

# Choques Múltiplos de Esferas Adjacentes ou “Deus não faz cálculos”

Multiple collisions of adjacent spheres (or “God doesn’t calculate”)

Antonio Carlos Baratto

*Departamento de Física*

*Centro de Ciências Exatas*

*Universidade Federal do Espírito Santo*

*Av. Fernando Ferrari, s/n*

*29060-900 - Vitória, ES, Brasil*

*E-mail: barata@cce.ufes.br*

Recebido em 16 de Agosto, 1998

É feita uma discussão sobre o problema dos choques entre esferas no experimento de pêndulos bifilares múltiplos adjacentes, freqüentemente tratado como exemplo de comprovação das leis de conservação de momento e energia. É proposto um modelo para a explicação do experimento. Resulta desse tratamento uma discussão que coloca em evidência uma interpretação profunda e sutil das leis de conservação, normalmente não considerada nos livros de mecânica na abordagem de problemas de colisão.

A discussion is made on the collision balls experiment, composed by a set of identical balls suspended bifilarly in a straight row. A collision model that satisfactorily explains the results shows the necessity of a more deep and subtil interpretation of the conservation laws than that commonly used in the textbooks to treat the collision problems.

## I Introdução

É bastante comum a apresentação, em centros de ciências, feiras e livros textos, de um experimento constituído por uma série de esferas rígidas de mesma massa suspensas adjacentes (figura 1). A experiência consiste em provocar a colisão de uma esfera (à esquerda, por exemplo) com as outras. O resultado é que apenas uma das esferas, a última, à direita, adquire a mesma velocidade da primeira esfera que se chocou, e levanta-se à mesma altura em que esta foi largada.

Se duas esferas são suspensas à esquerda e soltas, apenas duas se levantam à direita, e sobem também à mesma altura. E, assim, sucessivamente. Se os choques fossem perfeitamente elásticos e se não ocorressem os diversos efeitos dissipativos, os movimentos alternados

à esquerda e à direita continuariam indefinidamente.

Por vezes, já na forma de um brinquedo demonstrativo, um impulsionador eletromagnético, oculto na base, compensa as perdas de energia envolvidas nos choques e perspassa ao observador uma ilusão de moto contínuo.

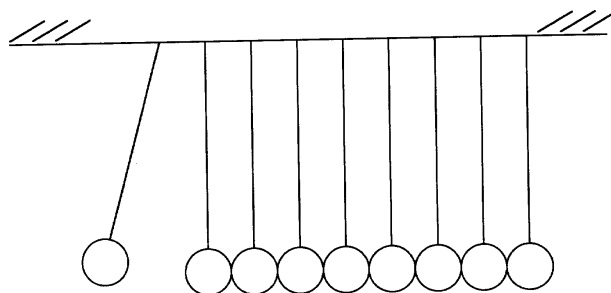


Figura 1. Representação esquemática de um experimento de choques múltiplos. No aparato construído no Departamento de Física da UFES as esferas são bolas de bocha de 12 cm de diâmetro.

Todos sabem que, num choque elástico, o momento linear e a energia cinética se conservam. E isso explicaria o experimento, acrescentando-se, claro, a subsequente conservação da energia mecânica após as colisões.

Na realidade, a aplicação das leis de conservação da maneira pela qual mais comumente se pensa o experimento não explica completamente os resultados observados, os quais somente são explicados pela aplicação criteriosa das leis de conservação de uma maneira que não é usual no tratamento de colisões.

O mesmo aparato possibilita diversos experimentos intrigantes e instigantes, como soltar um número de esferas maior que a metade do total, tornar duas ou mais esferas solidárias, soltar esferas simultaneamente de lados opostos, tornar algumas colisões inelásticas, etc.

## II Um choque, muitas esferas

O número de esferas ( $N$ ) no experimento pode ser qualquer. Apliquemos as leis de conservação pertinentes ao fenômeno. Suporemos, por simplicidade, que apenas uma esfera, à esquerda, seja levantada e atinja o conjunto com velocidade  $v_{1i}$ . Adotaremos como sentido positivo o eixo  $x$  orientado da esquerda para a direita. Todas as velocidades estão relacionadas aos movimentos na direção  $x$ . Os índices  $i$  e  $f$  referem-se, respectivamente, a velocidade inicial (medida antes do choque) e final (medida depois do choque).

Pela conservação do momento:

$$m_1 \vec{v}_{1i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f} + m_3 \vec{v}_{3f} + \dots \quad (1)$$

$$m_1 v_{1i} \hat{i} = m_1 v_{1f} \hat{i} + m_2 v_{2f} \hat{i} + m_3 v_{3f} \hat{i} + \dots \quad (2)$$

Pela conservação da energia cinética:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 + \frac{1}{2} m_3 v_{3f}^2 + \dots \quad (3)$$

Fazendo, como no experimento,  $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = \dots$ , teremos, de (2) e (3), respectivamente:

$$v_{1i} = v_{1f} + v_{2f} + v_{3f} + v_{4f} + \dots \quad (4)$$

$$v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2 + v_{3f}^2 + v_{4f}^2 + \dots \quad (5)$$

Como um exemplo ilustrativo vamos considerar  $N = 4$  e, por simplicidade,  $v_{1i}$  igual à unidade.

Analisaremos os conjuntos de valores de  $v_{if}$ ,  $v_{2f}$ ,  $v_{3f}$  e  $v_{4f}$  que satisfazem simultaneamente às equações (4) e (5). De antemão podemos perceber que teremos infinitas soluções, pois temos apenas duas equações e quatro incógnitas.

Alguns possíveis resultados estão colocados nos quadros I, II, III e IV, que se referem a diferentes grupos de valores que satisfazem às duas equações. As possibilidades reais de cada resultado serão analisadas a seguir.

		$v_{1i}$	$v_{1f}$	$v_{2f}$	$v_{3f}$	$v_{4f}$	
I	A	1	0	0	0	1	P
	B	1	0	0	1	0	X
	C	1	0	1	0	0	X
	D	1	1	0	0	0	X

		$v_{1i}$	$v_{1f}$	$v_{2f}$	$v_{3f}$	$v_{4f}$	
II	A	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	P
	B	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	X
	C	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	X
	D	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	X

	$v_{li}$	$V_{1f}$	$V_{2f}$	$V_{3f}$	$v_{4f}$		
III	A	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	P
	B	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	X
	C	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	X
	D	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	X
	E	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	X
	F	1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	X
	G	1	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	X
	H	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	X
	I	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	X
	J	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	X
	K	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	X
	L	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	X

	$V_{li}$	$V_{1f}$	$v_{2f}$	$v_{3f}$	$v_{4f}$		
IV	A	1	$-\frac{1}{4}$	$(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{3}{16}})$	$\frac{1}{4}$	$(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{16}})$	P
	B	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{16}})$	$(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{3}{16}})$	X
	C	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{3}{16}})$	$(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{16}})$	X
	D	1	Diversas outras combinações topologicamente não possíveis.				
	E	1					
	•	•					

Das infinitas soluções das equações algumas são topologicamente impossíveis. Por exemplo: uma esfera não pode ter velocidade final positiva menor que a velocidade final positiva de uma esfera a sua esquerda; nenhuma esfera pode ter velocidade final negativa se alguma a sua esquerda tem velocidade final positiva, etc. Esses casos estão assinalados com "X" nos quadros. Mesmo desconsiderando essas soluções, topologicamente não realizáveis, ainda sobram diversas soluções fisicamente possíveis, marcadas com "P" nos quadros.

Com o modelo de choque usado, que nos levou à aplicação das leis de conservação como expressas pelas equações (1) e (3), as diversas soluções marcadas com "P" são todas perfeitamente aceitáveis.

O que deve causar espanto é o fato de que apenas

a primeira solução é observada experimentalmente. Se o leitor está pensando em qualquer coisa relacionada a probabilidade, esqueça. Em nenhum momento foram usados conceitos probabilísticos ou estatísticos.

### III Um choque, duas esferas

Temos, portanto, que rever o modelo adotado para o choque. Faremos isso supondo que a primeira esfera se choca com a segunda esfera e lhe transmite todo o momento e toda a energia antes que a segunda se choque com a terceira esfera. O mesmo se aplica ao choque entre a segunda e a terceira esferas, e assim por diante.

Aplicando as leis de conservação para cada choque individual consecutivo as equações ficarão:

$$\begin{array}{l} 1^{\circ} \text{ CHOQUE} \\ \left. \begin{array}{l} m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \\ \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} V_{1f} = 0 \\ V_{2f} = V_{1i} \end{array} \end{array}$$

A velocidade inicial da 2a. esfera no 2° choque ( $v_{2i}$ ) é igual à  $v_{2f}$  obtida no 1° choque, que é igual a  $v_{1i}$ . Assim:

$$\begin{array}{l} 2^{\circ} \text{ CHOQUE} \\ \left. \begin{array}{l} m_2 v_{2i} = m_2 v_{2f} + m_3 v_{3f} \\ \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 + \frac{1}{2} m_3 v_{3f}^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} V_{2f} = 0 \\ V_{3f} = V_{1i} \end{array} \end{array}$$

A velocidade inicial da 3a. esfera no 3° choque ( $v_{3i}$ ) é igual à  $v_{3f}$  obtida no 2° choque, que é igual a  $v_{1i}$ . Portanto:

$$\begin{array}{l} 3^{\circ} \text{ CHOQUE} \\ \left. \begin{array}{l} m_3 v_{3i} = m_3 v_{3f} + m_4 v_{4f} \\ \frac{1}{2} m_3 v_{3i}^2 = \frac{1}{2} m_3 v_{3f}^2 + \frac{1}{2} m_4 v_{4f}^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} V_{3f} = 0 \\ V_{4f} = V_{1i} \end{array} \end{array}$$

Obtivemos, desta maneira, apenas uma solução, que é aquela que se realiza experimentalmente: a quarta esfera adquire todo o momento e toda a energia da primeira esfera.

## IV Bases físicas para um modelo correto de colisões

### 4.1 Uma primeira hipótese

Vimos, portanto, que não basta a aplicação das leis de conservação para a solução do problema; é necessária, também, a adoção de um modelo adequado para aplicar essas leis de conservação; neste caso consistindo em considerar o evento como uma sucessão de

choques consecutivos entre as esferas.

E aqui começa outro problema. Porque a hipótese correta é a de considerar choques sucessivos e não o choque de uma esfera com as  $(N - 1)$  restantes? Este não é, de fato, um problema trivial. Do ponto de vista conceitual, no que respeita à aplicação das leis de conservação, não é nem mesmo simples. Bem, coloquemos o problema assim: Um físico (você, leitor), sem nunca antes ter entrado em contato com esse experimento, é colocado na situação (excitante e desconfortável) de de-

cidir entre os dois tratamentos (ou hipóteses), isto é, se o resultado do experimento deverá obedecer ao previsto pelo modelo de um choque único ou ao previsto pelo modelo de uma série de choques sucessivos. O experimento será feito somente após sua decisão. Em que esse físico deverá se basear para tomar uma decisão? Não valendo, no caso, apelar para uma *profunda intuição*.

O problema físico fundamental, agora, não é mais saber qual modelo de choque é o correto. O primeiro modelo tentado simplesmente não funciona. Que propriedades intrínsecas às colisões levam a esse resultado?

Uma primeira hipótese, que pode ser testada experimentalmente, é que a duração do choque de uma esfera com a adjacente se dá num tempo muito menor que o necessário para que a segunda esfera, por exemplo, adquira velocidade e se choque com a terceira esfera.

Isto é, num intervalo de tempo  $T$  (o tempo de duração da “colisão”) a primeira esfera transfere toda sua energia cinética para a segunda esfera em forma de energia de deformação elástica. Podemos dizer que a segunda esfera só adquire energia cinética após a onda de choque chegar à sua extremidade, o que exige um tempo da ordem de  $\tau = 2R/v_s$ , onde  $R$  é o raio da esfera e  $v_s$  a velocidade do som no material. Se  $T \ll \tau$ , o fenômeno está explicado. A figura 2 apresenta uma medida do tempo de duração ( $T$ ) de um choque entre duas esferas de aço com diâmetros de 2”. O experimento para fazer essa medida é o seguinte: um fio fino ( $n^\circ 30$ ) esmaltado é preso com fita crepe numa das esferas e levado diretamente à entrada de referência (terra) do osciloscópio. Da mesma maneira, um fio é preso à outra esfera e ligado ao negativo de uma fonte de corrente contínua. O positivo da fonte é ligado à entrada vertical do osciloscópio. Quando as esferas (que devem ser condutoras) estão em contato a tensão da fonte está toda aplicada no osciloscópio. Quando as esferas estão separadas a tensão medida pelo osciloscópio é nula. No presente experimento foi usada tensão contínua de 17,0 V e baixa impedância de entrada no osciloscópio (50  $\Omega$ ). Pela figura pode-se observar que  $T = 220 \mu s$ , aproximadamente. A velocidade do som no aço é de 5900 m/s (valor típico) [1]. Assim,  $\tau = 2R/v_s \cong 8,6 \mu s$ . Os valores aqui obtidos são típicos e devem valer também para nossa montagem com bolas de bocha. Temos, portanto, de concluir que o tempo de duração do choque é maior que o tempo necessário para a deformação elástica se

propagar até o lado posterior da esfera.. E isso invalida nossa primeira hipótese.

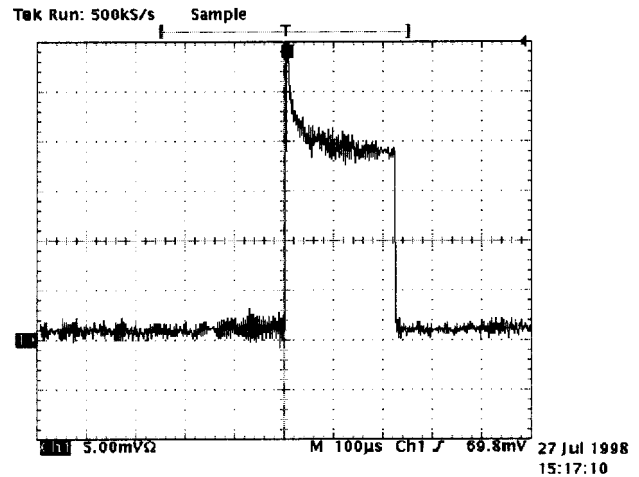


Figura 2. Diagrama da tela do osciloscópio (TDS 640 Tektronics) mostrando o tempo de duração de um choque entre esferas de aço de 2” (50,8 mm).

## 4.2 A correta aplicação das Leis de Conservação

Ao usar o modelo de um choque único entre a primeira e as  $N - 1$  esferas restantes, o que acontece é que a consideração subjacente é no sentido de aplicar as leis de conservação de uma maneira integral:  $\sum \Delta P_k = 0$ ;  $\sum \Delta E_k = 0$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ). Em outras palavras, as equações são montadas considerando-se apenas a situação antes da colisão e a situação depois da colisão. O cômputo das quantidades físicas envolvidas (e conservadas) é feito sem se levar em consideração o que acontece durante a colisão (ou colisões).

Usando as leis nesse sentido haverá perda da informação que está implicitamente contida em cada choque de cada bola com sua vizinha. Embora essa maneira de aplicar as leis de conservação não esteja errada (pois é correto que  $P_i = P_f$  e  $E_i = E_f$ ), ela não contém em si todas as informações que seriam necessárias à completa solução do problema. Daí o fato de a solução obtida apresentar  $N$  incógnitas ( $N$  sendo o número de esferas) e apenas duas equações.

Por outro lado, ao aplicar o segundo modelo, de choques sucessivos, as informações contidas em cada choque são computadas convenientemente e não ficam misturadas, nas mesmas equações, com as informações contidas nos outros choques. De fato, em nenhum momento durante o experimento a bola 1 interage com as

bolas 3, 4, 5...etc. Ela interage apenas com a bola 2. A bola 2, após interagir com a bola 1, em cuja interação valem as leis de conservação, interage *em seguida* com a bola 3 somente. Isso se houver uma bola 3 em sua frente. Se não houver, ela (a bola 2) movimentar-se-á normalmente com a velocidade inicial concernente ao experimento. Notar que não existem, no experimento, forças do tipo  $F_{13}$ ,  $F_{14}$ ,  $F_{24}$ , etc. Portanto, não há que se fazer referência a leis de conservação envolvendo bolas não adjacentes, o que é implicitamente suposto no primeiro modelo, de choque único.

A expressão *em seguida*, usada acima, foi destacada porque necessita uma melhor explicação. Se (como medido) o tempo de duração do choque ( $T$ ) é maior que o tempo correspondente ao deslocamento da onda de cho-

que no diâmetro da esfera ( $\tau$ ), a expressão *em seguida* está usada impropriamente. Na realidade, a expressão *em seguida* deve ser entendida como referindo-se a uma parte (temporal) da interação, e não à interação completa entre as bolas 1 e 2. Isto é, temos de dividir o tempo  $T$  em  $n$  intervalos menores:  $T_1, T_2, T_3, \dots, T_n$ , todos menores que  $\tau$ . Em cada um desses intervalos temporais valem as leis de conservação e a expressão *em seguida* passa a ser usada propriamente quando referenciada a qualquer um desses intervalos.

Na dedução da lei de conservação do momento, por exemplo, sendo  $F_{12}$  e  $F_{21}$  ( $F_{12} = -F_{21}$ , pela Terceira Lei de Newton) as forças envolvidas na interação entre as bolas 1 e 2, temos:

$$\int_t^{t+T_i} F_{12} dt = \int_t^{t+T_i} -F_{21} dt \Rightarrow \Delta P_1(T_i) = -\Delta P_2(T_i) \Rightarrow \Delta P_1(T_i) + \Delta P_2(T_i) = 0$$

que expressa a conservação do momento durante o intervalo de tempo  $T_i$ , que pode ser um intervalo infinitesimal. Se  $T_i$  for um intervalo infinitesimal, essa será a mais completa expressão da Lei de Conservação de Momento.

A *dedução* acima está colocada apenas como recurso didático. Na realidade a Lei de Conservação de Momento é de caráter mais fundamental que a Terceira Lei de Newton [2].

Um interessante tratamento do mesmo problema em termos da existência ou não de dispersão (oriunda de uma não linearidade na relação entre frequências  $w$  dos modos normais e correspondentes números de onda  $k$ ) num sistema massa-mola com um número  $N$  de osciladores acoplados é feito por Herrmann e Schmälzle [3] e por Herrmann e Seitz [4]. Um comentário ao primeiro artigo e a subsequente resposta dos autores podem ser vistos nas referências [5] e [6].

## V Conclusão

As leis de conservação (momento e energia) aplicam-se em cada infinitesimal intervalo de tempo durante uma colisão. A dificuldade em medir as grandezas envol-

vidas, num intervalo infinitesimal de tempo pode ser, para nós, um fator limitante. Mas não o é para a Natureza. A Natureza comporta-se segundo suas próprias leis em cada instante de tempo, afirmação essa que, embora possa parecer um truísmo, nem sempre é devidamente considerada (por nós). Ela *sabe* exatamente, a cada instante, em qualquer evento, qual o caminho a seguir, sem necessitar de cálculos elaborados, muito menos a *posteriori*, para decidir-se por este ou por aquele caminho.

Podemos concluir, assim, que Deus, além de não jogar dados, também não faz cálculos.

## Bibliografia

1. LIDE, David R. *Handbook of Chemistry and Physics*. 72<sup>na</sup> Edition, pg 14-35, CRC Press, Inc., 1991-1992.
2. ROTHMAN, Milton A. *Discovering of Natural Laws*. Dover Publications, Inc., New York (1989).
3. HERRMANN, F. e SCHMÄLZLE, P. "Simple explanation of a well-known collision experiment". *Am. J. Phys.* **49**, 761 (1981).

4. HERRMANN, F. e SEITZ, M. "How does the ball-chain work?" *Am. J. Phys.* **50**, 977 (1982).
5. PIQUETTE, Jean C. Comments on "Simple explanation of a well-known collision experiment". *Am. J. Phys.* **52**, 83 (1984).
6. HERRMANN, F. e SCHMÄLZLE, P. Response to "Comments on 'Simple explanation of a well-known collision experiment' ". *Am. J. Phys.* **52**, 84 (1984).