

O Guia de Onda Via Potenciais

The wave guide through the potentials

G. F. Leal Ferreira

FCM-Instituto de Física de São Carlos- USP

C.P. 369, 13560-970 - São Carlos, SP

Recebido em 11 de novembro, 1998

O estudo do guia de onda é realizado através dos potenciais. Além de incomparavelmente mais simples, já que só o potencial vetor joga papel decisivo no encaminhamento da solução, o estudo é também mais físico pelo fato da direção das correntes nas paredes do guia sugerir diretamente os modos longitudinais e transversais. Ocorre que os primeiros, que correspondem aos modos conhecidos como TM, são gerados no calibre de Lorentz (em que os potenciais são retardados em relação a suas fontes), enquanto que os segundos, correspondendo aos modos TE, em calibre de divergência nula. É possível porém reobtm-los no mais físico calibre de Lorentz. Faz-se uma pequena discussão sobre a relevância dos conceitos de potencial em comparação com os de campo elétrico e magnético.

The study of wave guides is carried out through the potentials. By far simpler, owing to the predominant role displayed by the vector potential in the solution, the study has in addition the advantage of being more physical in the sense of separating the modes of the guide, longitudinal and transverse, directly from the orientation of the currents along the walls of the guide. It so happens that the longitudinal modes, which correspond to the as known TM modes, are generated in Lorentz gauge (retarded potentials), while the transverse ones, corresponding to TE modes, arise in a gauge of null divergence. Nevertheless it is possible to recover the potentials in the more physical Lorentz gauge. A short discussion on the relevance of the potentials as compared with the fields is also carried out.

I Introdução

Neste trabalho apresentamos o estudo do guia de ondas por meio dos potenciais, vetor e escalar. Como, pela condição de Lorentz, o potencial escalar vai ser deduzido do potencial vetor, a solução é muito mais simples do que aquela usualmente apresentada por meio dos campos elétrico e magnético. E não somente mais simples como também mais física no sentido de se chegar aos modos longitudinais e transversais de uma maneira direta pela relação existente entre a corrente e o potencial vetor: as correntes nas paredes do guia estão ou na direção do guia (modo A longitudinal, AL, que corresponde ao modo TM), ou perpendicular à direção do guia (modo A transversal, AT, correspondendo ao modo TE). A solução do modo AL é conseguida no calibre de Lorentz em que os potenciais são retardados. Já a do modo AT, se realiza no calibre em que a divergência do potencial vetor é nula, (aliás, como a abordagem das ondas livres no calibre de Coulomb) mas da qual podemos obter a solução mais física no calibre de Lorentz. Os resultados são ilustrados com o auxílio do guia retangular. Alguns comentários sobre o conteúdo físico dos potenciais são feitos no fim do artigo. No que segue

a superfície metálica interna do guia será designada de parede e o seu interior às vezes de 'cavidade'.

II Condições de contorno dos potenciais nas paredes do guia no calibre de Lorentz

Seja \vec{S} ponto da superfície metálica (condutor perfeito) do guia e \hat{n} o versor da normal neste ponto orientado para dentro da cavidade. Designando pelo índice i os pontos na vizinhança de \vec{S} pertencentes à cavidade e pelo índice e os pertencentes ao metal, o potencial escalar U e as componentes A_j , $j = 1, 2, 3$, do potencial vetor, porque potenciais, satisfazem as condições

$$U(\vec{S}_i) = U(\vec{S}_e) \quad (1)$$

$$A_j(\vec{S}_i) = A_j(\vec{S}_e) \quad (2)$$

$$-\frac{\partial U(\vec{S}_i)}{\partial n} + \frac{\partial U(\vec{S}_e)}{\partial n} = 4\pi\sigma(\vec{S}) \quad (3)$$

$$-\frac{\partial A_j(\vec{S}_i)}{\partial n} + \frac{\partial A_j(\vec{S}_e)}{\partial n} = \frac{4\pi}{c} J_j(\vec{S}) \quad (4)$$

em que σ significa densidade superficial de carga, \vec{J} densidade de corrente superficial e c a velocidade da luz. As Eqs. (1)-(4) valem no calibre de Lorentz em que os potenciais são retardados e nos quais vamos afinal impor a condição dos mesmos se anularem no metal (pontos \vec{S}_e), simplificando o lado esquerdo das Eqs. (1)-(4). Em geral, os potenciais estão interrelacionados pela condição de Lorentz

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial U}{\partial t} = 0 \quad (5)$$

Em outro calibre, parte da ação do potencial escalar é jogada no potencial vetor e assim a Eq. (3) deixa de valer. Mas a Eq. (4) para a derivada normal do potencial vetor nas paredes relacionada às correntes permanece válida.

Os campos elétrico \vec{E} e magnético \vec{B} podem ser obtidos das relações usuais,

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla U \quad e \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \quad (6)$$

III O Modo AL (ou TM)

No modo AL as correntes e o potencial vetor se orientam ao longo do guia, que tomaremos na direção z . Na coordenada z a dependência será tomada como $e^{ik_g z}$ e o potencial vetor $\vec{A}_L(\vec{x}, t)$ será

$$\vec{A}_L(\vec{x}, t) = A_L(x, y) e^{i(k_g z - \omega t)} \hat{k}, \quad (7)$$

sendo $A_L(x, y)$ a amplitude, ω a frequência angular e \hat{k} o versor da direção ao longo do guia. k_g vai ser determinado a seguir. Usando-se essa expressão de $\vec{A}_L(\vec{x}, t)$ na equação de onda para o potencial vetor, chega-se a

$$\frac{\partial^2 A_L}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_L}{\partial y^2} + k_c^2 A_L = 0, \quad (8)$$

em que

$$k_c^2 = k_0^2 - k_g^2 \quad (9)$$

e

$$k_0 = \frac{\omega}{c}. \quad (10)$$

Estamos seguindo de perto a notação da Ref. 1.

O potencial escalar U_L é obtido das Eqs. (6) e (7), e omitindo-se a dependência temporal, é

$$U_L(\vec{x}) = \frac{k_g}{k_0} A_L(x, y) e^{ik_g z}. \quad (11)$$

Admitindo-se que os potenciais se anulem nas paredes do guia e nas partes metálicas a Eq. (8) determina as soluções, que para o guia retangular, de dimensões a e b , ver Fig. 1, é

$$A_L(x, y) = A_0 \text{sen } k_x x \text{ sen } k_y y \quad (12)$$

onde A_0 é constante e

$$k_x = \frac{n\pi x}{a}, \quad k_y = \frac{m\pi y}{b} \quad e \quad k_x^2 + k_y^2 = k_c^2, \quad (13)$$

com n e m inteiros. Com o uso das Eqs. (9) e (10) k_g fica determinado. A densidade de corrente superficial pode ser achada da Eq. (4) e daí, pela equação da continuidade, resulta a densidade superficial de carga, que alternativamente pode ser achada pelas Eqs. (11) e (3). Obtém-se, por exemplo, para a parede em $y = 0$

$$\sigma(x, 0) = \frac{A_0 k_y}{4\pi k_0} \text{sen } k_x x. \quad (14)$$

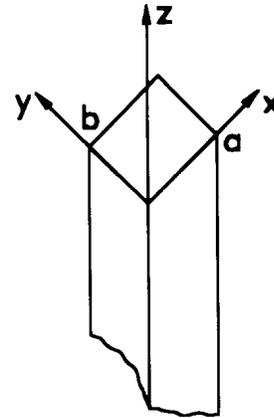


Figura 1. Corte transversal do guia retangular, que se desenvolve na direção z e com dimensões a e b respectivamente nas direções x e y .

As Eqs. (11) e (12) nos dizem que o potencial escalar realmente se anula sobre as paredes do guia como admitido pela condição de contorno. O fato do potencial escalar se anular nas paredes do guia é fisicamente aceitável já que a manipulação externa do guia não interfere em seu funcionamento. Note-se, porém, que a densidade superficial de carga não se anula aí, Eq. (14). Os campos elétrico \vec{E} e magnético \vec{B} são obtidos das Eqs. (6).

IV O Modo AT (ou TE)

No modo AT as correntes são perpendiculares à direção do guia, ou seja, na Fig. 2, têm a direção dos eixos x ou y conforme a parede considerada. Sendo \hat{i} e \hat{j} os versores destes eixos, temos então para o vetor potencial $\vec{A}_T(\vec{x}, t)$

$$\vec{A}_T(\vec{x}, t) = [A_{Tx}(x, y)\hat{i} + A_{Ty}(x, y)\hat{j}] e^{i(k_g z - \omega t)}. \quad (15)$$

Usando as componentes de \vec{A}_T em suas equações de onda temos

$$\frac{\partial^2 A_{Tx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_{Tx}}{\partial y^2} + k_c^2 A_{Tx} = 0, \quad (16)$$

e

$$\frac{\partial^2 A_{Ty}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_{Ty}}{\partial y^2} + k_c^2 A_{Ty} = 0, \quad (17)$$

Devemos agora introduzir uma relação entre as duas componentes do potencial vetor. Como foi dito na Introdução, esta será obtida da imposição de que sua divergência é nula, quando então o potencial vetor sozinho determina o campo elétrico 1) sendo o potencial escalar nulo pela Eq. (6) e (2) pela Eq. (5), que determina o campo elétrico. Pretendemos porém voltar ao mais físico calibre de Lorentz depois.

Impondo então que a divergência de \vec{A}_T se anula, vê-se que A_{Tx} e A_{Ty} satisfazendo esta condição e as Eq. (16) e (17), devem ser da seguinte forma, com A_1 constante,

$$A_{Tx} = A_1 k_y \cos k_x x \sin k_y y, \quad (18)$$

$$A_{Ty} = A_1 k_y \sin k_x x \cos k_y y, \quad (19)$$

em que k_x e k_y satisfazem as Eqs. (13). Para esta determinação é de ajuda o conhecimento da direção da corrente nas paredes. Por exemplo, na parede em $y = 0$, a corrente é obtida da derivada normal de A_{Tx} , Eq. (4), e sendo esta diferente de zero, A_{Tx} deve ter dependência em $\sin k_y y$ como na Eq. (18). De forma análoga para as demais paredes.

4.1 A solução no calibre de Lorentz

Tomemos de novo a parede em $y = 0$. Obtemos das Eqs. (18) e (19) as seguintes relações de interesse

$$A_{Tx}(x, 0) = 0, \quad (20)$$

$$\frac{\partial A_{Tx}(x, 0)}{\partial y} A_1 k_y^2 \cos k_x x, \quad (21)$$

$$A_{Ty}(x, 0) = -A_1 k_x \sin k_x x. \quad (22)$$

A Eq. (21) determina, pela Eq. (4) a densidade de corrente superficial enquanto que a Eq. (20) garante que esta componente do potencial vetor se anula sobre a parede. Já a Eq. (22) determina pela Eq. (5) o campo elétrico normal, que no calibre de Lorentz seria determinado pelo potencial escalar. Sendo este calibre aparentemente mais físico é interessante obter a solução nele. Sejam \vec{A}'_T e U'_T os novos potenciais. Sabemos que na mudança de calibre devemos por [1]

$$\vec{A}'_T = \nabla \chi, \quad (23)$$

sendo χ uma função escalar de \vec{x} e t . Devemos agora impor a condição de Lorentz, Eq. (5) à Eq. (23). Como no presente caso a divergência do potencial vetor de origem, \vec{A}_T , é nula, chega-se à seguinte relação entre χ e U'_T

$$\nabla^2 \chi = -\frac{1}{c} \frac{\partial U'_T}{\partial t} \quad (24)$$

Como podemos manusear o guia de onda externamente - repetindo argumentação anterior -, devemos por para U'_T a mesma expressão como no modo longitudinal AL, Eqs. 11 e 12, ou seja,

$$U'_T = C(\sin k_x x \sin k_y y) e^{ik_g z}, \quad (25)$$

em que C é uma constante a ser determinada, garantindo assim potencial escalar zero no guia. Achamos C obrigando que U'_T , Eq. (25), forneça o mesmo campo elétrico que a Eq. (22), pela Eq. (5) com U_T igual a zero. Obtém-se

$$C = \frac{ik_x k_0 A_1}{k_y}. \quad (26)$$

Usando-se agora a Eq. (24), χ pode ser determinado obtendo-se

$$\chi = \frac{k_0^2 k_x A_1}{k_c^2 k_y} (\sin k_x x \sin k_y y) e^{ik_g z} \quad (27)$$

e pela Eq. (23) o novo potencial vetor \vec{A}'_T pode ser achado. Note-se que o novo potencial vetor \vec{A}'_T não é puramente transversal devido à dependência em z de χ .

V Campos e potenciais

Como observado por Feynman [2], a natureza é pródiga em deixar-se expressar de variadas maneiras. No Eletromagnetismo podemos escolher a ação direta entre as cargas (mesmo que retardada) ou campos. Neste último caso ainda podemos escolher entre os campos elétrico e magnético e os potenciais vetor e escalar. A literatura de longe favorece a descrição pelos campos, (os entes, 'beables', de acordo com J.S. Bell [3]) certamente pelo prestígio que as Equações de Maxwell gozam. Sem querer levar a discussão muito longe daremos algumas razões tiradas do eletromagnetismo prático, pelas quais se conclui que a descrição pelos potenciais é mais consistente. Não é que os campos não tenham sentido físico (como não se agem sobre cargas e correntes?) mas que os potenciais são mais fundamentais. Deixaremos de mencionar razões que derivam de fenômenos quânticos, assunto amplamente discutido na Ref. [4] (efeito Aharonov-Bohm). A primeira delas está ilustrada na Fig. 2: um solenóide toroidal (de enrolamento supostamente compacto) e a espira ES em torno do mesmo (montagem conhecida como a do 'anel de Rowland'). Sabidamente não há campo magnético no exterior do solenóide, mesmo que a corrente nele seja dependente do tempo, como ocorre ao fecharmos a chave S, ou se usássemos no solenóide corrente alternada. E, portanto, não haverá campo elétrico de indução no seu exterior. Apesar disto, circula na espira, corrente que, numa descrição por campos (isto é, por grandezas definidas em cada ponto do espaço e que propagam no tempo suas mudanças) só poderá ser atribuída à ação do campo elétrico gerado pelo potencial vetor, que não é nulo na região exterior ao solenóide. A segunda razão, cuja significância é usualmente ignorada, é que os potenciais são retardados e não os campos. Não há dúvida que o retardo tem sentido físico. Adicionemos que a

Natureza nos provê de meios sensíveis aos potenciais: o metal, sensível ao potencial escalar e o supercondutor ao potencial vetor (ver Ref. [5] para argumentação deste ponto).

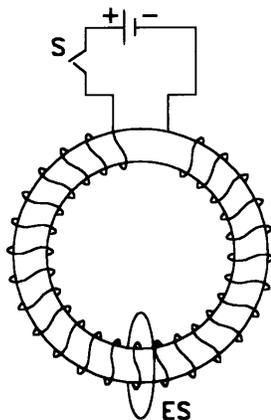


Figura 2. Ao se fechar a chave S , a corrente no solenóide induz corrente na espira ES (anel de Rowland) sem que haja campo elétrico no espaço exterior ao solenóide. Só o potencial vetor, que não é nulo aí, pode explicar o aparecimento da corrente em ES em termos de ‘campo’.

Notemos que o fato dos potenciais serem retardados a partir das suas fontes sugere relação física entre a fonte e o ponto considerado (como se houvesse a propagação de algo, é impossível não se pensar nisso) e não do ponto com o infinito, como a definição clássica de potencial parece implicar. O potencial referido ao infinito complica o entendimento do que está ocorrendo quando ele é dependente do tempo, dificuldade inexistente quando referido à fonte.

VI Considerações finais

Não há dúvida de que a solução é mais simples através dos potenciais. Há, é verdade, uma certa hesitação ao se tratar as condições de contorno devido à nossa falta de familiaridade com os mesmos no caso de fenômenos dependentes do tempo. Este é um ponto ao qual se deve dar mais atenção quando aos potenciais se empresta sentido físico.

Agradecimentos

O autor agradece ao CNPq pela bolsa de produtividade e ao IFSC-USP pelo uso de suas instalações.

References

- [1] M. A. Heald e J. B. Marion, *Classical Electromagnetic Radiation*, 3a. edição, Saunders College Publ., N.York (1995).
- [2] R.P. Feynman, *The Character of Physical Law*, The M.I.T. Press, Cambridge (1965) Cap. 2.
- [3] J.S. Bell, *Speakable and unspeakable in quantum mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, (1987), Cap.7.
- [4] R.P. Feynman, R. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures*, Vol. 2, Addison-Wesley, Reading, (1966), Cap.15.
- [5] E.J. Konopinski, *Am. J. Phys.*, **46**, 499 (1978).