

# Estados Não-Clássicos do Campo Luminoso

L.P.A. Maia e B. Baseia

*Instituto de Física, Universidade Federal de Goiás  
Caixa Postal 131, CEP 74001-970, Goiânia, GO*

Recebido em 22 de Dezembro, 1998

Uma grande variedade de estados do campo luminoso exhibe efeitos que não podem ser explicados pela teoria clássica, tal como anti-agrupamento de fóton (antibunching), estatística sub-Poissoniana, efeito de compressão (squeezing) de ruído quântico, oscilações na distribuição de fótons, correlação não local, entre outros. Nesse trabalho apresentamos características desse estado e dos efeitos mencionados.

## I Estados puros e de mistura

O campo luminoso gerado por alguma fonte, pode estar num estado puro ou num estado de mistura. O estado do campo é **puro**, quando pode ser descrito por uma função de onda  $|\psi\rangle$ . Nesse caso podemos expandir o estado na base de número de fótons (base de Fock),

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |\psi_n\rangle. \quad (I.1)$$

Se a fonte de luz contém elementos aleatórios, por exemplo as flutuações térmicas ou de outro tipo, então não existe uma função de onda  $|\psi\rangle$  descrevendo tal campo luminoso. Nesse caso a luz está num estado de mistura (mistura de estado puro), agora descrito pelo operador densidade  $\rho$

$$\rho = \sum_{\psi'} p_{\psi'} |\psi'\rangle \langle \psi'|, \quad (I.2)$$

onde  $p_{\psi'}$  é real, representando a participação parcial de cada função de onda  $|\psi'\rangle$ . Se  $p_{\psi'} = \delta_{\psi', \psi}$  então obtemos

$$\rho = \sum_{\psi'} \delta_{\psi', \psi} |\psi'\rangle \langle \psi'| = |\psi\rangle \langle \psi| \quad (I.3)$$

Nesse caso particular, de todas as funções de onda  $|\psi'\rangle$  que aparecem na superposição incoerente em (I.2), apenas uma delas participa da representação do campo; o estado do campo recai no caso de estado puro. Então podemos representar um estado puro pela função de onda  $|\psi\rangle$ , ou pelo operador densidade  $\rho_p = |\psi\rangle \langle \psi| =$

$\sum c_n c_n^* |n\rangle \langle n'|$ . Porém, o estado de mistura só admite a representação

$$\rho_m = \sum_{\psi'} p_{\psi'} |\psi'\rangle \langle \psi'| = \sum_n \rho_n |n\rangle \langle n|.$$

Note que no caso de estado puro,  $\rho_p = |\psi\rangle \langle \psi|$ , resulta que

$$\hat{\rho}_p^2 = (|\psi\rangle \langle \psi|)^2 = (|\psi\rangle \langle \psi|)(|\psi\rangle \langle \psi|) = (|\psi\rangle \langle \psi|) = \hat{\rho}_p, \quad (I.4)$$

isto é,  $\hat{\rho}_p^2 = \hat{\rho}_p$ . E sendo  $\text{tr}(\hat{\rho}_p) = 1$  segue que  $\text{tr}(\hat{\rho}_p^2) = 1$  para o estado puro.

Por outro lado, no caso de estado de mistura, obtém-se que  $\hat{\rho}_m^2 \neq \hat{\rho}_m$  acarretando

$$\text{tr}(\hat{\rho}_p^2) < 1. \quad (I.5)$$

Em resumo, se  $\text{tr}(\hat{\rho}_p^2) = 1$ , o estado é puro; se  $\text{tr}(\hat{\rho}_p^2) < 1$ , o estado é de mistura.

O estado puro é uma superposição coerente de estados de número, enquanto o estado de mistura é uma superposição incoerente de estado de número. Por exemplo, a superposição de dois estados de número,  $|n_1\rangle$  e  $|n_2\rangle$ , do tipo

$$\hat{\rho} = a|n_1\rangle \langle n_1| + b|n_2\rangle \langle n_2| \quad (I.6)$$

representa um estado de mistura, enquanto que a seguinte superposição dos mesmos estados  $|n_1\rangle$  e  $|n_2\rangle$ ,

$$|\psi\rangle = c_1|n_1\rangle + c_2|n_2\rangle \quad (I.7)$$

acarreta

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle \langle \psi| = (c_1^*|n_1\rangle + c_2^*|n_2\rangle)(c_1|n_1\rangle + c_2|n_2\rangle)$$

$$|c_1|^2|n_1\rangle \langle n_1| + |c_2|^2|n_2\rangle \langle n_2| + c_1 c_2^* |n_1\rangle \langle n_2| + c_1^* c_2 |n_2\rangle \langle n_1| \quad (I.8)$$

representando um estado puro: no caso (I.6) temos  $tr(\hat{\rho}_n) = 1$  e  $tr(\hat{\rho}_n^2) < 1$ , enquanto que no caso (I.8) temos  $tr(\hat{\rho}_p) = 1$  e  $tr(\hat{\rho}_p^2) = 1$ . Enquanto a superposição (I.6) é incoerente (a e b são reais, não possuem fases), a superposição (I.8) é coerente ( $c_1$  e  $c_2$  são complexos, possuem fases).

Note que em (I.6)  $\hat{\rho}_n$  é diagonal na base de número  $|n_i\rangle$ , enquanto que em (I.8)  $\hat{\rho}_n$  é não-diagonal nessa base. Os termos fora da diagonal  $c_1 c_2^* |n_1\rangle\langle n_2| + c_1^* c_2 |n_1\rangle\langle n_2|$  são chamados termos de interferência, por analogia com o que ocorre na experiência de duplas-fendas de Young. Eles se relacionam com a coerência da superposição.

Podemos ocorrer que, em  $t = 0$ , um campo esteja num estado puro:

$$\hat{\rho}(t = 0) = \begin{pmatrix} \rho_{11}(0) & \rho_{12}(0) & \dots \\ \rho_{21}(0) & \rho_{22}(0) & \\ \vdots & & \rho_{n,n}(0) \end{pmatrix} \quad (I.9)$$

onde  $\rho_{ij}(0) \neq 0$  para  $i \neq j$ , e à medida que o tempo passa, o campo vai ficando misturado

$$\hat{\rho}(t > 0) = \begin{pmatrix} \rho_{11}(t) & \rho_{12}(t) & \dots \\ \rho_{21}(t) & \rho_{22}(t) & \\ \vdots & & \rho_{n,n}(t) \end{pmatrix} \quad (I.10)$$

pois as partes não-diagonais  $\rho_{ij}(t) \rightarrow 0$  e  $i \neq j$ . Diz-se então que o sistema perde a coerência (relacionada aos termos de interferência); ou que o sistema “perde coerência”; ou que a função de onda colapsa num estado de mistura. Um exemplo desse efeito ocorre num sub-sistema A, que interage com outro sistema B, onde

(i) A é um oscilador harmônico e B um conjunto de muitos osciladores harmônicos, a temperatura  $T \geq 0$ , representando um banho térmico. Nesse caso a Hamiltoniana é

$$H = H_A + H_B + V = \hbar\omega_0 a^+ a + \sum_K \hbar\omega_K b_K^+ b_K + \sum_K \hbar\lambda_k (ab_k^+ + a^+ b_k). \quad (I.11)$$

Resolvendo o sistema (Fig.I.1), obtém-se  $\hat{\rho}_{AB}(t)$ , donde  $\hat{\rho}_a(t) = tr_B(\hat{\rho}_{AB}(t))$

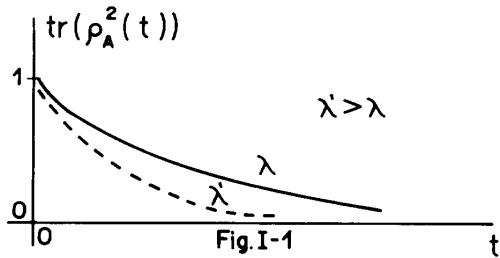


Figura I.1. Gráfico de  $tr(\rho_A^2(t))$  contra o tempo, mostrando descoerência.

Note que quando  $tr(\rho_A^2) \rightarrow 0$ , o estado do sub-sistema A é puro em  $t = 0$ ,  $tr(\rho_A^2) = 1$  mas vai ficando misturado. Se a interação aumenta ( $\lambda' > \lambda$ ) o tempo de descoerência diminui: ( $\tau'_d < \tau_d$ ). O problema da descoerência em Mecânica Quântica foi investigado por Zurek [1] (que esclareceu a questão da base-ponteiro), por Caldeira e Leggett [2] e Wall e Milburn [3], dentre outros.

(ii) Exemplo distinto ocorre quando A e B são dois osciladores harmônicos descritos por

$$H = \hbar\omega a^+ a + \hbar\Omega b^+ + V, \quad (I.12)$$

onde a interação  $V$  é dada por (Aproximação Girante):

$$V_{AG} = \hbar\lambda(ab^+ a^+ b), \quad (I.13)$$

ou por (Aproximação Contra-Girante):

$$V_{ACG} = \hbar\lambda(ab + a^+ b^+). \quad (I.14)$$

Resolvendo-se esse novo exemplo, obtém-se a seguinte evolução temporal (Fig.I.2), partindo-se de estados iniciais coerentes. Curva sólida (-) e interrompidas (- - -) são para a interação (I.14); a curva pontilhada (...) é para (I.13). Nesse caso o sub-sistema A (um dos osciladores) sai de um estado puro, em  $t = 0$ , quando  $tr \hat{\rho}_A^2(0) = 1$ , e evolui para estados de mistura, retornando periodicamente ao estado puro (não necessariamente o mesmo estado puro inicial). Nesse segundo exemplo o sistema exhibe colapso e “ressurreição” da função de onda. O grau de mistura é máximo no ponto de mínimo, e a mistura aumenta se o acoplamento entre A e B aumenta. Na curva pontilhada, para a interação do tipo (I.13), tais efeitos não ocorrem: cada sub-sistema permanece em estado puro para todo tempo [4] e o estado inicial é coerente.

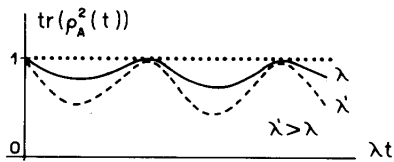


Fig. I-2

Figura I.2. O mesmo que na Fig. I.1, mostrando descoerência seguida reconstrução da pureza do estado.

Em resumo, um oscilador (ou campo luminoso) pode estar em um estado puro, descrito por  $|\psi\rangle$  ou  $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| = \sum c_n c_n^* |n\rangle\langle n|$  onde  $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$  e  $\text{tr}\hat{\rho}^2 = \text{tr}\hat{\rho} = 1$ , ou pode estar em um estado de mistura, descrito apenas por

$$\hat{\rho} = \sum_{\psi'} p_{\psi'} |\psi\rangle\langle\psi'| = \sum p_n |n\rangle\langle n|, \quad (I.15)$$

onde  $\hat{\rho}^2 \neq \hat{\rho}$  e  $\text{tr}(\hat{\rho}^2) < \text{tr}(\hat{\rho}) = 1$ .

Considerando sua evolução temporal, o sistema pode evoluir de um estado puro para um estado de mistura, o fenômeno sendo chamado de “colapso da função de onda”, ou descoerência. Essa evolução temporal pode ser definitiva, como no exemplo (1), Fig. I.1, ou pode ser reversível, como no exemplo (2), Fig. I.2 para a interação (I.14).

Exemplos de campos luminosos em estado puro são: (i) campo em estado de número  $|N\rangle$ ; (ii) campo em estado coerente  $|\alpha\rangle$ ; (iii) estado de fase  $|\theta\rangle$ ; (iv) campo em estado comprimido  $|\beta\rangle$ ; etc.. Exemplos de campos luminosos em estados de mistura são: (i) campo em estado térmico  $\rho = \sum p_n |n\rangle\langle n|$ , onde  $p_n$  é dado pela distribuição de Bose-Einstein, de fótons num modo do campo **dependente** da temperatura; (ii) campo em estado caótico, como aqueles gerados por lâmpadas fluorescentes, onde  $\rho = \sum p_n |n\rangle\langle n|$ , em que  $p_n$  é também a distribuição de Bose-Einstein, porém agora **independente** da temperatura. No caso térmico ou caótico temos  $p_n = (1-A)A^n$  onde  $A = \exp(-\xi)$ , onde  $\xi = \hbar\omega/KT$  para o caso térmico.

## II Propriedades não-clássicas do campo luminoso

É geralmente aceito, na comunidade do físico da área de Ótica Quântica, desde 1927 - quando Dirac introduziu a teoria quântica do campo de radiação - até 1977, que não havia real necessidade da quantização do campo luminoso: o tratamento clássico (ou neoclássico) do campo luminoso era suficiente para explicar todo o efeito (efeito fotoelétrico [5], efeito Compton [6], Lamb-shift [7], etc.). Desse modo, a opinião corrente até 1977, era que a teoria quântica era necessária para explicar efeito da matéria (átomo, molécula, cristais), mas não era necessária para explicar efeito no campo luminoso [8]. A partir de 1977, porém, começaram a surgir novos

efeitos óticos, cujas explicações necessitavam da quantização do campo luminoso. São os seguintes efeitos:

### II.1 - Efeito anti-agrupamento (antibunching) de fóton

A função de correlação, de 2a. ordem,

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle a^\dagger(0)a^\dagger(\tau)a(0)a(\tau) \rangle}{\langle a^\dagger(\tau)a(\tau) \rangle^2} \quad (II.1)$$

mede a probabilidade de detecção de um segundo fóton após um tempo  $\tau$  em que um primeiro fóton foi detectado. Se  $g^{(2)}(\tau) > 1$  diz-se que os fótons do feixe luminoso estão **agrupados**; se  $g^{(2)}(\tau) < 1$  eles estão **anti-agrupados**. Nesse último caso o efeito é não-clássico, necessitando da quantização do campo. Para a luz de um laser excelente (luz coerente) resulta  $g^{(2)}(\tau) = 1$ , um limite entre a região clássica ( $g^{(2)}(\tau) > 1$ ) e a região quântica ( $g^{(2)}(\tau) < 1$ ).

A Fig. II.1 mostra o gráfico de  $g^{(2)}(\tau)$  versus  $\tau$ . A linha cheia, onde  $g^{(2)}(\tau) > 1$ , obtida em 1956 por Brown e Twi [9], usando luz térmica; a linha pontilhada, onde  $g^{(2)}(\tau) = 1$ , obtida por Arecchi et al. [10], usando luz de laser; e a linha tracejada onde  $g^{(2)}(\tau) < 1$ , obtida por Kimble et al. [11] usando luz fluorescente, emitida por um único átomo excitado: a probabilidade de um único átomo emitir um segundo fóton, após um tempo  $\tau$  bem pequeno da emissão de um primeiro fóton, é zero. Temos de esperar o átomo excitar-se de novo para que ele emita um segundo fóton. Por isso que, nesse caso,  $g^{(2)}(\tau)$  é crescente.

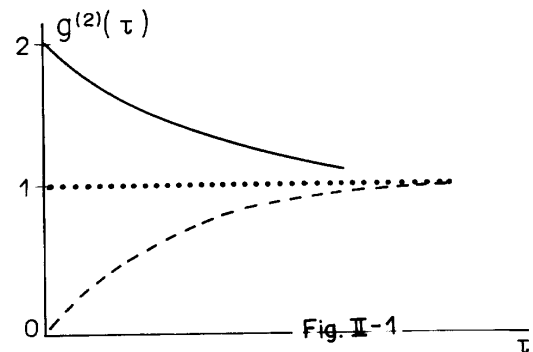


Figura II.1. Gráfico de  $g^{(2)}(\tau)$  contra o tempo  $\tau$ , mostrando o agrupamento de fótons e anti-agrupamentos de fótons.

### II.2 - Estatística sub-Poissoniana

Dizemos que um campo luminoso exhibe estatística sub-Poissoniana [12] quando a incerteza no número de fótons é menor que a média do número de fótons, isto é,

$$\Delta \hat{n}^2 < \bar{n}. \quad (II.2)$$

Numa luz coerente (laser ideal), obtemos a estatística Poissoniana:  $\Delta \hat{n}^2 = \bar{n}$ , enquanto que numa luz térmica, a estatística é super-Poissoniana:  $\Delta \hat{n}^2 > \bar{n}$ .

O fator de Mandel [12],

$$Q = \frac{\Delta \hat{n}^2 - \bar{n}}{\bar{n}} \quad (II.3)$$

mede esse efeito estatístico: se  $Q < 0 (Q > 0)$  a estatística é sub-Poissoniana (super-Poissoniana). A região hachurada da Fig.(II.2) é a região não-clássica, onde  $Q < 0$ . O fator de Fano,  $F = \Delta \hat{n}^2 / \bar{n}$ , é também usado, às vezes.

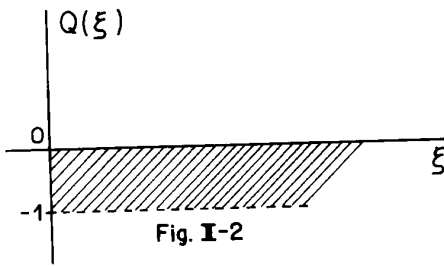


Figura II.2. Fator de Mandel contra parâmetro  $\xi$ , mostrando a região quântica achurada.

### II.3 - Compressão (squeezing) de Ruído Quântico

O operador de campo elétrico se escreve como

$$\hat{E} = \varepsilon[\hat{a}e^{i\omega t} + \hat{a}^+e^{-i\omega t}] = 2\varepsilon[\hat{X}_1 \cos \omega t + \hat{X}_2 \sin \omega t], \quad (II.4)$$

onde

$$\hat{X}_1 = (\hat{a} + \hat{a}^+)/2 \text{ e } \hat{X}_2 = (\hat{a} - \hat{a}^+)/2i \quad (II.5)$$

são chamados operadores de quadratura do campo;  $\hat{a}(\hat{a}^+)$  é o operador de aniquilação (criação). No oscilador harmônico tem-se  $\hat{x}_1 \sim \hat{x}$  e  $\hat{x}_2 \sim \hat{p}$  ( $\hat{x}$  = posição,  $\hat{p}$  = momento), com a diferença que  $\hat{x}_1$  e  $\hat{x}_2$  são adimensionais.

Ocorre que, tanto para campo em estado coerente  $|\alpha\rangle$ , como para campos em estado de vácuo  $|0\rangle$ , as dispersões (ruidos) na quadratura  $\hat{x}_1$  e  $\hat{x}_2$  são iguais entre si, sendo além disso, mínimas:

$$\Delta \hat{x}_1^2 = \Delta \hat{x}_2^2 = 1/4, \quad (II.6)$$

satisfazendo à mínima relação de incerteza

$$\Delta \hat{x}_1 \cdot \Delta \hat{x}_2 = 1/4. \quad (II.7)$$

O que é, então, o efeito de compressão? É o que ocorre quando temos (Fig.II.3)

$$\Delta \hat{x}_1^2 < 1/4. \quad (II.8)$$

com  $\Delta \hat{x}_1^2 > 1/4$ . Ou o reverso disso:  $\Delta \hat{x}_2^2 < 1/4$ , com  $\Delta \hat{x}_2^2 > 1/4$ .

Na Fig.(II.3), o círculo na origem (fora da origem) representa o ruído no estado de vácuo  $|0\rangle$  (no estado

coerente  $|\alpha\rangle$ ). A elipse (a) representa a compressão do ruído na quadratura  $\hat{x}_1$  (posição), enquanto a elipse (b) representa a compressão do ruído na quadratura  $\hat{x}_2$  (momento). Note que os ruidos do vácuo  $|0\rangle$  e do estado coerente  $|\alpha\rangle$  são iguais, representados por círculos de mesmo diâmetro, de valor  $1/4$ .

A teoria sobre o efeito de compressão iniciou-se por volta de 1970 [13], mas a sua comprovação experimental ocorreu apenas em 1985 [14].

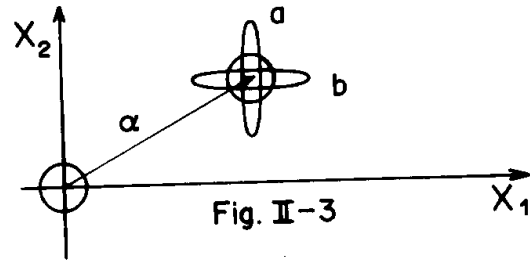


Figura II.3. Espaço de fase  $\{X_1, X_2\}$  mostrando o estado coerente (círculo) e o estado comprimido (elipses).

### II.4 - Outro efeito não-clássico no campo luminoso

Há outro efeito ótico não-clássico além desses três mencionados nos itens II.1- II.3 ? Sim, são os seguintes:

#### (a) Colapso e ressurreição da inversão atômica

A inversão atômica

$$\hat{\rho}(t) = P_{22} - P_{11}(t) = \langle \psi(t) | (|2\rangle\langle 2| - |1\rangle\langle 1|) | \psi(t) \rangle \quad (I.9)$$

na presença de campo luminoso, exibe oscilações periódicas e o campo é tratado classicamente, mas pode exibir o efeito de colapso e ressurreição se o campo luminoso é quantizado.

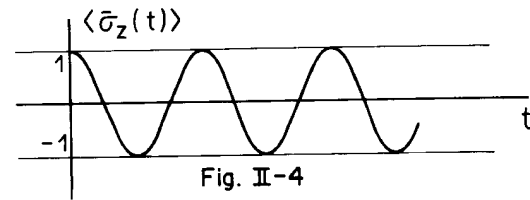


Figura II.4. Inversão atômica em função do tempo, para um campo não quantizado.

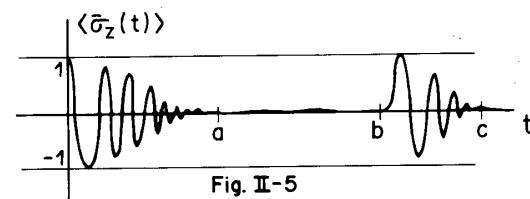


Figura II.5. O mesmo que na Fig.II.4 para um campo quantizado.

Diferentemente da Fig.II.4, região temporal a-b da Fig.II.5 a inversão  $\langle \hat{\sigma}_z(t) \rangle$  colapsou. Na região b-c, a inversão ressuscitou. Esses efeitos são explicados quando o campo luminoso é quantizado. Por isso se diz que se trata de efeito ótico não-clássico. Enquanto a teoria desse efeito iniciou-se em 1963, sua observação experimental [15] ocorreu apenas em 1987.

### (b) Espalhamento atômico por campo luminoso

A investigação tradicional da interação radiação-matéria consistia em incidir radiação na matéria e deduzir propriedades da matéria olhando para a radiação espalhada. Em 1933, Kapitza e Dirac [16] pensaram no processo inverso: espalhar matéria por luz numa cavidade, deduzindo a propriedade do campo luminoso através da matéria espalhada. Essa idéia não funcionou, porque chegou em época não apropriada: não havia luz de laser (inventada em 1960), nem havia cavidade ótica excelente, inventada nos anos 80. Somente em 1988, portanto 55 anos após a proposta original, foi detectado o espalhamento atômico por luz [17]. Nesse caso, o pico de espalhamento atômico depende do estado quântico do campo luminoso [18]. Daí o efeito ser denominado efeito não-clássico.

### (c) Oscilações na distribuição $p_n$

Esse efeito evidencia a granularidade dos fótons e está relacionado à ocorrência de interferência no espaço de fase [19].

### (d) Estado correlacionado e violação da desigualdade de Bell

Esse é um outro efeito não-clássico, investigado com sucesso por Aspect et al. [20], em 1982, mostrando a violação da desigualdade de Bell, dando razão à teoria quântica, em vez da teoria clássica. Uma experiência alternativa, usando variáveis contínuas em vez de discreta, foi também realizada [21].

Outro efeito está relacionado ao velho problema do “gato quântico” de Schrödinger [22], a preparação de superposição macroscópica de estado quântico [23]. Desde sua proposta em 1935, muitas soluções tentativas foram apresentadas, sem sucesso. Recentemente, várias soluções nessa direção surgiram na literatura incluindo o recente (e notável) efeito de teletransporte [24].

## III Por que esse estado não-clássico?

A representação do estado descrevendo um campo luminoso  $\hat{\rho}$  (puro ou mistura), na base coerente, foi introduzida em 1963 por Glauber [25] tal que

$$\hat{\rho} = \int P(\alpha) |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha, \quad (III.1)$$

onde  $P(\alpha)$  é a chamada função de quasi-probabilidade:  $P(\alpha) \geq 0$  se o campo é clássico, isto é, se o campo não exhibe nenhum efeito não-clássico. Porém, se o campo no estado  $\hat{\rho}$  exibir algum desses efeitos, então resultará que  $P(\alpha) < 0$ ; ou ainda  $P(\alpha)$  poderá ser mais singular que uma a função delta de Dirac. De fato, mostra-se que [3],

$$g^{(2)}(0) = 1 + \frac{\int P(\alpha) [|\alpha\rangle \langle \alpha|]^2 d^2\alpha}{\{\int P(\alpha) [|\alpha\rangle \langle \alpha|]\}^2}, \quad (III.2)$$

e então  $g^{(2)}(0) < 1$  (antibunching) apenas se  $P(\alpha) < 0$  em alguma região.

Em segundo lugar, mostra-se que [3],

$$Q = |g^{(2)}(0) - 1| \bar{n} \quad (III.3)$$

acarretando que  $Q < 0$  (estatística sub-Poissoniana) se  $g^{(2)}(0) < 1$ , isto é, se  $P(\alpha) < 0$ , conforme a Eq.(III.2).

Em terceiro lugar [3],

$$\Delta \hat{x}_1^2 = (1/4)[1 + \int P(\alpha) [|\alpha\rangle \langle \alpha|]^2 d^2\alpha] \quad (III.4)$$

acarretando que  $\Delta \hat{x}_1^2 < 1/4$  apenas se  $P(\alpha) < 0$  em alguma região.

Em quarto lugar, se a distribuição estatística de fótons,  $p_n$  oscilar, a cada buraco ( $p_n = 0$ ), corresponde um efeito não-clássico. De fato

$$p_n = \int P(\alpha) |\langle n|\alpha\rangle|^2 d^2\alpha \quad (III.5)$$

só ocorre de  $P(\alpha)$  assumir valores negativos [26].

## IV Estados clássicos do campo luminoso

### (a) Estado térmico

O operador densidade

$$\hat{\rho}_{(T)} = N e^{-\beta H} \quad (IV.1)$$

onde

$$N = [\text{tr}(e^{-\beta \hat{H}})]^{-1}$$

$$H = \hbar\omega(\hat{n} + 1/2) \quad (IV.2)$$

$$\beta = 1/K_B T$$

descreve um campo luminoso no estado térmico. Trata-se de um estado de mistura:  $\text{tr}(\hat{\rho}^2) < 1$ .

Propriedades:

a)

$$\hat{\rho}_{(T)} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n |n\rangle \langle n| = \int P(\alpha) |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha, \quad (IV.3)$$

onde  $P(\alpha)$  é uma Gaussiana [27]. Note que  $\hat{\rho}(T)$  é diagonal na base  $\{|n\rangle\}$ , por ser estado de mistura

b)

$$p_N(T) = (\hat{\rho}(T))_{n,n} = \frac{\bar{n}^n}{(1 + \bar{n})^{n+1}}, \quad (IV.4)$$

que é a distribuição de Bose-Einstein.

c)

$$\text{tr}(\hat{\rho}(T)) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n^2 = \frac{1}{1 + 2\bar{n}} \leq 1 \quad (IV.5)$$

e então  $\text{tr}(\hat{\rho}^2(T)) = 1(0)$  se  $T \rightarrow 0(T \rightarrow \infty)$ . Fora desses limites,  $0 < \text{tr}(\hat{\rho}^2(T)) < 1$ .

d)

$$\bar{n}_T = \text{tr}[\hat{\rho}(T)\hat{n}] = (e^\xi - 1)^{-1} \quad ; \quad \xi = \hbar\omega/k_B T \quad (IV.6)$$

e)

$$\Delta\hat{n}^2 = \langle\hat{n}^2\rangle - \langle\hat{n}\rangle^2 = \bar{n} + \bar{n}^2 \quad (IV.7)$$

Temos, nesse caso,

f)

$$g_T^{(2)}(0) = 2 > 1 \quad (IV.8)$$

que significa agrupamento de fótons (bunching). Portanto, o estado térmico não exhibe agrupamento de fótons ( $g^{(2)}(0) < 1$ ).

O fator de Mandel  $Q$  para o campo térmico resulta

g)

$$Q_T \frac{\Delta\hat{n}^2 - \bar{n}}{\bar{n}} = \bar{n} > 0 \quad (IV.9)$$

h)

$$\Delta\hat{X}_1^2 = \Delta\hat{X}_2^2 = (2\bar{n} + 1)/4. \quad (IV.10)$$

Portanto os ruídos nas duas quadraturas,  $\hat{X}_1$  e  $\hat{X}_2$ , são maiores que  $1/4$ , não havendo o efeito de compressão ( $\Delta\hat{X}_1^2 < 1/4$  ou  $\Delta\hat{X}_2^2 < 1/4$ ).

### (b) Estado coerente

O vetor  $|\alpha\rangle$ , auto-vetor do operador aniquilação  $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ , ou o operador densidade

$$\hat{\rho} = |\alpha\rangle\langle\alpha| \quad (IV.11)$$

descrevem o campo luminoso num estado coerente. Trata-se de um estado puro  $\text{tr}(\hat{\rho}^2) = \text{tr}\rho = 1$ . Podemos expandir o estado coerente  $|\alpha\rangle$  na base de número:

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle \quad ; \quad c_n = e^{-|\alpha|^2/2} \cdot \alpha^n / \sqrt{n!} \quad (IV.12)$$

e podemos escrever também

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle, \quad (IV.13)$$

onde  $\hat{D}(\alpha)$  é o operador (unitário) de deslocamento [27],

$$\hat{D}(\alpha) = e^{-\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}}. \quad (IV.14)$$

Propriedades:

a)

$$\hat{\rho}(\alpha) = |\alpha\rangle\langle\alpha| = \int P(\beta)|\beta\rangle\langle\beta|d^2\beta \quad (IV.15)$$

onde  $P(\beta) = \delta^{(2)}(\beta - \alpha)$ .

b)

$$P_n(\alpha) = \langle\alpha|\hat{p}|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2} |\alpha|^{2n}/n! \quad (IV.16)$$

que é denominada distribuição de Poisson. Temos ainda:

c)

$$\text{tr}[\hat{\rho}(\alpha)] = 1, \text{ pois } \hat{\rho}^2(\alpha) = \hat{\rho}(\alpha), \text{ e } \text{tr}\hat{\rho}(\alpha) = 1 \quad (IV.17)$$

d)

$$\bar{n} = \langle\alpha|\hat{n}|\alpha\rangle = |\alpha|^2, \quad (IV.18)$$

e)

$$\Delta\hat{n}^2 = \langle\hat{n}^2\rangle - \langle\hat{n}\rangle^2 = |\alpha|^2 = \bar{n}, \quad (IV.19)$$

f)

$$g^{(2)}(0) = 1, \quad (IV.20)$$

portanto o estado coerente não exhibe agrupamento de fótons ( $g^{(2)} > 1$ ), nem anti-agrupamento ( $g^{(2)} < 1$ ); está na fronteira.

g)

$$Q_n = \frac{\Delta\hat{n}^2 - \bar{n}}{\bar{n}} = 0 \quad (IV.21)$$

pois  $\Delta\hat{n}^2 = \bar{n}$ . Portanto o estado coerente não é sub sem super Poissoniano. Sua estatística é Poissoniana, conforme a expressão de  $p_n(\alpha)$ . Além disso,

$$\Delta\hat{X}_1^2 = \Delta\hat{X}_2^2 = 1/4. \quad (IV.22)$$

Portanto, não exhibe o efeito de compressão de ruídos em quadraturas. Nem tampouco exhibe o efeito de anti-compressão.

Os círculos na Fig.IV.1 representam o estado de vácuo  $|0\rangle$  e o estado coerente  $|\alpha\rangle$ . Ambos são estados de mínima incerteza, com  $\Delta X_i^2 = 1/4$   $i = 1, 2$ . Os círculos resultam de cortes na “meia-largura” de Gaussianas, representantes de funções de Wigner [3].

As funções de Wigner são dadas, para um estado coerente por

$$W(x_1, x_2) = \frac{2}{\pi} e^{-(x_1^2 + x_2^2)/2}, \quad (IV.23)$$

ou para um estado comprimido

$$W(x_1, x_2) = \frac{2}{\pi} e^{-1/2 (s^2 x_1^2)} \cdot e^{-1/2 (x_2^2/s^2)}, \quad (IV.24)$$

ou para um estado de número

$$W(x_1, x_2) = \frac{2}{\pi} (-1)^n s^2 L_n(4r^2). \quad (IV.25)$$

Para o estado comprimido,  $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$ , onde  $a = s^{-1}, b = s$ , onde  $s^{-1} = e^r$  é a largura da Gaussiana, são discutidas por Wall e Milburn (Ref.3, pg. 63). Para o estado coerente, o círculo de erro é dado por  $x_1^2 + x_2^2 = 1$ . Para o estado comprimido,  $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$ , onde  $a = s^{-1}, b = s$ .

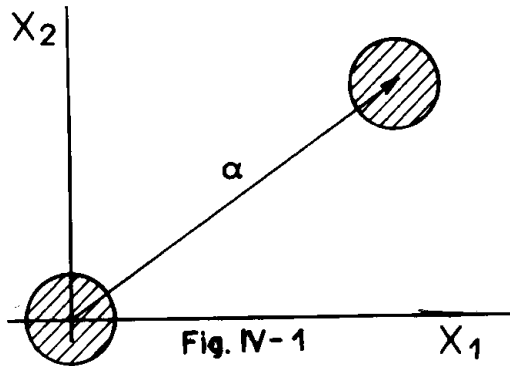


Figura IV.1. Representação de estado coerente na origem e fora da origem, no espaço de fase  $\{X_1, X_1\}$ .

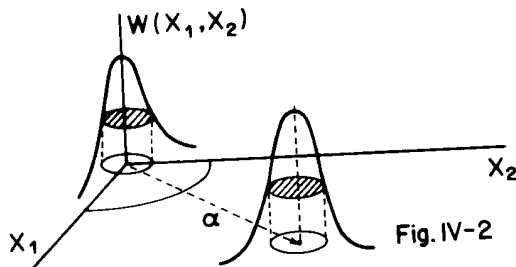


Figura IV.2. Funções de Wigner correspondentes aos estados da Fig. II.5.

## V Estados não-clássicos do campo luminoso

São aqueles que exibem alguns dos efeitos: (i) anti-agrupamento de fótons; (ii) estatística sub-Poissoniana; (iii) compressão do ruído quântico abaixo do ruído do vácuo, etc. São diversos os estados não-clássicos:

### (A) Estado de número $|N\rangle$

Temos, nesse caso,

a)

$$\hat{\rho}(N) = |N\rangle\langle N|, \hat{\rho}(N)^2 = \hat{\rho}(N) \rightarrow \text{tr } \hat{\rho}^2(N) = \text{tr } \hat{\rho}(N) = 1 \quad (V.1)$$

cuja apresentação na base de número é:

$$\hat{\rho}(N) = \sum p_n |n\rangle\langle n|, \quad (V.2)$$

onde  $p_n = \delta_{n,N}$ , e cuja representação na base coerente é dada por

$$\hat{\rho}(N) = \int P(\alpha) |\alpha\rangle\langle\alpha| d^2\alpha, \quad (V.3)$$

onde  $P(\alpha)$  é uma ultradistribuição [27], consequência do estado ser não-clássico.

b)

$$p_n(N) = \hat{\rho}_{n,N}(N) = \delta_{n,N}. \quad (V.4)$$

c)

$$\text{tr } \hat{\rho}^2 = 1.$$

d)

$$\hat{n}_N = \langle N|\hat{n}|N\rangle = N. \quad (V.5)$$

e)

$$\Delta \hat{n}^2 = \langle \hat{n}^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle^2 = 0, \quad (V.6)$$

como esperado, pois num estado de número a incerteza no número é zero. Enquanto isso, pode-se mostrar que a incerteza na variável conjugada, a fase, é dada por (Pegge-Barnett [28])

$$\Delta \hat{\phi} = \pi^2/3 \simeq \pi. \quad (V.7)$$

Obtém-se ainda que

f)

$$g_N^{(2)}(0) = 1 - \frac{1}{N} < 1 \quad (V.8)$$

que mostra o efeito de anti-agrupamento, tanto maior quanto menor o valor de  $N$  ( $N = 1, 2, 3, \dots$ ). Enquanto isso, o fator de Mandel resulta em

g)

$$Q = \frac{\Delta \hat{n}^2 - \bar{n}}{\bar{n}} = -\frac{\hat{n}}{\bar{n}} = -1, \quad (V.9)$$

portanto exibindo o máximo efeito sub-Poissoniano ( $Q = -1$ ), independente de  $N$ . Ao contrário, o efeito anterior (anti-agrupamento) dependia de  $N$ , sendo pequeno para  $N$  grande. Por outro lado,

h)

$$\Delta \hat{X}_1^2 = \Delta \hat{X}_2^2 = \frac{1}{4}(2N + 1) \geq \frac{1}{4}, \quad (V.10)$$

mostrando que o estado  $|N\rangle$  não exhibe o efeito de compressão.

Em resumo, o estado de número  $|N\rangle$  exhibe os efeitos não-clássicos de anti-agrupamento e estatística sub-Poissoniana. Mas não exhibe o efeito não-clássico de compressão. Basta exhibir um dos três efeitos não-clássicos ou algum outro para ser um estado não-clássico.

A preparação de um campo luminoso num estado de número  $|N\rangle$  foi anunciada, em 1982, por Mandel [29]. Porém, aparentemente, de sucesso duvidoso.

**(B) Estado de fase  $|\theta_m\rangle$**

Um segundo estado não-clássico do campo luminoso é o estado de fase  $|\theta_m\rangle$ , complementar do estado de número. Estado de fase  $|\theta_m\rangle$ , bem como operadores de fase  $\hat{\phi}$ , são ingredientes polêmicos tanto na Mecânica Quântica quanto na Ótica Quântica, desde a proposta de Dirac em 1927. Inicialmente Dirac propôs a relação de comutação [30]

$$[\hat{n}, \hat{\phi}] = i. \tag{V.11}$$

Porém, essa relação acarretava a relação de incerteza  $\Delta\hat{n} \cdot \Delta\hat{\phi} \geq 1/2$  e então, para  $\Delta n \ll 1$  implicava  $\Delta\hat{\phi} \gg 2\pi$ , isto é, uma incerteza na fase maior que  $2\pi$  um resultado sem sentido. Além disso, a relação de comutação (V.11) acarretava que

$$\langle n | [\hat{n}, \hat{\phi}] | n' \rangle = (n - n') \langle n | \hat{\phi} | n' \rangle = i \delta_{n, n'}, \tag{V.12}$$

tal que deixava o elemento de matriz  $\langle n | \hat{\phi} | n' \rangle$  indeterminado.

Em 1964 quando Dirac já havia retirado o assunto da nova edição, Sussekind e Glogower [25] avançaram mais no assunto, introduzindo o operador de fase

$$\hat{U} = (e^{i\hat{\phi}})_{SG} = \hat{a} / \sqrt{\hat{n}} = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n+1|,$$

onde

$$\hat{U}^+ = (e^{-i\hat{\phi}})_{SG} = (1/\sqrt{\hat{n}})\hat{a}^+ = \sum_{n=0}^{\infty} |n+1\rangle \langle n|. \tag{V.13}$$

No entanto, ainda restavam problemas. O operador  $U = e^{i\hat{\phi}}$  não era unitário:  $UU^+ = 1$ , mas  $U^+U = 1 - |0\rangle\langle 0| \neq 1$ . Se  $U = e^{i\hat{\phi}}$  não era então unitário, então  $\hat{\phi}$  não era Hermiteano. Um bom operador de fase, deveria ser Hermiteano, porque a mecânica quântica sempre associa observáveis a operadores Hermiteanos. A situação estava tão complicada a essa altura que chegou-se a pensar em abrir mão desse tradicional requisito, conforme um artigo de Levy-Leblond [32], intitulado: “Who is afraid of non-hermitean operator?”.

O problema foi contornado apenas recentemente, por Pegg e Barnett [28] que utilizaram o estado de fase truncado (limite superior finito):

$$|\theta_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+N}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\theta_m} |n\rangle \tag{V.14}$$

onde

$$\theta_m = \theta_0 + \left( \frac{2\pi}{1+N} \right) m, \quad m = 0, 1, 2, \dots, N. \tag{V.15}$$

O operador de fase é

$$(e^{i\hat{\phi}})_{PB} = (e^{i\hat{\phi}})_{SG} + e^{i(1+N)\theta_0} |n\rangle \langle 0|, \tag{V.16}$$

onde  $(e^{i\hat{\phi}})_{SG}$  é o operador de fase de Sussekind - Glogower e  $(e^{i\hat{\phi}})_{PB}$  é o operador de fase de Pegg-Barnett (PB). Note que enquanto os operadores de fase de SG são de levantamento e abaixamento, o de PB são cíclicos. A novidade introduzida por PB é o termo adicional na Eq. (V.16):  $\exp[i(N+1)\theta_0] |N\rangle \langle 0|$ . Além disso, o procedimento operacional exige que se façam o cálculo no espaço truncado, de dimensão finita  $N+1$  e, ao final, se faça o limite  $N \rightarrow \infty$ , nessa ordem.

Propriedades:

a)

$$\hat{\rho}(\theta_m) = |\theta_m\rangle \langle \theta_m| = \frac{1}{1+N} \sum_{n, n'=0}^N e^{i(n-n')\theta_0} |N\rangle \langle N'| \tag{V.17}$$

b)

$$p_n(\theta_m) = |\langle n | \theta_m \rangle|^2 = \frac{1}{1+N} \tag{V.18}$$

sendo independente de  $n$ . A distribuição estatística de fótons nesse estado, é plana: num estado de fase, a incerteza no número é grande, como se mostra abaixo, em (d).

c)

$$tr \hat{\rho}^2 = tr \hat{\rho} = 1.$$

d)

$$\bar{n} = \langle \theta_m | \hat{n} | \theta_m \rangle = \frac{N}{2} \rightarrow \infty, \quad \text{se } N \rightarrow \infty \tag{V.19}$$

e)

$$\Delta \hat{n}^2 = \langle \hat{n}^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle^2 = \frac{N^2}{12} \rightarrow \infty, \quad \text{se } N \rightarrow \infty. \tag{V.20}$$

Note que, enquanto isso,  $\Delta \hat{\phi}^2 = 0$  como esperado. A expressões para  $g^{(2)}$ ,  $Q$  e  $\Delta \hat{X}_1^2$  são longas nesse caso, revelando também efeitos não-clássicos dos tipos anti-agrupamentos, sub-Poissioniano e compressão.

A medida de ruídos no operador de fase foi sugerida recentemente [28]. A medida do operador de fase em diversos estados foi também proposta recentemente



[34], em 1996. A geração de estado de fase, bem como a geração de estado de número, são assuntos ainda não resolvidos.

Finalmente, notamos que o estado (quasi-clássico) coerente  $|\alpha\rangle$  é intermediário entre o estado (não-clássico) de número  $|N\rangle$  e de fase  $|\theta_m\rangle$ , no sentido de que a dispersão em  $\hat{n}$  e  $\hat{\phi}$  são ambos finitos [33]

$$\begin{aligned}\Delta\hat{n}^2(\alpha) &= \bar{n}, \\ \Delta\hat{\phi}^2(\alpha) &= \frac{1}{4\bar{n}},\end{aligned}\quad (V.21)$$

donde obtemos, a relação de mínima incerteza, num estado coerente dada por

$$\Delta\hat{n}(\alpha) \cdot \Delta\hat{\phi}(\alpha) = 1/4. \quad (V.22)$$

### (C) Estado comprimido

Enquanto  $|\alpha\rangle$  era auto-vetor do operador de aniquilação  $\hat{a}$ , o estado comprimido [35]  $|\beta\rangle$  é auto-vetor do operador [30]  $\hat{b} = \mu\hat{a} + \nu\hat{a}^+$ . Assim,

$$\hat{b}|\beta\rangle = \beta|\beta\rangle, \quad (V.23)$$

onde se exige que a transformação  $\hat{b} = \mu\hat{a} + \nu\hat{a}^+$  seja canônica:  $[\hat{a}, \hat{a}^+] = [\hat{b}, \hat{b}^+] = 1$ , o que acarreta  $|\mu|^2 - |\nu|^2 = 1$ . Note que, se  $\nu \rightarrow 0$  então  $\hat{b} \rightarrow \hat{a}$  e então  $|\beta\rangle \rightarrow |\alpha\rangle$ . Enquanto tínhamos, para  $|\alpha\rangle$ ,

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle, \quad (V.24)$$

onde  $\hat{D}(\alpha)$  é o operador unitário  $\hat{D}(\alpha) = \exp[\alpha\hat{a}^+ - \alpha^*\hat{a}]$ , agora temos,

$$|\beta\rangle = \hat{S}(z)|\alpha\rangle, \quad (V.25)$$

onde  $\hat{S}(z)$  é o operador unitário [30]

$$\hat{S}(z) = e^{z\hat{a}^{+2} - z^*\hat{a}^2}/2. \quad (V.26)$$

Note então que

$$|\beta\rangle = \hat{S}(z)|\alpha\rangle = \hat{S}(z)\hat{D}(z)|0\rangle \neq \hat{D}(\alpha)\hat{S}(z)|0\rangle, \quad (V.27)$$

porque os operadores  $\hat{D}$  e  $\hat{S}$  não comutam. Escrevendo  $z$  na forma polar  $z = re^{i\theta}$ , resulta

$$\mu \cosh(r); \quad \nu = e^{i\varphi} \sinh(r). \quad (V.28)$$

A Hamiltoniana geradora do efeito de compressão é quadrática em  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^+$

$$\hat{H} = \hbar\omega\hat{a}^+a + \hbar\lambda(\hat{a}^2 + \hat{a}^{+2}). \quad (V.29)$$

A constante  $\lambda$  vem do acoplamento do campo (a ser comprimido), com um meio material não-linear, que causa a compressão.

Propriedades:

a)

$$\hat{\rho}(\beta) = |\beta\rangle\langle\beta|. \quad (V.30)$$

b)

$$p_n(\beta) = |\langle n|\beta\rangle|^2. \quad (V.31)$$

c)

$$\text{tr}(\rho^2) = \text{tr}(\rho) = 1.$$

d)

$$\bar{n} = \langle\beta|\hat{n}|\beta\rangle = |\alpha|^2 + \sinh^2(r). \quad (V.32)$$

Note que para  $\alpha \rightarrow 0$  (vácuo)  $\bar{n} = \sinh^2(r)$ . Portanto, o estado de vácuo-comprimido tem fótons! Por outro lado, no limite  $r \rightarrow 0$ , resulta  $\nu = e^{i\varphi}\sinh(r) \rightarrow 0$  e então  $|\beta\rangle \rightarrow |\alpha\rangle$ , onde  $\bar{n}(\beta) = \bar{n}(\alpha) = |\alpha|^2$ , conforme resultado anterior.

As expressões de  $g^{(2)}$  e  $Q$  são longas nesse caso. Enquanto isso, obtemos

$$\Delta\hat{X}_1^2 = \frac{1}{4} \left[ e^{-r} \cosh^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + e^r \sinh^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right],$$

$$\Delta\hat{X}_2^2 = \frac{1}{4} \left[ e^r \cosh^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + e^{-r} \sinh^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right], \quad (V.33)$$

e então, para  $\varphi = 0$  obtemos compressão em  $\hat{X}_1$ . Para  $\varphi = \pi$  obtemos compressão em  $\hat{X}_2$ .

O ponto c sobre a hiperbole (Fig.V.2), representa todos os (infinitos) estados coerentes, nos quais temos  $\Delta\hat{X}_1^2 = \Delta\hat{X}_2^2 = 1/4$ . Os pontos restantes da hiperbole representam estados comprimidos de mínima incerteza ( $\Delta\hat{X}_i \cdot \Delta\hat{X}_j = 1/4$ ). Os pontos da região hachurada representam estados comprimidos que não são de mínima incerteza ( $\Delta\hat{X}_1\Delta\hat{X}_2 > 1/4$ ), onde  $\Delta\hat{X}_1 < 1/4$ , ou  $\Delta\hat{X}_2 < 1/4$ . A região abaixo, ou à esquerda da hiperbole, é proibida ( $\Delta\hat{X}_1\Delta\hat{X}_2 < 1/4$ ), enquanto que a região acima do eixo ac, e à direita do eixo bc, não apresenta efeito de compressão. Sobre a bissetriz estão marcadas as dispersões no estado de número  $|1\rangle$ ,  $|2\rangle$ ,  $|3\rangle$ , etc., para os quais  $\Delta\hat{X}_1^2 = \Delta\hat{X}_2^2 = 3/4, 5/4, 7/4$ , etc., respectivamente.

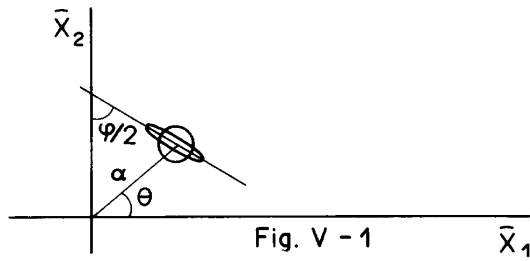


Figura V.1. Representação do estado comprimido no espaço de fase, mostrando o ângulo  $\varphi$ .

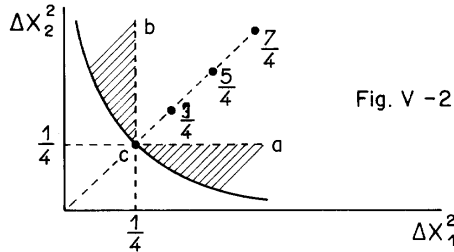


Figura V.2. Caracterização de regiões clássicas e não clássicas no espaço das variâncias  $\{\Delta X_1^2, \Delta X_2^2\}$ .

A teoria do estado comprimido iniciou-se [36] por volta de 1970, enquanto sua observação experimental [37] ocorreu a partir de 1985.

A Fig. V.3 resume os resultados anteriores.

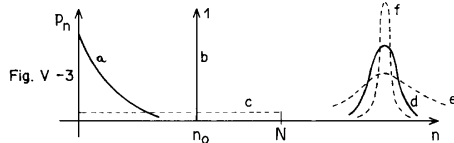


Figura V.3.

## VI Estados não-clássicos derivados

### VI.1 - Estado de número deslocado

$$|N\rangle_D = \hat{D}(\alpha)|N\rangle. \quad (VI.1)$$

Nesse caso  $p_n \neq \delta_{n,N}$ : o deslocamento do estado de número alarga a distribuição de Kronecker. Para  $|\alpha| < 1/2$  o estado de número deslocado exibe anti-agrupamento e estatística sub-Poissoniana [38].

### VI.2 - Estado de número comprimido

$$|N\rangle_S = \hat{S}(z)|N\rangle. \quad (VI.2)$$

Este estado foi introduzido por Sing [39] em 1982, e investigado posteriormente por Kim et al.[40], em 1989. Apresenta efeitos não-clássicos.

## VI.3 - Estado térmico comprimido

$$\hat{\rho}_S(T) = \hat{S}\hat{\rho}(T)\hat{S}^+ = \hat{S}(\sum p_n |n\rangle\langle n|)\hat{S}^+ =$$

$$\sum p_n \hat{S}|n\rangle\langle n|\hat{S}^+ = \sum p_n |n\rangle_s \langle n|_s. \quad (VI.3)$$

Consiste numa superposição de estados de número comprimidos com distribuição  $p_n$  de Bose-Einstein [41].

## VII Estados interpoladores

### VII.1 - Estado binomial [41] (BS)

$$|\eta, N\rangle = \sum_{n=0}^N \beta_n^N(\eta) |n\rangle, \quad (VII.1)$$

onde  $\beta_n^N(\eta)$  é a distribuição binomial.

$$|\beta_n^N(\eta) = \left[ \begin{matrix} N \\ n \end{matrix} \right] \eta^n (1-\eta)^{N-n}, \quad 0 \leq \eta \leq 1. \quad (VII.2)$$

Temos os limites para  $\eta \rightarrow 0$ ,  $\eta \rightarrow \infty$  e para  $\eta \rightarrow 1$ ,  $N$  arbitrário:

$$|\eta, N\rangle \rightarrow |\alpha\rangle, \text{ se } \eta \leftrightarrow \infty \text{ e } N \leftrightarrow \infty \text{ com } \nu \text{ finito,} \quad (VII.3)$$

enquanto que

$$|\eta, N\rangle \rightarrow |N\rangle \text{ se } \eta = 1. \quad (VII.4)$$

Portanto o BS [42] interpola entre estado de número  $|N\rangle$  e estado coerente  $|\alpha\rangle$ .

As figuras VII.a e VII.b mostram o fator de Mandel  $Q$  e a posição do BS no espaço das dispersões  $\Delta X_1^2$  e  $\Delta X_2^2$  em função de  $\eta$ . Note na Fig. (VII.a) que o fator de Mandel inicia em  $Q = 0$ , para  $\eta = 0$ , onde o BS coincide com estado coerente e evolui linearmente para  $Q = -1$ , quando  $\eta \rightarrow 1$ , onde o BS coincide com estado de número. Para todo  $\eta \in (0, 1)$  temos então  $Q < 0$ , logo esse estado é sub-Poissoniano, exibindo também anti-agrupamento de fótons ( $g^{(2)}(0) < 1$ ).

A Fig. (VII.b) mostra o gráfico no espaço das dispersões,  $\Delta X_1, \Delta X_2$ , para  $N = 1, N = 2$  e  $N = 3$ . Note que a curva sai do ponto correspondente aos valores no estado coerente, onde  $\Delta \hat{X}_1^2 = \Delta \hat{X}_2^2 = 1/4$ , (cf. Eq. (IV.22)) e evolui para o ponto correspondente ao estado de número, onde  $\Delta \hat{X}_1^2 = \Delta \hat{X}_2^2 = 3/4, 5/4, 7/4$ , cf. Eq. (V.10)).

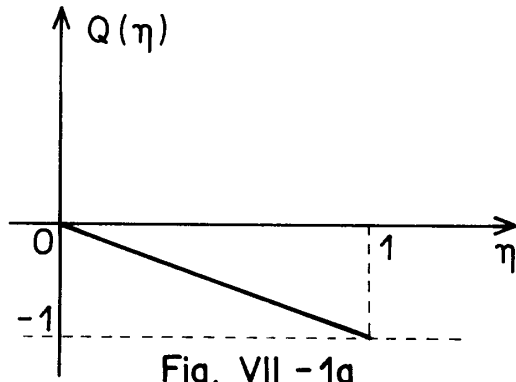


Figura VII.1a. Fator Q de Mandel para o estado binomial.

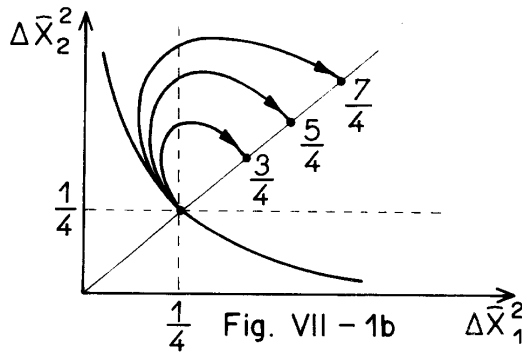


Figura VII.1b. Estado binomial no espaço das variâncias  $\{\Delta \hat{X}_1^2, \Delta \hat{X}_2^2\}$ .

**VII.2 - INPS (Intermediate Number Phase State)**

Esse estado [43] interpola o estado limite de número  $|N\rangle$  e o de fase  $|\theta\rangle$ , estados complementares. Denota-se por

$$|INPS\rangle = |\chi, N\rangle = \sum_{n=0}^N c_n^N(\chi) |n\rangle, \quad (VII.5)$$

onde

$$C_n^N(\chi) = \frac{1}{\sqrt{N+1}} (1 + \chi \tau_{n,N}) e^{i\theta(n-Nr)}, \quad (VII.6)$$

com  $s = 1 + \chi$  e  $r = \chi/s$ ;  $\chi \in [0, \infty]$ . Obtém-se os dois limites acima mencionados:

$$|\infty, N\rangle = |N\rangle ; \quad |0, \infty\rangle = |\theta\rangle. \quad (VII.7)$$

Figuras correspondentes às Figs. (VII.a) e (VII.b) para esse novo estado interpolador são também obtidas. Verifica-se [43] que o efeito sub-Poissonianos e de compressão podem ser mais ou menos acentuados no INPS do que no BS, conforme o intervalo dos parâmetros  $\chi$  e  $N$ . É interessante obter o gráfico da dispersão na fase,  $\Delta \hat{\phi}^2$  versus  $\chi$  (Fig.VII.2), para grandes valores de  $N(N \sim 100)$ . Note que para  $\chi = 0$  (estado de

fase  $|\theta\rangle$ ) temos  $\Delta \hat{\phi}^2 = 0$  enquanto que para  $\chi \rightarrow \infty$  (estado de número  $|N\rangle$ ) temos  $\Delta \hat{\phi}^2 \rightarrow \pi^2/3$ , que são valores esperados. Porém, note que há um *overhoot* em  $\Delta \hat{\phi}^2$  para valores intermediários de  $\chi$ , mostrando que a dispersão em  $\hat{\phi}$ , no INPS, supera àquela obtida no estado de número  $|N\rangle$ . A curva pontilhada representa a curva que esperávamos obter no INPS, na qual  $\Delta \hat{\phi}^2 \in [0, \pi^2/3]$ .

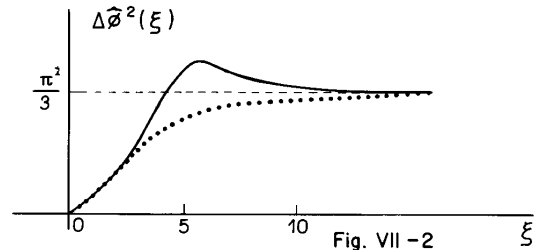


Figura VII.2. Gráfico da variância na fase  $\Delta \hat{\phi}^2$ , com parâmetro interpolar  $\chi$ , mostrando “over-shoot”.

Não sabemos como gerar esse estado proposto. Tampouco se sabe, ainda, como gerar seus estados limites, tão usuais na literatura. O mesmo ocorre com o BS (lembrar que o estado comprimido demorou 15 anos para ser gerado, após sua proposta teórica - ver Refs. 13 e 14).

**VII.3 - INSS (Intermediate Number Squeezed State)**

Este estado [44] interpola os estados de número  $|N\rangle$  e o estado comprimido  $|z, \alpha\rangle = \hat{S}(z)|\alpha\rangle$ . Denota-se por

$$|INSS\rangle = |z, \eta, N\rangle = \hat{S}(z)|\eta, N\rangle = \sum_{n=0}^N \beta_n^N(\eta) |n\rangle_s, \quad (VII.8)$$

onde a expansão na base de número comprimido,  $\{|n_s\rangle\}$ , utiliza o coeficiente do BS (ver Sec. VII.1).  $\tilde{z} = (1-\eta)z$  é um conveniente parâmetro de compressão  $z$  é o parâmetro de compressão usual. Este estado interpolador também apresenta o efeito não-clássico, do tipo anti-agrupamento, sub-Poissonianos e compressão de ruídos [1].

A sua geração foi proposta recentemente [45].

**VIII Estados de superposição**

Além dos estados não-clássicos “tradicionalis”:  $|n\rangle$ ,  $|n\theta\rangle$ ,  $|z, \alpha\rangle$ , (ver sec. V), dos estados derivados:  $|n\rangle_D$ ,  $|n\rangle$ , e  $\hat{\rho}(T)$ , (Ver Sec. VI) e dos estados interpoladores:  $|BS\rangle$ ,  $|INPS\rangle$ ,  $|INSS\rangle$ , (ver Sec. VII), há ainda os estados de superposição. Dois estados que, separadamente, apresentam ou não efeito não-clássicos, quando superpostos apresentam efeitos não-clássicos interessantes. Exemplos desses estados são os discutidos abaixo.

### VIII.1 - Superposição de dois estados coerentes

$$|\psi\rangle = N[|\alpha e^{i\theta}\rangle + |\alpha e^{-i\theta}\rangle]. \quad (VIII.1)$$

Nesse caso, os estados componentes são clássicos (ver Sec. (IV.b)) mas o estado superposto é não-clássico, apresentando os efeitos mencionados na Secção II. Esse estado foi investigado por Schleich et al. [19]. Exemplos bastante interessantes de estados do tipo VIII.1 são os chamados estados coerentes par e impar dado por

$$|\psi_{\pm}(\alpha)\rangle = N_{\pm}[|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle], \quad (VIII.2)$$

e investigados por Malkin et al.[46], Gerry et al.[47], Zaheer et al.[48].

### VIII.2 - Superposição de dois estados comprimidos

$$|\psi\rangle = N[|\beta_1\rangle + |\beta_2\rangle]. \quad (VIII.3)$$

Estes estados superpostos foram estudados por Sanders [49], Schleich et al. [19], Xin et al.[50], dentre outros. Dentre eles destacamos os estados comprimidos pares e ímpares, estudados na Ref.[50]:

$$|\psi_{\pm}(\beta)\rangle = N_{\pm}(\beta)[|\beta\rangle \pm |-\beta\rangle].$$

### VIII.3 - Superposição de dois estados de número

$$|\psi\rangle = N[\sqrt{\chi}|n_1\rangle + e^{i\theta}\sqrt{1-\chi}|n_2\rangle]. \quad (VIII.4)$$

Estes estados foram estudados por Wodkiewicz [51], para os casos particulares ( $\chi = 1/2$ ,  $\phi = 0$ ,  $n_1 = 0$ ,  $n_2 = 1, 2$ ). Assim

$$|\psi_{01}\rangle = 1/\sqrt{2}[|0\rangle + |1\rangle], \quad (VIII.5)$$

e

$$|\psi_{02}\rangle = 1/\sqrt{2}[|0\rangle + |2\rangle], \quad (VIII.6)$$

tendo sido mostrado que tal superposição gera o efeito de compressão, um efeito ausente nas componentes  $|n_1\rangle$ ,  $|n_2\rangle$ .

### VIII.4 - Superposição de estado de número com estado coerente

$$|\psi\rangle = N(\chi\phi)[\sqrt{\chi}|n\rangle + e^{i\phi}\sqrt{1-\chi}|\alpha\rangle]. \quad (VIII.7)$$

Este estado, que interpola os estados limites  $|n\rangle$  e  $|\alpha\rangle$ , é alternativo ao estado binomial (ver Sec. VII.1). Sua comparação com o estado binomial foi investigada recentemente [52].

### VIII.5 - Superposição de estado de número com estado comprimido

$$|\psi\rangle = N(\chi\phi)[\sqrt{\chi}|n\rangle + e^{i\phi}\sqrt{1-\chi}|\beta\rangle]. \quad (VIII.8)$$

Este estado, que interpola os estados limites  $|n\rangle$  e  $|\beta\rangle$ , é alternativo ao INSS (ver Sec. VII.3). Sua comparação com o INSS foi investigada [53]. Mais recentemente, foram investigados interessantes estados puros que exibem estatística de estado térmico [54] e estados não-coerentes que exibem estatística poissoniana [55].

## IX Conclusão

Como vemos, a Ótica Quântica dispõe de uma “floresta de estados”, um cenário ausente na Ótica Clássica. Como o campo luminoso guarda analogia com osciladores, esperava-se que efeitos não-clássicos dos tipos estudados na Ótica Quântica pudessem também ser observados em osciladores mecânicos, atômicos, elétricos, etc.. Nesse caso, a investigação teórica se faz há alguns anos, tanto para osciladores elétricos [56], como para átomos e íons aprisionados [57] em armadilhas magnéticas e magneto-ópticas, do tipo Paul [58]. A observação experimental, nesse caso, apareceu somente em 1996 e foi obtida em oscilações de átomos aprisionados em armadilha, a baixíssimas temperaturas [59] ( $\mu$ -Kelvin).

Um tópico recentemente investigado, é o da “profundidade não-clássica” de um estado: quanto não-clássico um estado é? Nessa direção, Hillery [60] lançou a primeira idéia, depois continuadas por Lee [61], contestada por Lima et al.[62]. Com relação aos novos estados quantizados do campo luminoso (ver Seção VI-VIII) incluindo os estados interpoladores (Sec.VII.1-VII.3) e os estados de superposição (Sec.VIII.1-VIII.5), é importante mencionar sua possibilidade, em vista de que recentes resultados interessantes dependem crucialmente da existência de estado tão exóticos como esse. Este é o caso do estado **binomial recíproco**, requerido por Barnett e Pegg [34], para a medida da fase. A construção de estados genéricos, como os aqui mencionados, foi assunto de recente pesquisa por Vogel et al. [63], denominada “engenharia de estado quântico” significando a possibilidade de construção de estados quânticos arbitrários do campo luminoso. É importante destacar que os estados estudados podem se apresentar em duas formas: (i) “estados estacionários”, em que a luz está aprisionada numa cavidade, como aqueles estados produzidos por átomo que atravessam cavidades deixando seus fótons; (ii) “estados viajantes”, como aqueles que emergem de um laser, ou de uma luz que atravessa um meio não-linear, etc.

## Agradecimentos

Os autores agradecem ao CNPq e o PRO-NEX/MCT/FINEP pelo suporte parcial deste trabalho. A H. França pelas Refs. [5]-[7].

## References

- [1] W. Zurek, Phys. Rev. **D24**, 1516 (1981); Phys. Today, Out./91.
- [2] A.D. Caldeira e A.J. Leggett, Physica **A121**, 587 (1983); Phys. Rev. **A31**, 1057 (1985).
- [3] D.F. Walls, G.J. Milburn, *Quantum Optics*, Springer-Verlag, (Berlin, 1994).
- [4] A.R. Gomes, "Colapso e Ressurgimento da Função de Onda em Osciladores Acoplados", Dissertação de Mestrado/UFPB/Dez/95.
- [5] M.O. Scully, M. Sargent III, Phys. Today, Março/90 - pg. 36; R. Kid et al, Am. J. Phys. **57**, 27 (1985).
- [6] J.N. Dodd, Eur. J. Phys., **4**, 205 (1983).
- [7] M.D. Crisp, E.T. Jaynes, Phys. Rev. **179**, 1293 (1969).
- [8] Ver: D.F. Walls e G.J. Milburn, Ref. 3, pg. 2 ; B. Baseia, Revista Bras. Ens. de Física, **17**, 1 (1995).
- [9] H. Brown , R.W. Twiss, Nature, **177**, 27 (1956).
- [10] F.T. Arecchi, E. Gatti, A. Sona, Phys. Rev. Lett. **20**, 27 (1966); Phys. Lett. **16**, 32 (1966).
- [11] H.J. Kimble, M. Degenais, L. Mandel, Phys. Rev. Lett. **39**, 691 (1977); a previsão teórica: H.J. Carmichael, D.F. Walls, J. Phys. **B9**, L43 (1976).
- [12] L. Mandel, Opt. Lett. **4**, 205 (1979); Phys. Scr. **T12**, 34 (1986).
- [13] D. Stoler, Phys. Rev. **D1**, 3217 (1970).
- [14] R.E. Slusher et al., Phys. Rev. Lett. **55**, 2409 (1985); R.L. Robinson, Science, **230**, 927 (1985).
- [15] G. Rempe, H. Walther and N. Klein, Phys. Rev. Lett. **58**, 353 (1987).
- [16] P.L. Kapitza, P.M. Dirac, Phys. Soc. Phys. Sci., **29**, 297 (1933); ver também R.S. Barbieri, Ciência e Cultura, **44**, 378 (1992).
- [17] P.L. Gould et al., Phys. Rev. **A43**, 585 (1991); ver também Ref.[3], Cap. 17.
- [18] M. Freyberger and A.M. Herkommer, Phys. Rev. Lett. **72**, 1952 (1992); B. Baseia, et al., Ref.[28].
- [19] W. Schleich, D.F. Walls e J.A. Wheeler, Phys. Rev. **A38**, 1177 (1988); Nature, **326**, 574 (1987).
- [20] A. Aspect, P. Grangier, G. Roger, Phys. Rev. Lett. **49**, 1804 (1982); P.G. Kwiat, K. Mattle, H. Weinfurter and A. Zeilinger, Phys. Rev. Lett. **75**, 4337 (1995).
- [21] Z. Ou, S. Pereira, H.J. Kimble, K.C. Peng, Phys. Rev. Lett. **68**, 366 (1992).
- [22] E. Schrödinger, Naturwissenschaften, **23**, 844 (1935).
- [23] L. Davidovich et al. Phys. Rev. Lett. **71**, 2360 (1993); B. Yurke, D. Stoler, Phys. Rev. Lett. **57**, 13 (1986); C. Monroe et al., Science, **272**, 1131 (1996).
- [24] C.H. Bennett et al, Phys. Rev. Lett., **70**, 1895 (1993).
- [25] R.J. Glauber, Phys. Rev. **130**, 2529 (1963).
- [26] L. Mandel, E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics*, Cambridge Uni. Press, NY(1995), pg. 543; B. Baseia, M.H.Y. Moussa and V.S. Bagnato, Phys. Lett. **A240**, 277 (1998); R. Ragi, V.S. Bagnato e B. Baseia, Mod. Phys. Lett. **13**, (1999) a ser publicado.
- [27] H.M. Nussenzveig, *Introduction to Quantum Optics* (Gordon & Breach, NY (1972)), Cap. 4.
- [28] D.T. Pegg, S.M. Barnett, Europhys. Lett., **6**, 483 (1988); Phys. Rev. **A39**, 1665 (1989). B. Baseia, C. Dantas, V. Bagnato, R. Vyas, Phys. Lett. **A194**, 153 (1994).
- [29] L. Mandel et al., Phys. Rev. Lett., **49**, 136 (1982).
- [30] P.A.M. Dirac, Proc. R. Soc. London, Ser. **A114**, 243 (1927).
- [31] L. Susskind, J. Glogower, Physics **1**, 49 (1964).
- [32] J.M. Levy-Leblond, Ann. Phys., **1101**, 319 (1976).
- [33] S.M. Barnett, D.T. Pegg, Phys. Rev. Lett. **76**, 4148 (1996); Z.B. Birula e I.B. Birula, Appl. Phys. **B60**, 275 (1995); para uma revisão crítica sobre estados de fase ver: R. Linch, Phys. Rep. **256**, 367 (1995).
- [34] S.M. Barnett, D.T. Pegg, Phys. Rev. Lett. **76**, 4148 (1996).
- [35] H.P. Yuen, Phys. Rev. **A13**, 2226 (1976); D.F. Walls, Nature **306**, 141 (1983).
- [36] D. Stoler, Phys. Rev. **D1**, 3217 (1970).
- [37] R.E. Shusher et al., Phys. Rev. Lett. **55**, 2409 (1985).
- [38] P.L. Knight, Phys. Rev. **A41**, 2645 (1990).
- [39] S. Sing, Phys. Rev. **D25**, 3413 (1982)
- [40] M.S. Kin et al., Opt. Commun. **72**, 99 (1989); Phys. Rev. **A40**, 2494 (1989).
- [41] A. Fearn e M. Collet, J. Mod. Opt. **35**, 553 (1988); G.S. Agarwal e G. Adam, Phys. Rev. **A38**, 750 (1988); A. Voudras e R.M. Weiner, Phys. Rev. **A36**, 5866 (1987); B. Yurke, J. Opt. Soc. Am. **B4**, 1551 (1987); Phys. Rev. Lett., **60**, 764 (1988); M.S. Kin, F.M. Oliveira e P. Knight, Phys. Rev. **A40**, 2492 (1989).
- [42] D. Stoler et al., Opt. Acta, **32**, 345 (1985); G. Datoli et al., J. Opt. Soc. Am. **A4**, 185 (1987); A. Joshi, R.R. Puri, J. Mod. Opt. **36**, 557 (1989).
- [43] B. Baseia, A.F. de Lima e G.C. Marques, Phys. Lett., **A204**, 1 (1995); J. Mod. Opt. **43**, 729 (1996).
- [44] B. Baseia, A.F. de Lima e A.J. da Silva, Mod. Phys. Lett. **B9**, 1673 (1995).
- [45] B. Baseia, A.F. de Lima e V.S. Bagnato, Mod. Phys. Lett. **B10**, 671 (1996).
- [46] I.A. Malkin e V.I. Man'ko, *Dynamical Symmetries and Coherent States*, (Nauka, Moscow (1979)).
- [47] C.C. Gerry e E.E. Hach III, Phys. Lett. **A174**, 185 (1993); **A179**, 1 (1993).
- [48] K. Zaheer e M.R. Wahiddin, J. Mod. Opt. **41**, 151 (1994).
- [49] B.C. Sanders, Phys. Rev. **A39**, 4284 (1989).
- [50] Z.Z. Xin et al., Phys. Rev. **A50**, 2865 (1994).
- [51] K. Wodkiewicz, Phys. Rev. **A35**, 2567 (1987).
- [52] B. Baseia, S.C. Granja e G.C. Marques, Phys. Scripta, **55**, 719 (1997).
- [53] B. Baseia, C. Dantas e M.H. Moussa, Physica **A256**, 203 (1998).

- [54] C.M. Dantas e B. Baseia, *Physica* **A265**, 176 (1999).
- [55] B. Baseia, H. Dias, A.L. de Brito e G.A. Marques, *N. Cim. D* **20**, 1609 (1998).
- [56] B. Baseia, *Phys. Lett. A* **170**, 311 (1992); B. Baseia, S.S. Mizrahi, M.Y. Moussa, *Phys. Rev.* **A46**, 5885 (1992); A.L. de Brito e B. Baseia, *Physica* **A197**, 364 (1993); *Quant. Opt.* **4**, 201 (1992); B. Baseia, A. de Brito, A.N. Chaba e R. Vyas, *Phys. Rev.* **A52**, 1518 (1995); D. Portes Jr., H. Rodrigues, S.B. Duarte e B. Baseia, *Physica* **A268**, 121 (1999).
- [57] B. Baseia, C.M. Dantas, V.S. Bagnato e R. Vyas, *Quant. Opt.* **6**, 73 (1994); C. Bonato e B. Baseia, *Intern. J. Theor. Phys.*, **33**, 1445 (1994); C.M. Dantas, V.S. Bagnato e B. Baseia, *Mod. Phys. Lett.* **B8**, 1549 (1994); **B8**, 1833 (1994); B. Baseia e V.S. Bagnato, *N. Cim.* **B109**, 1129 (1994); B. Baseia, V.S. Bagnato e R. Vyas, *Mod. Phys. Lett.* **B10**, 661 (1996). B. Baseia, V.S. Bagnato, M. Marchioli e M. Oliveira, *Quant. Opt.* **8**, 1147 (1996); **9**, 519 (1996).
- [58] W. Paul, *Rev. Mod. Phys.* **62**, 531 (1990).
- [59] C. Monroe et al., *Phys. Rev. Lett.*, **76**, 1796 (1996).
- [60] M. Hillery, *Phys. Rev.* **A35**, 725 (1987); *Phys. Lett. A* **111**, 409 (1985).
- [61] C.T. Lee, *Phys. Rev.* **A52**, 3374 (1995); **A44**, R. 2775 (1991); **A45**, 6586 (1992).
- [62] A.F. Lima e B. Baseia, *Phys. Rev.* **A54**, 4589 (1996).
- [63] K. Vogel, V.M. Akulin and W.P. Scheich, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 1816 (1993); A.S. Parkins, P. Marte, P. Zoller, O. Carnal and H.J. Kimble, *Phys. Rev.* **A51**, 1578 (1995); R. Ragi, B. Baseia e V. Bagnato, *Mod. Phys. Lett.*, **B13**, 131 (1999).