Correção ao Teorema de Stevin Devido à Rotação do Planeta

(Corrections to the Stevin theorem due to planet rotation)

Adson Santos de Oliveira e A. E. A. Amorim
Departamento de Navegação Fluvial
Faculdade de Tecnologia de Jahu
Rua Frei Galvão s/n, 17212-650, Jahu, SP

Recebido em 5 de julho, 1998

Neste trabalho analisamos a contribuição ao cálculo da pressão do mar devido à rotação do planeta, considerando dois modelos. A contribuição, em ambos os modelos para a pressão é da ordem de 0.35%.

In this paper we analyse the contribution to the sea pressure due to planet rotation, considering two models. In both models, the contribution to the pressure is 0.35%.

I Introdução

Nos cursos introdutórios de física, um assunto interessante e pouco explorado em mecânica dos fluídos trata sobre a rotação de líquidos. Geralmente analisa-se o caso de um recipiente cilíndrico parcialmente cheio de água girando com velocidade angular constante [1,2].

Contudo um aspecto interessante e que chama bastante a atenção do aluno aborda o cálculo da pressão da água do mar, a uma profundidade h. O teorema de Stevin, que relaciona a pressão exercida pela água com a profundidade, é valido para o caso onde o sistema não está acelerado. Naturalmente, a água do mar gira com a mesma velocidade angular média de rotação do planeta Terra, $\omega = 7.29 \times 10^{-5}$ rad/s e forças decorrentes deste movimento aparecem no sistema. Desta forma, a questão a saber é qual a correção necessária ao teorema de Stevin que leva em conta este efeito.

Este trabalho está organizado como segue: seção II discutimos as forças atuantes sobre o mar, considerando a aceleração da gravidade constante e o planeta esférico e deduzimos um termo adicional ao teorema de Stevin que leva em conta os efeitos de rotação do planeta. Na seção III calculamos a correção ao teorema de Stevin para o caso em que o planeta é oblongo. Na seção IV apresentamos os principais resultados deste trabalho.

II Planeta esférico

Para o estudo deste problema iremos considerar um elemento de volume dV situado no interior do líquido de massa específica constante ρ a uma distância r do centro do planeta. Este elemento gira com a mesma velocidade angular do planeta. Numa primeira aproximação, iremos considerar a Terra como perfeitamente esférica e o líquido homogêneo.

Estas considerações simplificam os cálculos, como iremos ver mais adiante. Desta forma, devido à simetria do sistema, é conveniente escrevermos as forças que atuam sobre o sistema em coordenadas esféricas [3].

Considerando o sistema de referência no centro do planeta e em repouso, temos que o empuxo que o líquido exerce sobre este elemento, em coordenadas esféricas, é

$$d\vec{E} = -\vec{\nabla} p dV = -\left(\frac{\partial p}{\partial r}\vec{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}\vec{\theta} + \frac{1}{r\,\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial \phi}\vec{\phi} \right) dV, \tag{1}$$

onde $\vec{r}$, $\vec{\theta}$ e $\vec{\phi}$ são os vetores unitários ortogonais, como mostrado na Fig. 1. Se considerarmos a camada de água do planeta muito pequena em relação ao raio do planeta $R = 6.378 \times 10^6$ m, é razoáavel considerarmos a aceleração da gravidade constante em toda a extensão da camada. Chamamos a atenção que, para um cálculo realista, seria importante levarmos em conta o efeito atrativo devido a toda a matéria distribuída pelo planeta, necessitando assim conhecer como a matéria se distribui no planeta. Como uma primeira aproximação, iremos desconsiderar tal efeito tomando o planeta como homogêneo de forma que a força gravitacional total que o planeta exerce sobre o elemento é o próprio peso do elemento,

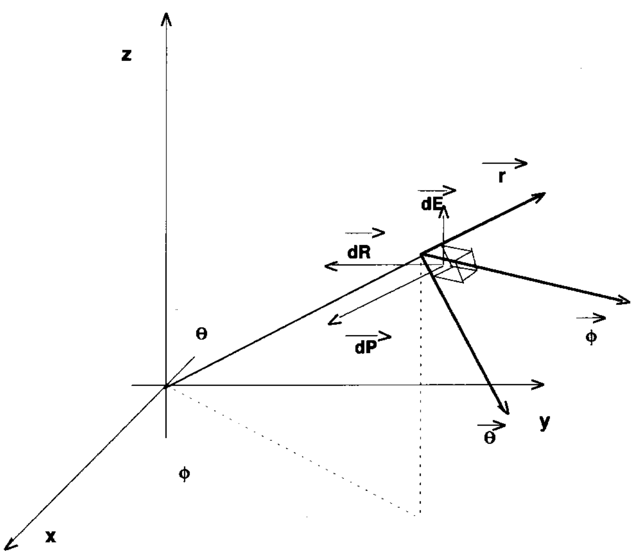

Figura 1: Representação dos vetores ortogonais em coordenadas esféricas e das forças que atuam sobre o elemento.

$$d\vec{P} = -\rho dV g \vec{r}\ , \tag{2}$$

onde g é a aceleração da gravidade padrão ($g = 9.80665$ m/s^2).

Pela segunda lei de Newton, temos que a força resultante é

$$d\vec{R} = d\vec{P} + d\vec{E}, \tag{3}$$

onde a resultante é a força centrípeta dada por

$$d\vec{R} = -\rho dV \omega^2 r \left(\sin^2\theta \vec{r} + \frac{\sin 2\theta}{2} \vec{\theta} \right). \tag{4}$$

Sobre a superfície do planeta consideraremos que a pressão atmosférica é constante, de forma que temos a condição de contorno

$$p = p_0, \quad r = R. \tag{5}$$

Substituindo as Eqs. (1), (2), (4) e a condição de contorno na Eq. (3), temos as seguintes equações oriundas de cada componente

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho\omega^2 r \sin^2\theta - pg, \tag{6}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = \rho\omega^2 (r^2 - R^2) \frac{\sin 2\theta}{2}, \tag{7}$$

e

$$\frac{\partial p}{\partial \phi} = 0. \tag{8}$$

Da última equação notamos que a pressão é constante independente da longitude ϕ. Definindo a profundidade $h = R - r$ e resolvendo as equações diferenciais obtemos

$$p = p_0 + \rho g h - \rho\omega^2 (2Rh - h^2) \sin^2\theta, \tag{9}$$

onde p_0 é a pressão atmosférica. Se a camada de água for muito pequena em comparação ao raio do planeta, $h/R << 1$, então retendo termos até a primeira ordem de h, obtemos

$$p \approx p_0 + \rho g h - \rho\omega^2 h R \sin^2\theta. \tag{10}$$

A equação acima é válida para $h/R << 1$ e para o caso em que a aceleração da gravidade é constante sobre a superfície do planeta. Os dois primeiros termos do lado direito da equação são provenientes do teorema de Stevin para o caso estático e o termo seguinte é a correção devido à rotação do planeta. Note que a medida que caminhamos na direção dos pólos ($\theta \to 0$), a pressão aumenta. Este fato está ligado com a rotação do planeta. Quanto maior for a sua rotação, menor será a pressão na linha do Equador. Note também que se a rotação do planeta for

$$\omega_c = \sqrt{\frac{g}{R}} \approx 1.24 \times 10^{-3} \text{rad/s}, \tag{11}$$

a pressão da água do mar na linha do Equador seria constante independendo da profundidade considerada.

III Planeta oblongo

Na seção II tomamos algumas considerações que não refletem a realidade dos fatos. Como a dinâmica do sistema é afetada pela rotação do planeta, a própria aceleração da gravidade deve refletir esta dependência. Além disto, o planeta não apresenta o formato esférico e isto reflete-s e na aceleração da gravidade na superfície do planeta. Contudo iremos considerar o planeta homogêneo.

A fórmula internacional da gravidade em qualquer ponto da superfície da Terra é

$$g = g_0(1 + 0.0052844\cos^2\theta - 0.0000059\sin^2 2\theta), \quad (12)$$

onde $g_0 = 9.78049$ m/s^2 [4]. Considerando que a força gravitacional de um objeto situado na superfície do planeta é igual à sua força peso, temos uma relação que expressa o raio da Terra em relação ao angulo θ,

$$R = \sqrt{\frac{GM}{g_0(1 + 0.0052844\cos^2\theta - 0.0000059\sin^2 2\theta)}}, \quad (13)$$

onde G é a constante gravitacional ($G = 6.67259 \times 10^{-11}$ m^{3}kg^{-1}s^{-2}) e M é a massa da Terra ($M = 5.98 \times 10^{24}$ kg).

A força peso do elemento

$$d\vec{P} = -\rho dV \frac{GM}{r^2}\vec{r}, \quad (14)$$

e a condição de contorno se escreve

$$p = p_0 \quad r = R(\theta). \quad (15)$$

Substituindo as Eqs. (4), (14), (1), (15) na Eq. (3), obtemos

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\rho\frac{GM}{r^2} + \rho\omega^2 r\sin^2\theta, \quad (16)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = -\rho\omega^2(r^2 - R^2)\frac{\sin 2\theta}{2}, \quad (17)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \phi} = 0. \quad (18)$$

Resolvendo as equações, obtemos

$$p = p_0 - \rho GM\frac{r-R}{rR}\frac{r-R}{rR}\frac{\rho\omega^2(\sin^2\theta)}{2}(r^2 - R^2).$$

Para pequenas camadas de água, expandimos a equação acima retendo termos até a primeira ordem de h e obtemos

$$p \approx p_0 + \rho GM\frac{h}{R^2} - \rho = \omega^2 hR(\sin^2\theta). \quad (19)$$

Substituindo a Eq. (13) na equação acima, obtemos

$$\begin{aligned} p &\approx p_0 + \rho g_0(1 + 0.0052844\cos^2\theta - 0.0000059\sin^2 2\theta)h, \\ &-\rho\omega^2 h\sqrt{\frac{GM}{g_0(1 + 0.0052844\cos^2\theta - 0.0000059\sin^2 2\theta)}}(\sin^2\theta). \end{aligned} \quad (20)$$

Observe que o segundo termo no lado direito da equação é a correção devido ao achatamento da Terra nos pólos enquanto que o último termo é a correção devido a rotação do planeta.

IV Conclusões

Neste trabalho foram feitas duas análises para determinar a pressão da água do mar. No primeiro caso consideramos o planeta esférico e a aceleração da gravidade constante na superfície do planeta. No outro caso consideramos tanto o raio da Terra como a aceleração da gravidade na superfície do planeta dependentes da posição relativa ao pólo. Em ambos os tratamentos consideramos o planeta homogêneo.

Na Fig. 2 analisamos as contribuições devidos as formas do planeta para o cálculo da pressão hidrostática. Pelo fato do planeta ser achatado nos pólos, a força gravitacional é maior, implicando em um acréscimo na pressão em torno de 25 Pa/m em comparação ao cálculo em que utilizamos um planeta esférico. Da mesma forma, observamos um decréscimo de 25 Pa/m na linha do Equador. Notamos que para $\theta = 45°$, ambos os tratamentos fornecem a mesma contribuição, isto porque nesta posição as acelerações da gravidade de cada tratamento são as mesmas.

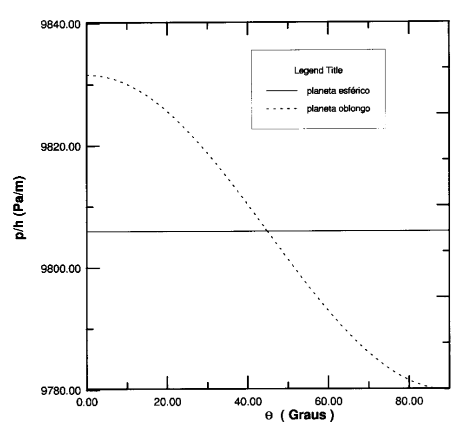

Figura 2. Comparação entre os cálculos da pressão hidrostática considerando a Terra esférica (linha cheia) e oblongo (linha tracejada). Os valores são os mesmos para $\theta = 45°$.

Na Fig. 3 estudamos a diferença de resultados entre os tratamentos efetuados considerando a Terra esférica e com a mesma aceleração da gravidade na superfície e com o modelo na qual a Terra é oblonga e, consequentemente a aceleração da gravidade na superfície do planeta depende da inclinação. Ambos os tratamentos fornecem resultados muito próximos, cuja diferença de valores é da ordem de 10^{-2} Pa/m. A contribuição a pressão da água do mar, devido a rotação da Terra é da ordem de 33.90 Pa/m, o que corresponde uma correção aproximada de 0.35%.

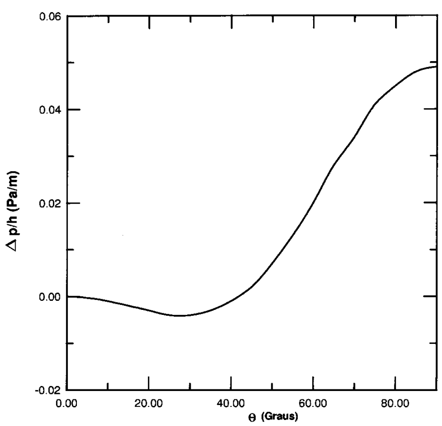

Figura 3. Diferença entre as contribuições devido ao movimento de rotação da Terra para os dois modelos.

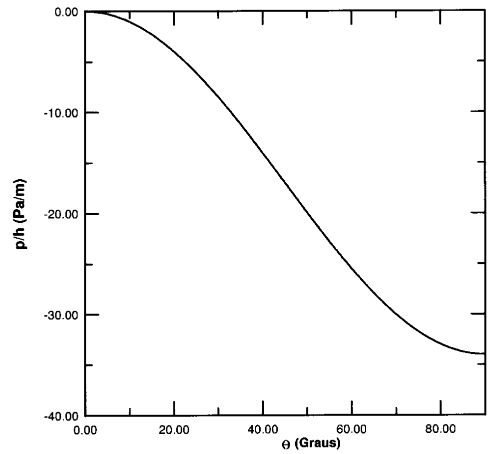

Figura 4: Contribuição do termo devido a rotação do planeta para a pressão total do líquido.

A correção à pressão do líquido devido ao movimento de rotação do planeta depende quadraticamente de sua velocidade angular. A contribuição devido ao movimento de rotação do planeta é mais significativa se a rotação do planeta for maior.

References

[1] J. P. Rino e C. Mendonca, Rev. Bras. Ens. Fís. **19**, 369 (1997).

[2] Pierre Lucie, *Física Básica, Mecânica 2*, Ed. Campus, 1980.

[3] Murray R. Spiegel, *Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas*, Coleção Schaum, Ed. McGraw-Hill, Trad. Roberto Chioccarello.

[4] Enciclopédia Mirador Internacional, Gravimetria.