa escolha, quanto maior o raio do anel maior será a sua carga. Calculemos D_q considerando que a poeira no estágio pré-fractal que gerou o conjunto de anéis tenha $L = 3$ e $k = 1$ (acabamos de lhe retirar o terço central). Girando o conjunto, ficamos com dois anéis de carga proporcional à área (fig. 5). A carga na interseção desse objeto e uma esfera de raio $r = 1$ é $Q = \rho\pi$ (ρ a densidade de cargas). Para $r = 3$ temos $Q = \rho(6\pi)$. Usando a eq.(7) ,obtemos a dimensão de cargas

$$D_q = \frac{\log 6}{\log 3} \simeq 1,63093$$

que é a mesma dimensão das 'barras de Cantor'. Para frações c diferentes, o procedimento é o mesmo.

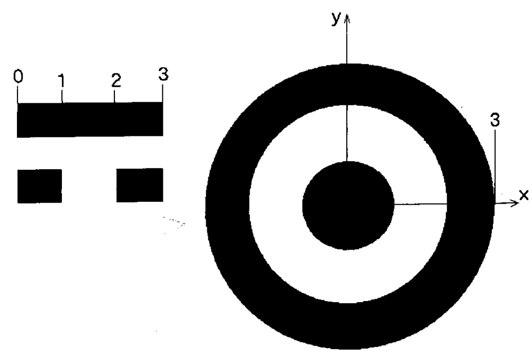

Figura 5. "Anéis de Cantor" na fase pré-fractal: $L = 3$ e $k = 1$.

Calculamos (11) para esse fractal ($c = 1/3$) com z variando entre $0,1$ e 1, $L = 10$ e $k = 10^{-4}$. Para satisfazer a condição da densidade de cargas ser a mesma em cada anel fizemos $Q_i = x_i$ em (11)(veja que, sendo os anéis muito finos, a carga se torna proporcional ao perímetro $2\pi x_i$).

Novamente $\log E(z) \times \log z$ foi uma reta ($R = 0,999966$) e cuja inclinação nos forneceu

$$\alpha = 0.3780 \pm 0,0001.$$

Melhorando a construção do fractal com os limites $L \to \infty$ e $k \to 0$ vemos α se aproximar de $(2 - D_q)$, como em fig. 2.b e 2.c. Na tabela III, seguem os valores de α para dimensões diferentes. Os dados se referem a $L = 100$ e $k = 10^{-9}$.

Tabela III: Valores de α e $2 - D_q$ para os anéis de Cantor de densidades de cargas iguais.

c	D_q	$2 - D_q$	α
$1/3$	$1,630930$	$0,369070$	0.3693 ± 0.0001
$1/2$	$1,5000$	$0,5000$	0.5028 ± 0.0009
$3/4$	$1,333$	$0,666$	$0,705 \pm 0,008$
$1/4$	$1,79248$	$0,20752$	0.29409 ± 0.00006

IV.2.2 Carga constante

Calculemos D_q quando cada anel possui a mesma carga Q. Consideremos que o conjunto está no estágio pré-fractal com $L = 3$ e $k = 1$. A carga na interseção desse objeto e uma esfera de raio $r = 1$ é Q, e para $r = 3$ será $2Q$. Segue, então, usando a eq.(7), a dimensão

$$D_q = \frac{\log 2}{\log 3} \simeq 0,63093,$$

que é a mesma da poeira que a gerou. Aqui parece haver uma inconsistência, mas lembremo-nos que, depois de girar a poeira, *redistribuimos* as cargas, dessa forma a dimensão poderia ter qualquer valor.

Fazemos a carga constante com a substituição $Q_i = Q = 1$ em (11).

Encontramos o comportamento linear de $\log E(r)$, como esperado. Para $L = 10$, $k = 10^{-4}$ e r entre $0,1$ e 1 a regressão linear nos forneceu $R = 0,9999998$ e

$$\alpha = 1,36946 \pm 0,00007.$$

Quanto melhor a construção do fractal, limites $k \to 0$ e $L \to \infty$, mais α se aproximou de $(2 - D_q)$. A tabela IV mostra os melhores valores que obtivemos para α. Nestes $L = 100$ e $k = 10^{-9}$.

Tabela IV: Valores de α e $2 - D_q$ para os anéis de Cantor com cargas iguais.

c	D_q	$2 - D_q$	α
$1/3$	$0,630930$	$1,369070$	1.36934 ± 0.00007
$1/2$	$0,5000$	$1,5000$	1.5018 ± 0.0005
$3/4$	$0,333$	$1,666$	$1,683 \pm 0,003$
$1/4$	$0,79248$	$1,20752$	1.29327 ± 0.00003

V Conclusão

A concordância entre os valores de α e $2 - D_q$ não é de todo surpreendente. Se utilizarmos a densidade média de cargas ao invés do valor exato, que não nos é possível escrever explicitamente, poderemos integrar (1). Por exemplo, consideremos a poeira de Cantor da seção 3, de dimensão de cargas D_q. Fazendo $\rho = \lambda x^{Dq-1}$, onde λ é uma constante, e substituindo em (1)

$$E(r) = 2\int_0^\infty \frac{\lambda x^{Dq-1}}{(r^2+x^2)} \frac{r}{(r^2+x^2)^{\frac{1}{2}}} dx,$$

onde o fator $r/\left(r^2+x^2\right)^{\frac{1}{2}}$ se deve à simetria de reflexão da distribuição em relação ao plano YoZ, que elimina contribuições do campo que não sejam radiais.

Fazendo a mudança de variável $z = \frac{x}{r}$, chegamos ao resultado

$$E(r) = \frac{\gamma}{r^{2-D_q}}, \tag{12}$$

onde γ é uma constante igual a $2\int_0^\infty \frac{\lambda D_q z^{Dq-1}}{(1+z)^{\frac{3}{2}}} dz$. A equação (12) corresponde ao que encontramos anteriormente.

Podemos obter (12) para vários arranjos de cargas, não necessariamente autosimilares, bastando que $\rho = \lambda x^{Dq-1}$. Mas o fato disso ser também verdade para uma distribuição fractal reforça nossa intuição de que o expoente de r reflete a forma como as cargas ocupam o espaço, já que D_q tem um caráter geométrico.

Assim, existe a possibilidade de outras distribuições fractais de cargas seguirem essa lei de potência. Mas devemos fazer um arranjo especial de forma que o fractal seja infinito, pois, do contrário, para grandes distâncias comparadas ao seu tamanho, haverá a interferência do fator assintótico r^{-2}. Examinamos alguns arranjos para o tapete de Sierpinsk e a poeira de Cantor aleatória[1], mas não encontramos nada como (4) (talvêz devido ao arranjo usado). Seria realmente interessante encontrarmos os mesmos resultados aqui expostos para um fractal construido a partir de um objeto bi-dimensional, como o tapete de Sierpinsk.

Observamos ainda uma diferença mais acentuada entre α e $2 - D_q$ quando $c = 1/4$. Isso ocorre devido à precisão finita do cálculo computacional. Como retiramos, a cada iteração, uma pequena parte do conjunto devemos fazer N muito grande, implicando num fractal muito denso. Dessa forma a soma do campo de cada ponto, com muitos termos, se torna imprecisa, pois a cada passo somamos um número pequeno (o campo do ponto número 2000, por exemplo) ao resultado prévio de tal soma, que é grande. Assim, dependendo de quão pequenos esses termos são em comparação com o total, vemos um erro relativo de 50% (seções 4.1 e 4.21) e 10% (seções 3.2 e 4.22).

VI Agradecimentos

A Carlos Moreira pelas sugestões e críticas e a Jeferson Lino Couto pelas figuras. Este trabalho foi parcialmente financiado pelo CNPq.

References

[1] J. Feder. *Fractals*, Plenum Press, New York (1988).

[2] J.D. Jackson. *Classical Electrodynamics.* Wiley, New York (1975).

[3] B.Mandelbrot. Self-affine fractal sets, I: The basic fractal dimensions. *Fractals in Physics*, North-Holland Physics Pub. (1986).

[4] B. Mandelbrot. *Objetos Fractais*, Gradiva (1991).

[5] D.W. Schaefer and K.D. Keefer. Structure of random silicates: Polymers, colloids and porous solids. *Fractals in Physics*, North-Holland Physics Pub. (1986).