O Oscilador Harmônico Linear q-Deformado nas Raízes Primitivas da Unidade e Aplicações

(The q-deformed linear harmonic oscillator at primitive roots of unit and applications)

B.E.Palladino e P.Leal Ferreira

Instituto de Física Teórica, Universidade Estadual Paulista

Rua Pamplona, 145 - CEP 01405-900, São Paulo, SP, Brasil

Recebido em 20 de Novembro, 1998

A estrutura do espectro de níveis de energia do oscilador harmônico unidimensional q-deformado é discutido com certa ênfase pedagógica. Atenção especial é dedicada ao caso em que o parâmetro de deformação q corresponde a uma raiz primitiva da unidade. Nesse caso, representações cíclicas são geradas, exibindo uma estrutura muito peculiar em que um número finito de níveis de energia possuem degenerescência infinita. Outras propriedades do oscilador tais como relações de incerteza e regras de seleção são também examinadas, exibindo-se ainda exemplos de soluções distintas da hamiltoniana para diferentes raízes primitivas da unidade. Uma breve discussão introdutória das propriedades estatísticas de um sistema de osciladores q-deformados é também apresentada.

The structure of the spectrum of energy levels for the q-deformed one-dimensional harmonic oscillator is discussed with certain pedagogical emphasis. Special attention is devoted to the case in which the deformation parameter corresponds to a primitive root of unit. In this case, cyclic representations are generated exhibiting a very peculiar structure in which a finite number of energy levels possesses an infinite degeneracy. Other oscillator properties such as uncertainty relations and selection rules are also examined and examples of distinct solutions of the hamiltonian for different primitive roots of unit are also exhibited. A brief introductory discussion of the statistical properties of a system of q-deformed oscillators is also presented.

I Introdução

O oscilador harmônico é um sistema fundamental em física. É bem sabido que a quantização do oscilador clássico unidimensional representou uma chave para a solução de importantes problemas em física quântica. É também bem sabido que a simplicidade do oscilador harmônico linear está ligada a uma única dependência, no número quântico n, que atua como um contador da quantidade $\hbar\omega$, em relação à qual obtém-se o espaçamento uniforme dos níveis energéticos quânticos.

O conceito de "grupo quântico" alcançou bastante interesse ultimamente, aparecendo em aplicações a vários ramos da física [1]. Um de seus principais ingredientes é um parâmetro de deformação q, introduzido nas relações de comutação que definem a álgebra de Lie do sistema, com a condição de que a álgebra de Lie original, não deformada, seja reproduzida no limite $q \to 1$. (Mais rigorosamente, um "grupo quântico" é caracterizado tanto por uma álgebra de Hopf, contendo uma operação de co-multiplicação, como por uma estrutura de álgebra q-deformada. Vide Ref.[1].)

Neste trabalho, estudamos com algum detalhe a versão quântica deformada do oscilador harmônico linear (OHL) ou, em outras palavras, o oscilador q-deformado, obtido por deformação da álgebra de Heisenberg-Weyl do oscilador, estabelecida pela sua hamiltoniana

$$H = \left(a^{+}a + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \tag{1.1}$$

e pelas relações de comutação dos operadores

$$\begin{aligned} [a, a^{+}] &= 1, \\ [a, H] &= a\hbar\omega, \\ [a^{+}, H] &= -a^{+}\hbar\omega. \end{aligned} \tag{1.2}$$

A formulação algébrica do caso não deformado é bem conhecida dos textos elementares de mecânica quântica [2]. Sua versão deformada será objeto da seção II do presente trabalho. A inclusão de um novo parâmetro q no problema do OHL enriquece substancialmente a estrutura do espectro dos níveis de energia.

Examinaremos as diversas possibilidades, dependendo do parâmetro q ser real, imaginário ou raiz da unidade. Atenção especial será dedicada ao caso em que q corresponde a uma *raiz primitiva da unidade* [3]. Neste último caso, o número de níveis de energia é finito, cada um deles sendo infinitamente degenerado. Este tipo muito peculiar de espectro corresponde a uma representação cíclica da álgebra deformada. Como veremos mais adiante, cada uma delas está associada a uma distinta raiz primitiva da unidade.

Este trabalho está organizado como segue: Na seção II apresentamos o oscilador harmônico linear q-deformado (q-OHL) e descrevemos as suas principais propriedades, tais como os níveis de energia e as relações de incerteza para os vários casos da deformação. Na seção III analisaremos com mais detalhe o caso do oscilador q-deformado quando q é uma raiz primitiva da unidade e na seção IV introduziremos uma discussão das propriedades estatísticas dos q-osciladores. A seção V é reservada às conclusões e discussões finais.

II O Oscilador Harmônico Linear q-deformado

Gostaríamos de iniciar nossa exposição mostrando brevemente a construção do oscilador harmônico linear q-deformado. Começamos escrevendo a hamiltoniana do q-OHL [1]

$$H_q = \frac{1}{2}\hbar\omega(a_q^+ a_q + a_q a_q^+), \tag{2.1}$$

onde os operadores a_q, a_q^+ e N_q obedecem a álgebra q-deformada de Heisenberg-Weyl

$$\begin{aligned} &[N_q, a_q] = -a_q, \\ &[N_q, a_q^+] = a_q^+, \\ &a_q a_q^+ - q^{-1/2} a_q^+ a_q = q^{N_q/2}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Salientamos que as relações acima são usadas de acordo com a notação de Biedenharn [1] para a definição dos q-números

$$[x] = \frac{q^{x/2} - q^{-x/2}}{q^{1/2} - q^{-1/2}}. \tag{2.3}$$

Aqui, nós também estaremos usando o operador q-deformado tal qual definido por Biedenharn [4] e Mac Farlane [5]

$$[N_q] = a_q^+ a_q. \tag{2.4}$$

A representação é fixada pela ação dos operadores nos estados em espaços de Fock [6]

$$\begin{aligned} a_q|n\rangle &= [n]^{1/2}|n-1\rangle \\ a_q^+|n\rangle &= [n+1]^{1/2}|n+1\rangle \\ N_q|n\rangle &= n|n\rangle \ . \end{aligned} \tag{2.5}$$

Os estados da energia, obtidos a partir da hamiltoniana do q-OHL, Eq. (2.1), são dados por

$$E(n) = \frac{1}{2}\hbar\omega([n] + [n+1]) = \frac{1}{2}\hbar\omega\frac{[n+1/2]}{[1/2]} \ . \tag{2.6}$$

Note que, no limite $q \to 1$, a energia $E(n)$ torna-se $\hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$, como no caso do oscilador não-deformado. A partir da Eq. (2.6), também pode-se perceber que a energia do estado fundamental $E(n=0) = E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$, é a mesma que no caso não-deformado. Devemos mencionar, contudo, que há ainda outras construções um pouco mais gerais para as quais esta situação se modifica. No caso de outras representações generalizadas, tais como as representações não-equivalentes [6,7] por exemplo, aparecem termos adicionais na expressão para a energia que levam ao deslocamento da energia de ponto-zero do seu valor usual $\frac{1}{2}\hbar\omega$.

Podemos definir q-operadores para a posição e o momento através de

$$\begin{aligned} Q_q &= \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{1/2}(a_q^+ + a_q), \\ P_q &= i\left(\frac{m\omega\hbar}{2}\right)^{1/2}(a_q^+ - a_q), \end{aligned} \tag{2.7}$$

e daí segue-se uma versão q-deformada das relações de incerteza

$$i[P_q, Q_q] = \hbar[a_q, a_q^+] = \hbar(a_q a_q^+ - a_q^+ a_q). \tag{2.8}$$

A ação da Eq. (2.8) nos estados "ket" $|n\rangle$ dá [6]

$$i[P_q, Q_q] = \hbar([n+1] - [n]) = \hbar\frac{[1/2][2n+1]}{[n+1/2]}. \tag{2.9}$$

Combinando as Eqs.(2.9) e (2.6) encontra-se ainda uma relação bastante interessante

$$\frac{i}{\hbar}[P_q, Q_q] = \frac{1}{2}\hbar\omega\frac{[2n+1]}{E(n)}, \tag{2.10}$$

que indica que para um q-oscilador a incerteza decresce com o aumento na energia $E(n)$.

Partindo das Eqs.(2.7) pode-se também chegar às seguintes regras de seleção:

$$\langle n'|Q_q|n\rangle = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{1/2} \begin{cases} [n+1]^{1/2}, & \text{para } n' = n+1 \\ [n]^{1/2}, & \text{para } n' = n-1 \end{cases},$$

$$\langle n'|P_q|n\rangle = i\left(\frac{m\omega\hbar}{2}\right)^{1/2} \begin{cases} [n+1]^{1/2}, & \text{para } n' = n+1 \\ -[n]^{1/2}, & \text{para } n' = n-1 \end{cases}, \tag{2.11}$$

mostrando que somente transições entre níveis vizinhos são permitidas.

A separação entre os níveis de energia é dada por

$$\Delta(n) = E(n+1) - E(n) = \frac{1}{2}\hbar\omega\frac{1}{[1/2]}\left(\left[n+\frac{3}{2}\right] - \left[n+\frac{1}{2}\right]\right) = \frac{1}{2}\hbar\omega([n+2]-[n]). \tag{2.12}$$

Torna-se claro que agora não temos uma separação igual entre todos os níveis de energia, como acontece no caso não-deformado do OHL. Desta feita, $\Delta(n)$ depende de n e do parâmetro de deformação q, pois a diferença entre os q-números na Eq. (2.12) não é constante.

No caso em que a deformação é real, o parâmetro q pode ser escrito como $q = e^{\alpha}$, onde α é um número real. Da definição de um q-número, Eq. (2.3), obtém-se diretamente que

$$[x]_{\alpha} = \frac{\mathrm{senh}(x\alpha/2)}{\mathrm{senh}(\alpha/2)}. \tag{2.13}$$

Assim, no caso de uma deformação real, a energia pode ser reescrita como

$$E(n) = \frac{1}{2}\hbar\omega\frac{\mathrm{senh}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha/2\right)}{\mathrm{senh}(\alpha/4)}. \tag{2.14}$$

e a separação dos níveis de energia é

$$\Delta(n) = \hbar\omega\cosh((n+1)\alpha/2). \tag{2.15}$$

Observe que quando $q \to 1$, o parâmetro $\alpha \to 0$ e $\Delta(n) \to \hbar\omega$ (constante), como no caso não-deformado. Além disso, a Eq. (2.15) dá $\Delta(n) \to \infty$ quando $n \to \infty$, mostrando que o espaçamento entre os níveis de energia cresce com a função cosh.

Para uma deformação imaginária, com q na forma $q = e^{i\alpha}$, onde α é novamente um número real (neste caso, correspondendo a uma fase) surge uma situação diferente. Neste caso, uma substituição $\alpha \to i\alpha$ nas equações anteriores leva diretamente às expressões

$$E(n) = \frac{1}{2}\hbar\omega\frac{\mathrm{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha/2\right)}{\mathrm{sen}(\alpha/4)} \tag{2.16}$$

e

$$\Delta(n) = \hbar\omega\ \cos((n+1)\alpha/2). \tag{2.17}$$

Com a troca de funções hiperbólicas por funções trigonométricas, os níveis de energia passam a ficar "comprimidos" no espectro. Novamente, $\Delta(n) \to \hbar\omega$ quando $\alpha \to 0$, o limite correto, mas agora $\Delta(n)$ "oscila" quando n cresce. A Eq.(2.17) mostra que $\Delta(n)$ pode mudar de sinal, indicando que neste caso os níveis de energia estarão limitados por valores mínimo e máximo, determinados pelas funções trigonométricas na Eq. (2.16).

Então, podemos notar que na versão q-deformada do OHL existe uma estrutura muito rica para o espectro, dependendo se q é real ou imaginário. A Fig. 1 mostra o espectro dos estados de energia para diferentes possibilidades do parâmetro q.

Uma situação muito especial é encontrada se impusermos que $\Delta(n) = \hbar\omega$ (constante) na Eq. (2.17), reproduzindo o resultado do caso do oscilador não-deformado. Para satisfazer esta condição precisaríamos ter

$$(n+1)\frac{\alpha}{2} = 2\pi k; \quad k = 0, \pm1, \pm2, ... \tag{2.18}$$

dentro da função cosseno na Eq. (2.17). Então, a relação

$$\alpha = 4\pi\frac{k}{n+1}, \tag{2.19}$$

que diz que α é um múltiplo ou submúltiplo de 4π, deveria ser válida $\forall n$ de modo a reproduzir o espaçamento de níveis $\hbar\omega$. Isto não é possível e então $\Delta(n)$ varia com o número quântico do oscilador n. Em geral, nós teremos $-\hbar\omega \leq \Delta(n) \leq \hbar\omega$. Quando α é um múltiplo de 4π, tem-se $\alpha/2 = 2\pi$ na Eq. (2.17) e uma situação análoga à de um oscilador não-deformado acontece.

Quando α é um submúltiplo de 4π ocorrem degenerescências e o espectro é limitado pelos valores máximo e mínimo da energia. Esta situação corresponde a um parâmetro α da forma

$$\alpha = k\frac{4\pi}{p}, \tag{2.20}$$

com $k = 0, \pm1, \pm2,...$ e p um inteiro.

Deste modo, com $q = e^{i\alpha}$, temos

$$q^p = e^{ik\pi} = \cos(k\pi) + i\mathrm{sen}(k\pi) = \pm1, \tag{2.21}$$

indicando que q corresponde à p-ésima "raiz da unidade" $q = p\sqrt{1}$.

Uma situação bem peculiar acontece quando α não é nem múltiplo e nem submúltiplo de 4π. Neste caso, os níveis de energia estarão posicionados entre os valores mínimo e máximo sem que ocorra degenerescência, preenchendo o espaço dentro da banda de energia.

Na próxima seção iremos discutir o caso especial em que q é uma raiz primitiva da unidade, examinando as degenerescências do problema e a representação em forma de matriz para a hamiltoniana do q-oscilador.

III q-Oscilador nas Raízes da Unidade

Vamos começar esta seção estabelecendo alguns conceitos. Um número complexo $w = e^{i\varphi}$ é chamado uma N-ésima raiz da unidade se $w^N = 1$. Além disso, é uma raiz primitiva da unidade se ele também satisfaz $w^k \neq 1$, para $1 \leq k < N$, com k inteiro. Assim, uma raiz da unidade pode ser escrita na forma [3, 8]

$$w = e^{i\varphi} = e^{i2\pi/N}, \quad N \text{ inteiro}, \tag{3.1}$$

que corresponde, na nossa notação anterior, a

$$q^{1/2} = e^{i\alpha/2} = e^{i2\pi/p}. \tag{3.2}$$

Neste caso existe um número finito de níveis de energia, com as energias dadas pela Eq. (2.16). Devido a periodicidade da função trigonométrica, cada nível torna-se infinitamente degenerado. A Eq. (2.20) mostra a forma geral para o parâmetro α correspondente a este caso.

Então, para uma raiz primitiva, nós podemos colocar $\alpha/2 = 2\pi k/N$, levando-nos a obter números-q da forma

$$[n] = \frac{\mathrm{sen}(n2\pi k/N)}{\mathrm{sen}(2\pi k/N)}, \tag{3.3}$$

onde $k \in \{1, 2, ...N-1\}$ é o índice da raiz primitiva e N é o número da raiz da unidade.

A hamiltoniana do q-oscilador, Eq. (2.1), tem neste caso autoenergias dadas por

$$E(n, w^k) = \frac{1}{2}\hbar\omega([n]_{2\pi k/N} + [n+1]_{2\pi k/N}) = \frac{1}{2}\hbar\omega \frac{\mathrm{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)2\pi k/N\right)}{\mathrm{sen}\left(\frac{1}{2}2\pi k/N\right)}. \tag{3.4}$$

Perceba que agora as energias $E(n)$ dependem da escolha de uma determinada raiz primitiva w^k. A hamiltoniana H pode ser escrita na forma de uma representação matricial

$$H(w^k) = \frac{1}{2}\hbar\omega \begin{pmatrix} [1] & & & & \\ & [1]+[2] & & & \\ & & [2]+[3] & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & [N-1]+[N] \end{pmatrix}_{2\pi k/N}, \tag{3.5}$$

onde os colchetes [ ] dos números-q devem ser tomados a $2\pi k/N$, como mostrado acima, nas Eqs.(3.3) e (3.4). Em (3.5) simplificamos a notação, escrevendo o $2\pi k/N$ fora da matriz, mas é claro, referindo-se a todos os colchetes dos q-números dentro dela.

Esta matriz tem a forma diagonal e deveria ser infinita à medida que $n \to \infty$. Contudo, devido a periodicidade dos números-q a matriz assume a forma de blocos $N \times N$, que aparecem repetidamente com a degenerescência dos estados. Na Eq. (3.5) escrevemos uma matriz finita $N \times N$, mas que tem então, implicitamente, uma degenerescência infinita dos estados associada aos seus elementos.

Cabe aqui mencionar que Floratos e Tomaras [3], numa diferente abordagem, constroem matrizes semelhantes a estas, mas finitas, de tamanho $N \times N$, pois seu tratamento corresponde justamente a tomar soluções para apenas um ciclo do círculo trigonométrico. Esta comparação é instrutiva sobretudo para a compreensão do papel desempenhado pelas representações cíclicas, que correspondem no nosso tratamento justamente ao caso das raízes primitivas da unidade, ocorrendo assim a situação da repetição dos níveis de energia, ou seja, a degenerescência infinita que descrevemos acima.

Podemos observar a propriedade periódica dos números-q em uma raiz da unidade

$$[a+N] = [a], \tag{3.6}$$

onde tomamos $\alpha/2 = 2\pi k/N$. Como uma conseqüência, para o elemento da última coluna da matriz, Eq. (3.5), temos que

$$[N-1] = -1\ ,\quad [N] = 0,\ \forall w^k. \tag{3.7}$$

Uma conseqüência interessante das soluções nas raízes primitivas da unidade é que a representação para a hamiltoniana H não é única. Ou seja, dependendo da escolha da raiz primitiva w^k, uma diferente representação espectral pode existir e uma nova matriz para a hamiltoniana pode ser encontrada, associada a um diferente conjunto de níveis de energia $E(n; w^k)$.

A expressão para a energia para uma determinada raiz primitiva w^k é dada pela Eq. (3.4). A razão entre as energias obtidas com diferentes raízes primitivas da unidade w^k e $w^{k'}$ serão dadas por

$$\frac{E(n, w^{k'})}{E(n, w^k)} = \frac{\operatorname{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)2\pi k'/N\right)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}2\pi k/N\right)}{\operatorname{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)2\pi k/N\right)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}2\pi k'/N\right)}. \tag{3.8}$$

Esta relação será útil se desejarmos encontrar uma transformação que opera $H(w^k) \rightarrow H(w^{k'})$ na forma matricial. Lembramos que estamos nos referindo a representações matriciais $N \times N$ de H, tal como dada pelas Eqs.(3.4) e (3.5). Desse modo, nós podemos definir uma transformação do tipo

$$H(w^{k'}) = (T_{k'})H(w^k)(T_k)^{-1}, \tag{3.9}$$

onde T^k é uma matriz diagonal $N \times N$ que pode ser escrita na forma

$$T^k = diag.\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\pi k/N}\prod_{l=0}^{2n}\operatorname{sen}\left\{2\pi\left(\frac{k}{2N}+\frac{l}{2n+1}\right)\right\}\right), \tag{3.10}$$

com n correndo de 0 até $N-1$.

Devemos observar que para um dado número N, existem $\phi(N)$ raízes primitivas da unidade associadas a ele, onde $\phi(N)$ é a função totient de Euler [8,9]

$$\phi(m) = m\prod_{p/m}\left(1-\frac{1}{p}\right), \tag{3.11}$$

com p assumindo os valores dos divisores primos de m.

Em particular, temos

$$\phi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1} \tag{3.12}$$

e

$$\phi(p) = p-1. \tag{3.13}$$

Por exemplo, para $N=5$ nós temos $\phi(5)=4$ e este é o número de raízes primitivas da unidade neste caso. Então

$$w = e^{i2\pi/5} \tag{3.14}$$

é uma raiz primitiva da unidade, assim como w^2, w^3 e w^4, dados por

$$w^2 = e^{i4\pi/5},\ w^3 = e^{i6\pi/5}\ \text{e}\ w^4 = e^{i8\pi/5}. \tag{3.15}$$

Cada par de raízes primitivas $w^4 = (w^1)^{-1}$ e $w^3 = (w^2)^{-1}$ produz uma distinta matriz de autovalores para H. Encontramos, para $w^1 = e^{i2\pi/5}$ e $w^4 = e^{i8\pi/5}$:

$$H(k=1) = H(k=4) = \frac{1}{2}\hbar\omega\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1.618034 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & -1.618034 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix}\ , \tag{3.16}$$

enquanto que, para $w^2 = e^{i4\pi/5}$ e $w^3 = e^{i6\pi/5}$, temos

$$H(k=2) = H(k=3) = \frac{1}{2}\hbar\omega\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1.618034 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & -1.618034 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix}\ . \tag{3.17}$$

É claro, pode-se mudar de uma representação com w^k para a outra com $w^{k'}$, onde k, $k' = 1, 2, 3, 4, 5$, dados pelas equações expostas acima. Por exemplo, neste caso com $N = 5$, tem-se, envolvendo o segundo elemento na diagonal das matrizes

$$E(n=1, w^{k'=2}) = \frac{\text{sen}\left(\frac{3}{4}\frac{4\pi}{5}\right)\text{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right)}{\text{sen}\left(\frac{3}{4}\frac{2\pi}{5}\right)\text{sen}\left(\frac{2\pi}{5}\right)} E(n=1, w^{k=1}) =$$

$$= \text{sen}\frac{16\pi}{15}\text{sen}\frac{26\pi}{15}(1.618034)\left(\frac{1}{2}\hbar\omega\right)\frac{1}{\text{sen}\frac{13\pi}{15}\text{sen}\frac{23\pi}{15}} = -0.618034\left(\frac{1}{2}\hbar\omega\right), \tag{3.18}$$

representando a transformação do elemento de matriz para $E(n = 1,\ w^{k=1,k=4})$ da Eq. (3.16) para o elemento de matriz de $E(n = 1,\ w^{k=2,k=3})$ da Eq. (3.17), que apresentam diferentes valores para a energia em cada solução de $H(w^k)$.

Consideremos $\epsilon = E/\frac{1}{2}\hbar\omega$. Notamos que, para o primeiro elemento na diagonal da matriz, $\epsilon_0(w^k) = \epsilon_0(w^{k'}) = 1; \forall k,\ k'$ em todas as matrizes H, como acontece nas Eqs.(3.21) e (3.22), correspondendo à energia $-\frac{1}{2}\hbar\omega$, presente em todas as matrizes H. Do mesmo modo, o último elemento terá sempre $\epsilon(w^k) = \epsilon(w^{k'}) = -1; \forall k,\ k'$, correspondendo à energia $-\frac{1}{2}\hbar\omega$ nas matrizes H.

IV Estatística dos q-Osciladores

Na seção anterior discutimos o q-oscilador harmônico linear nas raízes primitivas da unidade. Agora, gostaríamos de explorar uma das conseqüências daquela formulação através do estudo das propriedades estatísticas de um sistema de osciladores q-deformados. Vamos começar com dois exemplos: os casos de $N = 2$ e $N = 3$.

Como vimos, o q-OHL quando q é uma raiz da unidade tem soluções com um número finito de estados de energia, cada um deles sendo infinitamente degenerado. Devido a degenerescência dos estados, a função partição de um único q-oscilador é dada por uma série divergente, que requer regularização. Uma maneira simples para realizar esta regularização é através de um procedimento analítico do tipo exponencial [10], que é o que escolhemos para utilizar. Dessa forma, expressões finitas podem ser obtidas para as funções estatísticas.

A situação peculiar encontrada para q sendo uma raiz da unidade está também associada a um novo tipo de estatística. Lembramos que começamos nossa formulação com um q-oscilador do tipo <u>bosônico</u>, definido pelas Eqs.(2.2)-(2.5). Entretanto, a q-estatística não será <u>nem</u> bosônica, <u>nem</u> fermiônica, mas um tipo de estatística intermediária, que se assemelha àquela de um tipo da estatística aniônica [11]. Observamos, contudo, que enquanto os sistemas aniônicos são definidos exclusivamente em 2+1 dimensões, o que temos aqui é uma estatística intermediária definida para q-osciladores unidimensionais, passível a extensões a maiores dimensões.

Gostaríamos de iniciar nossa discussão introduzindo as soluções do q-oscilador nas raízes primitivas com N=2. Esta é a solução mais simples para um q-oscilador linear, a qual apresenta somente <u>dois</u> níveis de energia, infinitamente degenerados. No que se segue, nós usaremos a notação com as matrizes <u>finitas</u> de tamanho $N \times N$, tais como definidas na Eq. (3.5). As soluções q-deformadas no caso N=2 <u>não são</u> de um tipo bosônico, mas são, de fato, muito mais semelhantes a soluções fermiônicas.

O caso com $N = 2$ corresponde a $w^2 = 1$ ou, igualmente, pela Eq. (3.2),

$$q^{1/2} = e^{i\pi} = -1. \tag{4.1}$$

Então, na Eq. (2.2) encontra-se que

$$aa^+ + a^+a = q^{N_q/2}. \tag{4.2}$$

A ação dos operadores escritos acima nos estados ket $|n>$ fornece, respectivamente para $n = 0, 1$

$$q^0|0>= +1|0>, \quad q^{1/2}|1>= -1|1>, \tag{4.3}$$

resultando em

$$(aa^+ + a^+a)|0>= +1|0>,$$
$$(aa^+ + a^+a)|1>= -1|1> . \tag{4.4}$$

Note que as duas relações dadas pelas Eqs.(4.4) são do tipo fermiônico. Elas correspondem, respectivamente, aos dois níveis de energia com soluções $\pm\frac{1}{2}\hbar\omega$ na Eq. (2.1).

Na forma matricial, os operadores de criação e aniquilação a e a^+ são

$$a = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{[1]} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$a^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{[1]} & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.5}$$

onde $[1] = 1$ e $\sqrt{1} = \pm 1$. Então,

$$aa^+ + a^+ a = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} = \pm 1, \qquad (4.6)$$

correspondendo às duas soluções da Eq. (4.4). Novamente, esta relação caracteriza anticomutadores.

Já o operador número é definido por

$$[N_q] = a_q^+ a_q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow [N_q]^2 = [N_q]. \qquad (4.7)$$

Os dois estados possíveis são

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad (4.8)$$

que são autoestados de $[N_q]$

$$[N_q]|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0|0\rangle,$$

$$[N_q]|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1|1\rangle, \qquad (4.9)$$

Chamamos a atenção para o fato que Floratos e Tomaras [3] referem-se a seu formalismo como descritivo de <u>ânions</u>. O surpreendente resultado no caso $N = 2$ pode ser uma indicação disto. Seria interessante analisar outros casos partindo do presente ponto de vista. Como um outro exemplo, vamos mostrar brevemente o caso $N = 3$. Neste caso, temos

$$w = q^{1/2} = e^{2\pi i/p} = e^{i2\pi/3}, \qquad (4.10)$$

que também pode ser escrita na forma de um número complexo

$$w = q^{1/2} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}. \qquad (4.11)$$

Este número é uma <u>raiz primitiva da unidade</u> para $N = 3$, pois $w^3 = 1$ e w, $w^2 \neq 1$. De fato, as três raízes da equação binomial $w^3 = 1$ são

$$\begin{aligned} w &= e^{i2\pi/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ w^2 &= e^{i4\pi/3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad (4.12) \\ w^3 &= e^{i2\pi} = 1, \end{aligned}$$

a primeira delas sendo a raiz primitiva.

Na notação da Ref[3], $N_q = \mathrm{diag}(0, 1, 2, ...N-1)$ e a representação torna-se de dimensão finita. Na abordagem daqueles autores, é considerado somente um ciclo das funções periódicas. Aqui, nós representamos apenas <u>um</u> bloco $N \times N$ nas matrizes, mas mantemos em vista a degenerescência infinita dos estados. Para $N = 3$, temos

$$a = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{[1]} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{[2]} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(4.13)$$

$$a^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{[1]} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{[2]} & 0 \end{pmatrix},$$

com $[1] = 1 \rightarrow \sqrt{[1]} = \pm 1$; $[2] = 2\cos 2\pi/3 = -1 \rightarrow \sqrt{[2]} = i$ e $[3] = 1 + 2\cos 4\pi/3 = 0$.

Então, ficamos com

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ a^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}. \qquad (4.14)$$

Observamos que $a^{T*} \neq a^+$. Com as Eqs.(4.14) podemos escrever os autovalores da hamiltoniana. Na forma matricial

$$H = \frac{1}{2}\hbar\omega(a^+ a + aa^+) = \frac{1}{2}\hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (4.15)$$

Tomando $\epsilon = E/\frac{1}{2}\hbar\omega$, temos $\epsilon_0 = 1$, $\epsilon_1 = 0$, $\epsilon_2 = -1$, com autovetores

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad (4.16)$$

respectivamente.

É fácil perceber que a estatística não é definida. Por exemplo, a partir da Eq. (4.11), pela substituição na Eq. (2.2), encontra-se que

$$aa^+ - q^{-1/2}a^+ a = aa^+ + \frac{1}{2}a^+ a + \frac{\sqrt{3}}{2}ia^+ a = q^{N_q/2}. \qquad (4.17)$$

A Eq. (4.17) não caracteriza um comutador, e nem um anticomutador. Além disso, ela possui um termo imaginário. A ação dos estados de ket $|n\rangle$ nos dá

$$(aa^+ - e^{-i2\pi/3}a^+ a)|n\rangle = q^{N_q/2}|n\rangle = q^{n/2}|n\rangle, \qquad (4.18)$$

resultando em 3 diferentes "fases", correspondendo a

$$\begin{aligned} q^0|0\rangle &= e^{i2\pi}|0\rangle, \\ q^{1/2}|1\rangle &= e^{i2\pi/3}|1\rangle, \qquad (4.19) \\ q^1|2\rangle &= e^{i4\pi/3}|2\rangle. \end{aligned}$$

Podemos interpretar os resultados das Eqs. (4.18) e (4.19) como uma indicação de uma estatística intermediária, ou uma paraestatística, obedecida pelo sistema do oscilador q-deformado.

Iremos proceder agora a uma breve análise da estatística dos q-osciladores com base nas suas funções estatísticas. Esperamos corroborar as conclusões acima. Começamos com a função partição

$$Z_q^0(\omega,T) \equiv Z_q^0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n^0(q)}. \tag{4.20}$$

onde $x \equiv \frac{\hbar\omega}{kT} = \beta\hbar\omega$ e o índice superior ^{0} em Z é para indicar que incluimos a energia E_0 em $Z_q^0(x)$.

Com a expressão para os autovalores da energia, Eq. (2.6), reescrevemos esta expressão na forma

$$Z_q^0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}x\left([n]+[n+1]\right)\right\} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}x\frac{\mathrm{sen}((2n+1)\pi/p)}{\mathrm{sen}(\pi/p)}\right\}. \tag{4.21}$$

Relembramos que estamos no caso imaginário, com soluções para raízes da unidade. Assim, no último passo da Eq. (4.21) colocamos $\alpha/2 = 2\pi/p$. Para raízes primitivas poder-se-ia analogamente tomar $2\pi k/N$. Na Eq. (4.21) o fator com os senos assume p valores distintos, associados às p diferentes classes: $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$,... $\{p-1\}$ de restos módulo p. Então, a Eq. (4.21) pode ser reescrita como uma soma nos diferentes conjuntos de restos mod p, como segue

$$Z_q^0(x) = \sum_{\{0\}} \exp\{..\} + \sum_{\{1\}} \exp\{..\} + ... + \sum_{\{p-1\}} \exp\{...\} =$$

$$Z_q^{\{0\}} + Z_q^{\{1\}} + ...Z_q^{\{p-1\}} = \sum_{i=0}^{p-1} Z_q^{\{i\}}. \tag{4.22}$$

Na Eq. (4.22) as expressões dentro das chaves $\{\ \}$ são as mesmas que na Eq. (4.21). A Eq. (4.22) expressa a função partição escrita como uma soma sobre as partições associadas às p diferentes classes de restos $\{i\}$ mod p. Deste modo, podemos reescrever nosso resultado na forma

$$Z_q^0(x) = \sum_{i=0}^{p-1} Z_q^{\{i\}} = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{p-1} e^{-\frac{1}{2}x\epsilon_i}, \tag{4.23}$$

onde os ϵ_i são dados por

$$\epsilon_i = \frac{1}{\frac{1}{2}\hbar\omega}\ E_i = \frac{\mathrm{sen}((2i+1)\pi/p)}{\mathrm{sen}(\pi/p)};\ i = 0,1,2,...(p-1). \tag{4.24}$$

O fator 1/2 na Eq. (4.23) é obtido através de um procedimento de regularização do tipo exponencial. No limite de $\alpha \to 0$ fizemos a substituição

$$A_i(\alpha) = \sum_{\{i\},passo:p} e^{-\alpha n} \to \sum_{\{i\},passo:p} e^{-\alpha n} - \int_0^{\infty} e^{-p\alpha n}dn, \tag{4.25}$$

com $A_i(\alpha) = e^{-i\alpha}\ A_0(\alpha)$ e então usamos a série de Bernoulli [9]

$$A_0(\alpha) = \frac{1}{1-e^{-p\alpha}} = -\sum_{n=0}^{\infty} B_n\frac{(-p\alpha)^{n-1}}{n!}. \tag{4.26}$$

O fator 1/2 é o termo remanescente da substituição, vindo de $-B_1 = 1/2$.

Observamos que a Eq. (4.23) pode ser reescrita na forma

$$Z_q^0(x) = \frac{1}{2}\sum_{m=-j}^{j} e^{-\frac{1}{2}x\epsilon_{j+m}}, \tag{4.27}$$

onde $j \hat{=} \frac{p-1}{2}$ e

$$\epsilon_{j+m} = [2(j+m)+1]_{2\pi/p} = -\frac{\mathrm{sen}(2m\pi/p)}{\mathrm{sen}(\pi/p)}. \tag{4.28}$$

No caso de $N=2$, temos $p=2 \to j=\frac{1}{2}$ e então

$$Z_q^0(x) = \frac{1}{2}(e^{x/2}+e^{-x/2}) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{senh}\ x}{\mathrm{senh}\ \frac{x}{2}} = \cosh\frac{x}{2}. \tag{4.29}$$

Esta expressão é similar àquela de uma estatística para dipolos magnéticos sujeitos a um campo magnético externo (vide Pathria, [12]).

No caso de $N=3$, $p=3 \to j=1$ e o resultado é

$$Z_q^0(x) = \frac{1}{2}(e^{x/2}+1+e^{-x/2}) = \frac{1}{2}\left(1+2\cosh\frac{x}{2}\right). \tag{4.30}$$

que é característico da estatística do paramagnetismo com $J=1$.

Os outros casos com valores maiores de N são mais elaborados e a analogia não é tão evidente. Em ambos os casos, $N=2$ ou $N=3$, a estatística não é bosônica, nem fermiônica. O mesmo argumento é válido para outros valores de N, com o q-oscilador obedecendo um comportamento para estatístico em cada caso, com $p=2j+1$.

Devemos recordar que historicamente Planck considerou o problema da densidade de energia de um conjunto de osciladores harmônicos com energias $(n+1/2)\hbar\omega$ para chegar à expressão da radiação de um corpo negro, cujo cálculo levava à lei de Stefan-Boltzman

$$u = \int_0^{\infty} u(x)dx = \frac{(kT)^4}{\pi^2\hbar^3c^3}\int_0^{\infty}\frac{x^3dx}{e^x-1} = \frac{\pi^2k^4}{15\hbar^3c^3}T^4 \tag{4.31}$$

A estatística neste caso é, claro, bosônica, denominação oriunda após a descrição de Bose e de Einstein baseada em um gás de "quanta", os fótons de energia

$\hbar\omega$. Permitam-nos então estabelecer um paralelo com o caso dos sistemas q-deformados.

Na teoria dos sistemas bosônicos toma-se contato com expressões integrais da forma (Pathria [12], apêndice D)

$$G_n(z) = \int_0^\infty \frac{x^{n-1}dx}{z^{-1}e^x - 1},\ 0 \leq z \leq 1, \qquad (4.32)$$

onde z é a fugacidade, $x = \beta\hbar\omega$ e n é o número de dimensões ($n = 4$).

Já para sistemas fermiônicos, as integrais associadas à distribuição de energia são do tipo (Pathria [12], apêndice E)

$$F_n(z) = \int_0^\infty \frac{x^{n-1}dx}{z^{-1}e^x + 1},\ 0 \leq z < \infty. \qquad (4.33)$$

Para um oscilador q-deformado, a densidade de energia pode ser obtida diretamente da definição em termos da função partição

$$u_q(x) = -x^3 \frac{1}{Z_q(x)} \frac{d}{dx}(Z_q(x)). \qquad (4.34)$$

Para $p = 2$, $Z_q(x) = \cosh x/2$, como mostrado na Eq. (4.29). Neste caso, encontra-se

$$u = \int_0^\infty u_q(x)dx = -\frac{1}{2}\int_0^\infty x^3 tgh\left(\frac{1}{2}x\right)dx = -\frac{1}{2}\int_0^\infty x^3 \frac{e^x - 1}{e^x + 1}dx \qquad (4.35)$$

Esta expressão não é nem do tipo bosônica, nem fermiônica, mas parece-se mais com uma combinação das anteriores. Realmente, a integral acima, Eq. (4.35), pode ser manipulada e reescrita na forma

$$u = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 \frac{1}{e^x + 1}dx, \qquad (4.36)$$

que parece muito mais com uma integral para a estatística de férmions, estendida para incluir as energias negativas. Este é um resultado particular que pode ser obtido para o caso com $p = 2$ somente. Em geral, expressões similares à Eq. (4.35), envolvendo funções hiperbólicas mais complicadas, são obtidas a partir da definição, Eq. (4.34). Em todo caso, elas parecem representar a comportamento para-estatístico do sistema de osciladores q-deformados, assemelhando-se ao tipo de estatística intermediária apresentada por sistemas com spin fracionário ou do tipo aniônico ("any"≡ qualquer).

Vale a pena mencionar, talvez, que através da introdução da fugacidade z na Eq. (4.35) e tomando-se a seguir o limite $z \to 1$, é possível completar o cálculo daquela integral e mostrar que

$$u(p=2) = \int_0^\infty u_q(x)dx = -\frac{1}{2}\int_0^\infty x^3 \frac{z^{-1}e^x - 1}{z^{-1}e^x + 1}dx =_{(z\to 1)} 0, \qquad (4.37)$$

significando que a construção análoga q-deformada de um "corpo negro" na verdade não irradia, pelo menos para o caso específico de $p = 2$, o qual focalizamos na discussão acima. A situação para outros valores de p pode ser bem diferente e seria um tópico bastante interessante a ser examinado.

V Conclusões

Neste trabalho, analisamos o problema do q-oscilador linear nas raízes da unidade. Obtivemos as representações em forma de matriz para a hamiltoniana H e encontramos que pode existir mais do que uma solução. Mostramos que o caso da deformação do tipo imaginário tem um número de estados finito, cada um deles carregando consigo uma degenerescência infinita, que segue a periodicidade das funções cíclicas (periódicas). Como vimos, as diferentes raízes primitivas da unidade podem dar margem a representações distintas para os autovalores da hamiltoniana. As diferentes representações espectrais estão associadas a diferentes subespaços vetoriais, que podem ser obtidos a partir das raízes primitivas da unidade.

Introduzimos o problema da estatística dos q-osciladores através da apresentação dos casos com soluções para raízes da unidade com $N = 2$ e $N = 3$. Mostramos que osciladores q-deformados, mesmo que bosônicos em sua construção inicial, tem na verdade um comportamento paraestatístico. A estatística intermediária dos q-osciladores não é nem bosônica, nem fermiônica, mas é, de fato, similar àquela dos sistemas aniônicos [11].

Ao escrever as soluções na forma de matriz, pudemos contornar o problema das degenerescências infinitas representando somente um bloco $N \times N$ em todas as matrizes. Esta situação é diferente daquela de Floratos e Tomaras [3], em que representações de dimensões finitas são construídas desde o início. Entretanto, mais adiante no nosso caso, um processo de regularização dos mais simples (optamos por um do tipo exponencial [10]) nos permitia obter expressões finitas para as funções estatísticas. Pudemos mostrar que o comportamento estatístico dos sistemas de q-osciladores pode ser obtido na nossa abordagem, pois a função partição $Z_q(x)$ pode ser determinada exatamente para cada espaço N-dimensional. Este cálculo foi levado em frente reescrevendo-se a função partição $Z_q(x)$ como uma soma sobre p classes distintas: $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$,... $\{p-1\}$ de restos módulo p e então efetuando-se o processo de regularização. Assim, as soluções assumiram formas bem compactas e o resultado da regularização resumiu-se a um fator $1/2$, com as expressões finais para os casos $N = 2$ e $N = 3$ coincidindo com aquelas da estatística do paramagnetismo, com $j = 1/2$ e $j = 1$, respectivamente.

Obviamente, a partir das funções de partição $Z_q(x)$ também poderíamos calcular outras quantidades termodinâmicas [13]. O caso de $N = 2$ corresponde, em direta analogia, ao problema de dipolos magnéticos em um campo magnético externo H. A ligação de osciladores q-deformados com o problema dos sistemas magnéticos também foi investigada por Martin-Delgado [14]. Muitas aplicações interessantes podem surgir dos resultados que ora apresentamos. Por exemplo, a função q-deformada para a densidade de energia associada a um gás quântico q-bosônico pode ser usada para calcular a distribuição de Planck para o caso do sistema deformado [15]. Estamos estudando este problema no momento, buscando uma solução para o caso de um valor genérico de N, o que esperamos possa vir a aparecer em um trabalho futuro.

Agradecimentos

Um dos autores (PLF) deseja agradecer ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), Brasil, pelo apoio financeiro na forma de uma bolsa de pesquisa.

References

[1] L.C. Biedenharn, M.A.Lohe, *Quantum Group Symmetry and q-Tensor Algebras*, World Scientific, Singapore (1995).

[2] Stephen Gasiorowicz, *Quantum Physics*, John Wiley & Sons, New York (1974), Capítulos 7 e 14.

[3] E.G. Floratos, T.N. Tomaras, Phys. Lett. **251**B, 163 (1990).

[4] L.C. Biedenharn, J. Phys. A, Math. Gen. **22**, L873 (1989).

[5] A.J. Macfarlane, J. Phys. A, Math. Gen. **22**, 4581 (1989).

[6] B.E. Palladino, P. Leal Ferreira, "Hq(4) Symmetry: The Linear q-Harmonic Oscillator Based on Generalized Irreps of the q-Deformed Heisenberg Algebra", IFT-P.045/98, Braz. Jour. of Phys., **28**, 444 (1998).

[7] G. Rideau, Lett. Math. Phys. **24**, 147 (1992); Z. Chang, Phys. Rep. **262**, 137 (1995).

[8] D. Galetti, Q-Group: "Sumário de Resultados de Teoria dos Números", IFT-UNESP, Novembro de 1997.

[9] M. Abramowitz, I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, p. 826, Dover, New York (1972).

[10] M. Fierz, Helv. Phys. Acta **33**, 855 (1960).

[11] D. Sen, Nucl. Phys. B**360**, 397 (1991); M. Chaichian, R. Gonzalez Felipe, C. Montonen, J. Phys. A, Math. Gen. **26**, 4017 (1993).

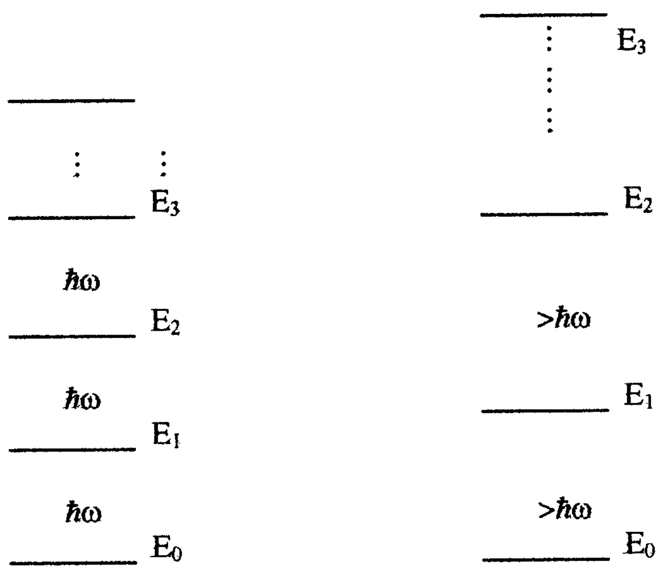
[12] R.K. Pathria, *Statistical Mechanics*, Pergamon Press, Oxford (1972).

[13] M.A.R. Monteiro, I. Roditi, L.M.C.S. Rodrigues, Mod. Phys. Lett. B**7**, 1897 (1993); G. Su, M. Ge, Phys. Lett. A**173**, 17 (1993); J. A. Tuszynski, J.L. Rubi, J. Meyer, M. Kibler, Phys. Lett. A**175**, 173 (1993).

[14] M.A. Martin-Delgado, J. Phys. A, Math. Gen. **24**, L807 (1991).

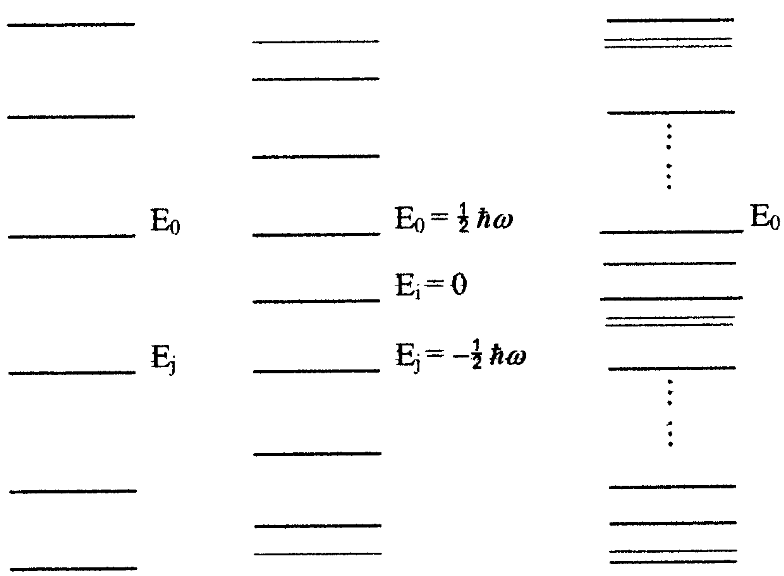
[15] M.A. Martin-Delgado, J. Phys. A, Math. Gen. **24**, L1285 (1991); P.V. Neskovic, B.V. Urosevic, Int. J. Mod. Phys. A**7**, 3379 (1992); R. K. Gupta, C.T. Bach, H.Rosu, J. Phys. A, Math. Gen. **27**, 1427 (1994); P. Angelopoulou et.al., J. Phys. A, Math. Gen. **27** , L605 (1994).

Fig.1- Espectro dos estados de energia para os diferentes casos de q Real ou Imaginário.



Oscilador não-deformado
(Limite $q \to 1$, $\alpha \to 0$)
Número infinito de estados,
sem degenerescência
$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$, $\Delta(n) = \hbar\omega$

Oscilador deformado
Deformação Real
Número infinito de estados,
sem degenerescência
$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$, $\Delta(n) > \hbar\omega$



Oscilador deformado
Deformação Imaginária, $q^p = \sqrt{1}$
Número finito de estados,
infinitamente degenerados
(p par: não há $E_i = 0$; p ímpar: $E_i = 0$)
$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$, $|\Delta(n)| \le \hbar\omega$

Oscilador deformado
p irracional
Número infinito de estados dentro de
uma banda de energia, sem degenerescência
$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$, $|\Delta(n)| \le \hbar\omega$