

# Sentido das Forças de Atrito e Movimento - I

(Direction frictional forces and motion sense)

Helena Caldas<sup>1</sup> e Edith Saltiel<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal do Espírito Santo (UFES), Departamento de Física  
Campus de Goiabeiras: Av. Fernando Ferrari, s/no; 29.060-900, Vitória, E.S. - Brasil  
E-mail: helenac@npd.ufes.br

<sup>2</sup>Laboratoire de Didactique de la Physique dans l'Enseignement Supérieur (LDPES)  
Université Denis Diderot - Paris 7 - case courrier 7086- 2, Place Jussieu  
75.251 Paris Cedex 05 - France; E-mail: esaltiel@ccr.jussieu.fr

Recebido em 11 de novembro, 1998

Este trabalho discute o status usualmente atribuído ao sentido das forças de atrito de escorregamento (atrito cinético ou dinâmico) e de não escorregamento (atrito estático), exercidas sobre superfícies sólidas secas e não lubrificadas, em contato, a partir das dificuldades apresentadas pelos alunos no estudo deste fenômeno.

This work discusses the status usually attributed to the direction of the sliding and the non-sliding frictional forces (respectively, kinetic or dynamic friction and static friction) exerted on dry and unlubricated solid surfaces in contact, starting from the difficulties presented by students in the study of this phenomenon.

## I Introdução

Este trabalho se originou a partir das dificuldades mostradas pelos estudantes de Física Básica (U.F.E.S. e Universidade Paris 7), quando se ensinavam e se trabalhavam as leis do atrito sólido seco.

Particularmente, no que concerne ao sentido das forças de atrito, a grande maioria dos alunos considerava que estas forças eram, “por definição, sempre opostas ao movimento” (caso do atrito cinético) ou à “tendência ao movimento” (caso do atrito estático), apresentando os mesmos, grande resistência em discutir este “princípio geral” e em aceitar inteiramente os resultados desta discussão, que tanto abalava as suas certezas.

Posteriormente, trabalhos desenvolvidos nesta área [1] [2] com estudantes e professores de diferentes países (Brasil, Espanha, França, Itália e Portugal) e de diferentes níveis de escolaridade, mostraram que, efetivamente, este conceito fazia parte do modelo estudantil sobre o fenômeno do atrito. A partir das evidências destes trabalhos, que vieram confirmar, alargar e sistematizar as observações feitas em sala de aula, pretende-se justamente discutir este *status*, levantando aspectos que o contrariam e abordando os pontos “críticos” que fazem parte do universo das dificuldades e idéias apre-

sentadas por estudantes (e professores).

## II Atrito sólido seco do ponto de vista dos estudantes

Resumem-se em seguida, os pontos gerais sobre os quais se focalizam as principais dificuldades dos estudantes no que se refere ao sentido das forças de atrito:

- A atribuição de um sentido às forças de atrito cinético, sem nenhuma referência aos **movimentos relativos de escorregamento** das superfícies de contato<sup>1</sup>, umas em relação às outras.

Edith Saltiel já mostrou, há 20 anos atrás [6], como é difícil para os estudantes raciocinar em termos de referenciais e de definir grandezas físicas nesse referenciais: os movimentos dos objetos são para eles definidos de maneira intrínseca, a partir de causas dinâmicas.

Assim, a força de atrito cinético que se exerce sobre um sólido sempre se opõe ao “movimento” (sempre aquele tomado em relação a um referencial fixo, o movimento “verdadeiro”, “real”): o movimento relativo entre os objetos em contato não é considerado. Neste contexto, a força de atrito cinético só pode ter um caráter “resistente”, o que impossibilita que ela possa ter o mesmo sentido do movimento de um corpo em

<sup>1</sup>O termo “superfícies” em contato (ou, de contato) será sempre empregado num sentido mais geral: a superfície de contato entre sólidos poderá ser, tanto um ponto de contato, como uma linha ou uma superfície plana.

relação a um determinado referencial, e desempenhar, neste referencial, o papel de força “**motriz**” desse movimento.

- A atribuição de um sentido às forças de atrito estático sem nenhuma referência ao **eventual movimento relativo de escorregamento** das superfícies de contato, umas em relação às outras, que se produziria na **ausência de atrito**.

Desta forma, as forças de atrito estático sempre se opõem à tendência ao “movimento”: similarmente ao caso do atrito cinético, só é reconhecido um caráter de “resistência” ao movimento para estas forças. Por outro lado, estas forças não são percebidas como forças que se adaptam às condições dinâmicas de cada situação física dada, em módulo e sentido. Assim, o sentido das forças é considerado “fixo”: ele é sempre oposto ao “movimento” e, portanto, ele só pode variar se o sentido do movimento variar.

### III Atrito sólido seco do ponto vista da física

Quando dois ou mais sólidos estão em contato, eles estão submetidos a interações de contato, entre as quais destacamos aqui as forças de atrito. Estas forças são regidas por leis de natureza bastante complexa. Efetivamente, não existe ainda nenhuma teoria capaz de explicar completamente as leis do atrito de escorregamento (atrito dinâmico ou cinético) e de não escorregamento (atrito estático) entre superfícies sólidas secas e não lubrificadas, em contato.

Assim, é importante enfatizar o caráter empírico das leis existentes e o aspeto fenomenológico do estudo do atrito sólido seco, que não será aqui abordado, senão sob o ponto de vista macroscópico.

O estudo que se segue interessa-se tão somente pelos fenômenos de atrito sólido seco (de escorregamento e de não escorregamento) e, apenas, no que diz respeito às questões ligadas ao sentido atribuído às forças de atrito, em situações físicas de translação pura e de rolamento sem escorregamento e, para as quais, os sólidos em contato são considerados indeformáveis.

#### III.1. Atrito cinético e atrito estático

Resumem-se e discutem-se, em seguida, as propriedades e leis que regem o fenômeno do atrito, no que diz respeito aos aspectos relacionados com o sentido das forças de atrito, enfocando os pontos e os aspectos que mais se relacionam com as dificuldades dos estudantes:

##### III.1.1. Atrito cinético

Podemos dizer que existe atrito de escorregamento (atrito cinético) entre dois sólidos em contato, se pudermos definir, no contato (que pode ser um ponto, uma linha ou uma superfície plana), uma velocidade relativa de escorregamento não nula<sup>2</sup>, para cada superfície em contato, deslizando uma em relação à outra<sup>3</sup>

Consideremos dois sólidos  $S_1$  e  $S_2$  em contato, estando  $S_2$  sobre  $S_1$ , e o conjunto sobre uma superfície horizontal fixa:

##### a. Velocidade relativa de escorregamento ( $v_{re}$ )

Sejam  $\mathbf{v}_{1T}$ <sup>4</sup> e  $\mathbf{v}_{2T}$ , respectivamente, as velocidades dos sólidos  $S_1$  e  $S_2$  em relação a um determinado referencial (a Terra, por exemplo). As velocidades relativas de escorregamento de  $S_1$  em relação a  $S_2$  ( $\mathbf{v}_{12}$ ) e de  $S_2$  em relação a  $S_1$  ( $\mathbf{v}_{21}$ ), serão então dadas por:

$$\mathbf{v}_{12} = \mathbf{v}_{1T} - \mathbf{v}_{2T} \quad e \quad \mathbf{v}_{21} = \mathbf{v}_{2T} - \mathbf{v}_{1T}.$$

Se  $S_1$  estiver em repouso em relação à terra:

$$\mathbf{v}_{1T} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}_{21} = \mathbf{v}_{2T} \quad e \quad \mathbf{v}_{12} = -\mathbf{v}_{2T}. \quad (1)$$

##### b. Sentido das forças de atrito cinético ( $f_c$ )

As leis do atrito cinético concernem às componentes normal ( $\mathbf{N}$ ) e tangencial (força de atrito cinético  $\mathbf{f}_c$ ) da reação que cada sólido exerce sobre o outro, ao nível do contato.

O sentido das forças de atrito cinético que cada uma das superfícies em contato exerce sobre a outra ( $\mathbf{f}_{c12}$  e  $\mathbf{f}_{c21}$ ), será sempre oposto ao sentido das velocidades relativas de escorregamento de cada uma destas superfícies em relação à outra (respectivamente,  $\mathbf{v}_{21}$  e  $\mathbf{v}_{12}$ ). Assim, a força de atrito cinético que  $S_1$  exerce sobre  $S_2$  ( $\mathbf{f}_{c12}$ ) terá sentido contrário ao da velocidade relativa de escorregamento de  $S_2$  em relação a  $S_1$  ( $\mathbf{v}_{21}$ ) e vice-versa (Fig. 1).

##### c. Comentários

Em resumo, o sentido das forças de atrito cinético é perfeitamente definido (assim como o módulo destas forças:  $f_c = \mu N$ ), desde que se conheça o sentido das velocidades relativas de escorregamento, ao contato.

<sup>2</sup>Note-se que uma velocidade relativa de escorregamento não nula, nem sempre implica um atrito cinético não nulo, visto que se considerarmos o atrito entre duas superfícies desprezível, poderemos ter também um valor não nulo para esta velocidade.

<sup>3</sup>A partir de agora, para não pesar muito no texto, o termo “velocidade ou movimento relativo de escorregamento”, sempre que for utilizado, compreenderá o significado geral de “velocidade ou movimento relativo de escorregamento, no contato (que pode ser um ponto, uma linha ou uma superfície plana), para cada superfície em contato deslizando, uma em relação à outra”.

<sup>4</sup>As grandezas vetoriais serão sempre designadas por símbolos em negrito.

Entretanto, estas forças de atrito, ainda que opostas ao movimento relativo de escorregamento das superfícies em contato, podem perfeitamente ter o **mesmo sentido** do movimento do sólido estudado, em relação a um determinado referencial e, tornarem-se para este sólido e em relação a este referencial, uma força “**motriz**” do movimento.

O exemplo clássico de dois blocos, colocados um sobre o outro e o conjunto repousando sobre uma mesa horizontal fixa e de atrito desprezível (para simplificar), ilustra bem esta situação, desde o momento em que se aplique num dos blocos (o inferior, por exemplo) uma força **F** constante (horizontal, para facilitar), tal que os blocos não se movam solidariamente (eles têm acelerações diferentes em relação à mesa).

Um balanço das forças horizontais que atuam nos blocos, é mostrado na Fig. 1.

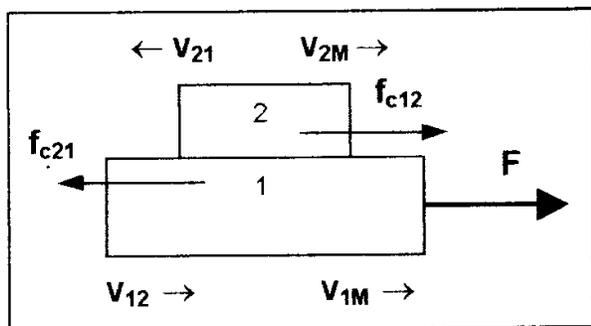


Figura 1. • Força de atrito mesa/bloco: não existe, pois o atrito entre as duas superfícies é desprezível  
 • Força de atrito que 2 exerce em 1 ( $f_{c21}$ ): ←  
 • Força de atrito que 1 exerce em 2 ( $f_{c12}$ ): → (a única força horizontal agindo em 2).

Assim, o bloco 2 move-se para a direita em relação à mesa ( $v_{2M}$ ), por ação da força de atrito ( $f_{c12}$ ), também orientada para a direita, e que, portanto, tem o **mesmo sentido** deste movimento! Aliás  $f_{c12}$  é a única força horizontal que age no bloco 2!

Esta força é oposta, sim, como deveria, ao movimento de 2 relativamente a 1, pois a velocidade relativa de escorregamento de 2 em relação a 1 ( $v_{21}$ ), é para a esquerda.

No caso do bloco 1,  $f_{c21}$  (orientada para a esquerda) se opõe, também como deveria, à velocidade relativa de escorregamento de 1 em relação a 2 ( $v_{12}$ ), velocidade esta que, nesta situação, tem o mesmo sentido da velocidade do bloco em relação à mesa ( $v_{1M}$ ).

Conclui-se, portanto, que uma força de atrito cinético, apesar da sua característica “**passiva**” (ela não pode, por si só, produzir movimento), pode ser a responsável pelo movimento de um sólido e, assim, desempenhar o papel de “**motor**” do movimento, agindo no mesmo sentido deste.

No caso do corpo que se move, por ação de uma força aplicada **F**, sobre uma superfície fixa (caso de um bloco sobre uma mesa), a força de atrito se opõe

sim, e também, à velocidade relativa de escorregamento do bloco em relação à mesa, que, nesta situação, é a “única” velocidade do bloco (para os referenciais considerados), visto que a mesa está em repouso (relação 1).

### III.1.2. Atrito estático

Podemos dizer que existe atrito estático entre dois sólidos em contato, quando a velocidade relativa de escorregamento é nula para cada superfície em contato e, desde que, uma força exterior (ou a resultante das forças exteriores ou dos torques) esteja aplicada ao sistema.

Se esta última condição não for satisfeita, não podemos formalmente falar de atrito, pois a resultante das ações de contato será, então, normal a cada superfície em contato, o que implicaria que as componentes tangenciais desta resultante (as forças de atrito estático) seriam nulas.

Consideremos novamente os dois sólidos  $S_1$  e  $S_2$ , em contato.

#### a. Velocidade relativa de escorregamento

Como a velocidade relativa de escorregamento no contato, é nula, as superfícies estão em repouso relativo do ponto de vista do (não) escorregamento:  $v_{12} = v_{21} = 0$ .

#### b. Sentido das força de atrito estático ( $f_e$ )

As leis do atrito estático concernem também, tal como no cinético, as componentes normal (**N**) e tangencial (força de atrito estático  $f_e$ ) da reação que cada sólido exerce sobre o outro, ao nível do contato.

O sentido das forças de atrito estático não pode ser definido em relação a uma velocidade relativa de escorregamento, pois esta é nula.

Podemos simplesmente afirmar, do ponto de vista **qualitativo**, que as forças de atrito estático opor-se-ão **sempre** à possível ou eventual velocidade relativa de escorregamento no contato, que cada superfície teria, uma em relação à outra, na ausência de atrito (isto é, se o atrito entre as superfícies fosse nulo).

#### c. Comentários

O acima exposto, significa que para conhecermos o sentido destas forças, precisamos conseguir prever para qual sentido tenderia o **movimento relativo de escorregamento** dos corpos, no contato, **se o atrito** entre as superfícies em contato, **fosse nulo**.

A exigência do atrito nulo entre as superfícies de contato, se faz necessária, pois queremos estudar qualitativamente a tendência do movimento relativo de escorregamento dos corpos, no contato: para estudar este escorregamento, é preciso fazer o sólido escorregar e tentar isolar o escorregamento dos outros eventuais movimentos.

Como o sólido não escorrega porque o atrito é estático, basta suprimir o atrito para que ele deslize, sendo assim possível isolar o escorregamento dos outros movimentos combinados (caso do rolamento sem escorregamento: movimento de rotação + translação). Isolando o escorregamento, não existirão senão as tensões locais, no contato, devido a este escorregamento. O problema é simplificado e podem-se então estudar os efeitos sobre o sólido, devidos exclusivamente a este movimento.

Existem situações físicas, para as quais é fácil prever qualitativamente o sentido do possível movimento relativo de escorregamento que se produziria na ausência de atrito e, portanto, deduzir daí, o sentido da força de atrito estático em estudo.

Por exemplo, um bloco em equilíbrio ou uma esfera, rolando sem escorregar, num plano inclinado: no caso do bloco em equilíbrio no plano inclinado, é evidente que na ausência de atrito entre o bloco e o plano inclinado, aquele escorregaria plano abaixo, pela ação da componente do peso na direção do movimento; no caso da esfera, na ausência de atrito, não é difícil perceber que ela escorregaria sem rolar, plano abaixo, também pela ação da componente peso na direção do movimento, pois o torque resultante é nulo (a linha de ação da normal passa pelo centro de massa e considerando o peso da esfera aplicado no centro de massa): logo, a força de atrito estático que se exerce, respectivamente, na esfera e no bloco, opor-se-ia ao eventual movimento de escorregamento destes objetos, na ausência de atrito e, teria portanto, o sentido ascendente no plano.

Note-se aqui, que se o atrito não for considerado nulo, o movimento de deslizamento da esfera não seria isolado, portanto, não seria possível conhecer a tendência do eventual movimento relativo de escorregamento, no contato; é sempre e, somente, este movimento que está em causa!

Observe-se ainda que, no caso da esfera, o sentido do eventual movimento de escorregamento que se produziria, na ausência de atrito, coincide com o sentido do movimento de translação do centro de massa do sólido, que rola sem escorregar. Assim, a força de atrito estático se opõe, aqui e também, ao sentido do movimento do centro de massa da esfera.

Este resultado não pode, **absolutamente**, ser generalizado! Efetivamente, existem inúmeras situações físicas, para as quais, as forças de atrito estático têm o mesmo sentido do movimento do centro de massa do sólido estudado, como no caso das rodas motrizes de um carro, que veremos mais adiante.

Entretanto, também existem inúmeras situações, para as quais esta previsão qualitativa simplesmente não nos é possível: somos então obrigados a recorrer às equações dinâmicas apropriadas ao problema em questão, considerando inicialmente um sentido ar-

bitrário para as forças de atrito estático, para que o sentido destas forças seja determinado através das equações aplicadas.

Por exemplo: uma esfera (ou um cilindro) de raio  $R$ , rolando sem escorregar, sobre uma superfície horizontal, sob a ação de uma força externa horizontal constante, aplicada a uma distância  $H$ , qualquer, da superfície horizontal. Basta variar o ponto de aplicação da força (o que significa variar a distância  $H$  de determinados valores) para que a força de atrito estático exercida sobre a superfície de contato da esfera com o plano horizontal, mude de sentido, sem que o sentido da rotação seja mudado.

Supondo inicialmente um sentido arbitrário para a força de atrito, considerando que a velocidade relativa de escorregamento no contato é nula e aplicando as equações dinâmicas ao sólido, no referencial ligado à superfície horizontal, mostra-se<sup>5</sup> no caso da esfera, que: para  $H < 7R/5$ , a força de atrito estático tem o sentido oposto ao movimento de translação do centro de massa da esfera, para  $H > 7R/5$ , esta força tem o mesmo sentido do movimento do centro de massa e que, para  $H = 7R/5$ , a mesma força torna-se nula e a esfera continua a rolar sem escorregar.

É portanto impossível prever qualitativamente, neste tipo de situações, qual seria o sentido do possível movimento de escorregamento na ausência de atrito para cada valor de  $H$ : o momento de inércia varia de sólido para sólido e o torque varia, no mesmo sólido, consoante o valor de  $H$  (que corresponde aos diferentes pontos de aplicação da força exercida), o que implica o recurso indispensável à resolução quantitativa.

Qualitativamente, é apenas possível prever que o sentido da força de atrito estático deverá mudar, já que as condições dinâmicas iniciais mudam, pois esta força não depende senão do conjunto de forças aplicadas.

Quando um sólido tem um movimento não nulo (de rotação ou de translação) num dado referencial<sup>6</sup>, com uma velocidade relativa de escorregamento nula (caso do rolamento sem escorregamento ou de, por exemplo, o movimento de translação de dois blocos solidários, colocados um em cima do outro), o sentido das forças de atrito estático não pode, pois, ser determinado a partir do sentido deste movimento efetivo: é o **possível** ou **eventual** movimento **relativo de escorregamento** de uma superfície de contato sobre a outra, na **ausência de atrito**, que determinará o sentido desta força, o qual, como vimos, nem sempre pode ser previsto qualitativamente.

Assim, podemos perfeitamente ter uma força de atrito estático que tenha o mesmo sentido do movimento efetivo do sólido estudado.

Um dos exemplos mais clássicos é o “caminhar”: quando andamos para a frente, a força de atrito estático

<sup>5</sup>Solução em Anexo.

<sup>6</sup>Movimento que passaremos a chamar de movimento efetivo ou movimento dado (seria o movimento que aparece nesse referencial).

que o chão exerce sobre os nossos pés é do mesmo sentido que o nosso caminhar (no caso, para a frente) e de sentido contrário, como deveria, ao eventual movimento relativo de escorregamento, na ausência de atrito (para trás) dos nossos pés sobre o assoalho. Neste sentido, a força de atrito estático pode desempenhar também o papel de força “**motriz**” do movimento, apesar do seu caráter “**passivo**”, tal como a força de atrito cinético.

O exemplo da esfera, visto anteriormente, ilustra também que, para valores de  $H > 7R/5$ , a força de atrito não só tem o mesmo sentido do movimento “efetivo” do sólido, como também tem o mesmo sentido da força horizontal aplicada  $\mathbf{F}$ .

Este mesmo exemplo da esfera coloca ainda em evidência um outro aspecto importante das propriedades do atrito estático, qual seja, a característica destas forças de atrito **ajustarem-se** ou **adaptarem-se** (em módulo e sentido) às condições dinâmicas existentes nas diferentes situações físicas estudadas, segundo as tensões locais a nível do contato: para uma dada situação física, o módulo e o sentido das forças de atrito estático **depende exclusivamente das forças em jogo**.

Assim, para o mesmo sólido sobre a mesma superfície de contato, o módulo destas forças pode variar de zero até um valor máximo ( $f_e \text{ máx}$ ) dependendo da intensidade da resultante das forças aplicadas e o sentido também pode variar, dependendo do ponto de aplicação da resultante das forças aplicadas ou do torque resultante produzido (como no caso da esfera).

Um exemplo típico que pode também ilustrar esta característica de “adaptabilidade” ou de “ajustamento”, no que diz respeito ao sentido das forças de atrito estático, é o das rodas de um carro (supondo que o carro não “patine”): se as rodas dianteiras são as motrizes, a força de atrito estático que o chão exerce nos pneus dianteiros é dirigida no sentido do movimento da translação do carro, enquanto que a força de atrito exercida sobre os pneus traseiros, é dirigida no sentido contrário a este movimento de translação.

O “balanço” das forças aplicadas não é o mesmo nas duas rodas, o que implicou sentidos diferentes para a força de atrito que o solo exerce sobre cada uma.

No caso das rodas motrizes, o torque motor impõe às rodas um certo sentido de rotação (sentido horário, por exemplo); na ausência de atrito, as rodas “patinariam” sobre o solo e o sentido das forças de atrito estático exercido sobre elas terá então sentido contrário a este movimento de escorregamento, portanto, para a direita e, neste caso, no mesmo sentido do movimento de avanço do carro.

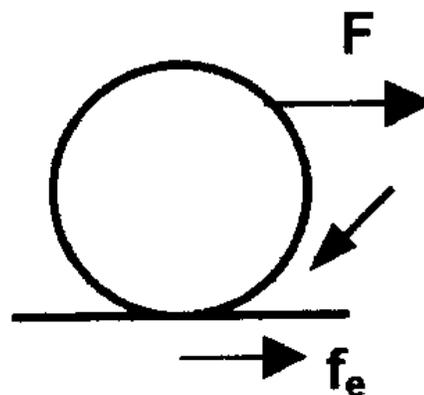
No caso das rodas traseiras (aqui consideradas, não motrizes), elas são apenas “carregadas” pelo conjunto e funcionam como se o carro estivesse em “pane” e fosse necessário empurrá-lo, aplicando-lhe uma força horizontal: na ausência de atrito, o sentido do possível movimento de escorregamento das rodas em relação ao

solo seria o mesmo daquele do avanço do carro, uma vez que as rodas deslizariam sem rodar. Assim, o sentido da força de atrito estático seria contrário a este possível ou eventual movimento, isto é, para “trás” e portanto, neste caso, contrário também ao sentido do movimento de translação do carro.

Nas duas situações, o movimento de translação do carro e da rotação das rodas é idêntico, mas as condições dinâmicas iniciais mudaram: as tensões locais a nível do contato são, portanto, muito diferentes, de uma situação à outra.

Note-se que é bastante freqüente, mas muito perigoso, tentar-se descobrir a “tendência do movimento” através do seguinte modo de raciocínio:

Consideremos a esfera abaixo, rolando sem escorregar, sob a ação da força externa horizontal  $\mathbf{F}$ :



Como a esfera roda no sentido horário, isto é, para a “direita”, ela “empurraria” o solo para a esquerda e a força de atrito, opondo-se a este “movimento”, seria orientada para a direita e vice-versa se a esfera rolasse para a esquerda.

Nesta ótica, a força de atrito opor-se-ia sempre ao sentido da rotação dos sólidos, no contato, o que, como acabamos de ver, **não “funciona”** para diversas situações físicas: a força de atrito estático **não** é determinada pelo sentido dos movimentos efetivos dos sólidos, quer se considere o sentido do movimento de rotação ou o sentido do movimento de translação do centro de massa.

Comparando “grosso modo” as características gerais das forças de atrito estático e cinético, podemos dizer que, *a priori*, as forças de atrito estático são desconhecidas, em módulo e sentido, diferentemente do que ocorre com as forças de atrito cinético, estas perfeitamente definidas, tanto em módulo, como em sentido.

## IV Conclusão

Comparando o ponto de vista dos estudantes com aquele da física, parece que não pode existir nenhuma dúvida em admitir que aliar a noção de

velocidade relativa de escorregamento das superfícies em contato ao estudo do atrito cinético, assim como a de possível ou eventual velocidade relativa de escorregamento destas superfícies, que existiria na ausência de atrito, ao estudo do atrito estático, é bastante importante, não só para determinar o sentido das respectivas forças de atrito, como também, para que seja acessível à compreensão das “sutilezas” deste fenômeno.

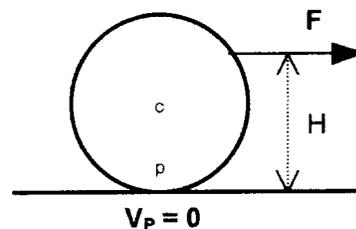
Quando se introduz o aluno ao mundo em que ele vive, isto é, um mundo com atrito, as dificuldades com movimentos relativos e referenciais não parece um motivo “justo” para reduzir e simplificar este fenômeno a, apenas, um fenômeno “resistente”. Muito ao contrário, parece uma excelente oportunidade de rever estes movimentos, e de tentar que os alunos se dêem conta da necessidade de saber em que referencial um dado movimento é definido.

## References

- [1] H. Caldas e E. Saltiel, 1999. Le frottement statique: analyse des raisonnements des étudiants. Didaskalia: Recherches sur la communication et l'apprentissage des sciences et des techniques, n<sup>o</sup> 16 (in press).
- [2] H. Caldas e E. Saltiel, 1995. Le frottement cinétique: analyse des raisonnements des étudiants. Didaskalia: Recherches sur la communication et l'apprentissage des sciences et des techniques. (6):55-71.
- [3] J. Gersten, H. Soodak e M. S. Tiersten, 1992. American Journal of Physics, **60**(1): 43 (1992).
- [4] H. Gie e Y. Sarmant, 1985. *Mécanique*, volume 2. Collection Sciences Physiques. Lavoisier, Paris.
- [5] P. Provost e M. Joyal, 1972. *Mécanique*. Colection Joyal-Provost. Masson et Cie., Paris.
- [6] E. Saltiel, 1978. Concepts cinématiques et raisonnements naturels: étude et compréhension des changements de référentiels par les étudiants en sciences. Thèse d'état, Université Paris 7.
- [7] E. Shaw Donald, American Journal os Physics, **47** (10): 887 (1979).
- [8] S. Strelkov, 1978. *Mécanique*. Editions Mir, Moscou.
- [9] L. Viennot, 1979. *Le raisonnement spontané en dynamique élémentaire*. Hermann, Paris.

## Anexo

### Solução do problema da esfera rolando sem escorregar



A velocidade de  $P$ , em função da velocidade de  $C$ , sendo  $R$  o raio da esfera, é dada por:

$$\mathbf{V}_P = \mathbf{V}_C + \omega \wedge \bar{CP}$$

onde  $\mathbf{V}_C$  é a velocidade do centro de massa  $C$  do sólido,  $V_P$  é a velocidade do seu ponto de contato  $P$  com a superfície horizontal e  $\bar{\omega}$  é a velocidade angular de rotação.

Como a esfera rola sem escorregar sobre a superfície horizontal,  $\mathbf{V}_P = 0$  e o atrito entre a esfera e o plano de contato é, pois, estático.

Assim,  $V_c = \omega R$  e  $a_c = \alpha R$ , onde  $\alpha$  é a aceleração angular de rotação da esfera.

Suponhamos que o sentido da força de atrito estático ( $f_e$ ), exercida sobre a esfera pela superfície horizontal, seja orientada para a **esquerda**. As equações dinâmicas aplicadas ao sólido, cuja massa é  $m$ , no referencial ligado à superfície horizontal, seriam:

$$F - f_e = ma_c \quad (1)$$

$$F(H - R) + f_e R = I\alpha = 2mR^2\alpha/5 \quad (2)$$

onde  $I$  é o momento de inércia da esfera de massa  $m$ , em relação ao eixo de rotação que passa por  $C$ . Das equações (1) e (2), com  $a_c = \alpha R$ , obtém-se a seguinte expressão:

$$f_e = F(1 - 5H/7R) \quad (3)$$

Três casos se apresentam:

a) Se  $H = 7R/5$ , então  $f_e = 0$  e a esfera rola sem escorregar, com atrito nulo.

b) Se  $H > 7R/5$ , então  $f_e < 0$ , isto é, orientada para a direita. A esfera rola sem escorregar e a força de atrito estático tem o mesmo sentido do movimento do centro de massa da esfera:

Sentido de  $f_e$  :  $\rightarrow$

Sentido do movimento do c.m.:  $\rightarrow$

Sentido da rotação: **horário**

c) Se  $H < 7R/5$ , então  $f_e > 0$ , isto é, orientada para a esquerda. A esfera rola sem escorregar e a força de atrito estático tem sentido oposto ao movimento do centro de massa da esfera:

Sentido de  $f_e$  : ←

Sentido do movimento do c.m.: →

Sentido da rotação: **horário**

Obs: Determinando-se o possível ou eventual movimento de escorregamento relativo que se produziria,

na ausência de atrito, pode-se verificar que a força de atrito estático opõe-se sempre, ao sentido deste eventual movimento: se o atrito entre a esfera e a superfície horizontal é nulo, basta tomar as mesmas equações (1) e (2), com  $f_e = 0$ , e estudar o que ocorre quando  $(a_c/\alpha R)$  for maior, menor ou igual a 1.

Assim, de (1) e (2), com  $f_e = 0$ , obtém-se:  $a_c/\alpha R = 2R/5(H - R)$

Por exemplo, se  $(a_c/\alpha R) = 1$ , então  $a_c = \alpha R$ ,  $V_p = 0$  e  $H = 7R/5 \Rightarrow$  a esfera não escorrega: não existe, portanto, o eventual movimento de escorregamento na ausência de atrito (caso a).