

# Supersimetria em Mecânica Quântica II: Oscilador Harmônico e Potencial Coulombiano

Gláucia R. P. Borges\* e Elso Drigo Filho†

*Departamento de Física, Instituto de Biociências,*

*Letras e Ciências Exatas - UNESP*

*Rua Cristóvão Colombo, no. 2265, Jardim Nazareth*

*15054-000 - São José do Rio Preto - SP, Brasil*

Recebido em 1 de Março, 1998

O formalismo da Supersimetria tem possibilitado várias aplicações em Mecânica Quântica. Neste artigo mostra-se como este formalismo pode ser utilizado para resolver a equação de Schrödinger para o oscilador harmônico e para o potencial coulombiano. Procura-se enfatizar o método de resolução e sua aplicação.

## I Introdução

A introdução da supersimetria para estudar sistemas quânticos tem gerado várias aplicações e motivado, principalmente devido a sua simplicidade, muitos trabalhos a respeito (veja, por exemplo, ref [1] - [5]).

Recentemente, procurou-se através de uma abordagem didática, introduzir os conceitos fundamentais da Mecânica Quântica Supersimétrica [1]. No presente trabalho pretende-se explorar mais profundamente o uso deste formalismo na solução da equação de Schrödinger, com este intuito na seção II são revisados os conceitos essenciais para aplicação do método de solução. Na seção III o oscilador harmônico unidimensional é resolvido explicitamente através da determinação da hierarquia de Hamiltonianos. Evidenciando a aplicabilidade do método, na seção IV a equação de Schrödinger radial do problema coulombiano tridimensional também é resolvida em detalhes. Finalmente, na seção V são colocadas as conclusões.

## II Método de solução da equação de Schrödinger

Nesta seção apenas são apontados os procedimentos que possibilitam resolver a equação de Schrödinger, a consistência e verificação da validade do método pode ser encontrada, por exemplo, nas ref [1-2].

Em Mecânica Quântica Supersimétrica com  $N = 2$  tem-se dois operadores,  $Q$  e  $Q^+$ , que satisfazem a

álgebra.

$$\{Q, Q^+\} = QQ^+ + Q^+Q = H_{ss} \quad (1)$$

$$Q^2 = Q^{+2} = 0 \quad (2)$$

onde  $H_{ss}$  é chamado de Hamiltoniano supersimétrico. Esta álgebra pode ser realizado por:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A^- & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad Q^+ = \begin{pmatrix} 0 & A^+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

e desta forma

$$H_{ss} = \begin{pmatrix} A^+A^- & 0 \\ 0 & A^-A^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H^+ & 0 \\ 0 & H^- \end{pmatrix} \quad (4)$$

onde  $H^+$  e  $H^-$  são chamados de companheiros supersimétricos e  $A^+$  e  $A^-$  são operadores bosônicos. Desta estrutura é possível construir novos Hamiltonianos com relações simples relacionando suas autofunções e autovalores.

Usando as idéias da Supersimetria em Mecânica Quântica, um dado Hamiltoniano  $H_1$  pode ser fatorizado como (adotando  $\hbar = 2m = 1$  para simplificar a notação):

$$H_1 = -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x) \equiv A_1^+ A_1^- + E_0^{(1)} \quad (5)$$

onde  $E_0^{(1)}$  é o auto valor do nível mais baixo de energia e

$$A_1^\pm = \mp \frac{d}{dx} + W_1(x) \quad (6)$$

\*glauciar@df.ibilce.unesp.br

†elso@df.ibilce.unesp.br

sendo  $W_1(x)$  o chamado superpotencial que deve satisfazer a seguinte equação de Ricatti [6].

$$W_1^2 - W_1' + E_0^{(1)} = V_1(x) \quad (7)$$

Esta equação pode facilmente ser obtida substituindo a definição de  $A_1^+$  e  $A_1^-$  [eq.(6)] na equação (5). A função de onda do estado fundamental também pode ser obtida:

$$A_1^- \Psi_0 = 0 \Rightarrow \Psi_0 \propto \exp\left[-\int W(\bar{x})d\bar{x}\right] \quad (8)$$

O companheiro supersimétrico de  $H_1$  é construído invertendo-se os operadores bosônicos:

$$H_2 = A_1^- A_1^+ + E_0^{(1)} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_2(x) \quad (9)$$

Prosseguindo;  $H_2$  pode ser fatorizado outra vez em termos de novos operadores bosônicos:

$$H_2 = A_2^+ A_2^- + E_0^{(2)} \quad (10)$$

com

$$A_2^\mp = \left(\pm \frac{d}{dx} + W_2\right) \quad (11)$$

onde  $W_2$  ainda tem que satisfazer a equação de Ricatti (7) para  $V_2$  e  $E_0^{(2)}$ .

A supersimetria nos assegura que

$$E_0^{(2)} = E_1^{(1)} \quad e \quad \Psi_1^{(1)} \propto A_1^+ \Psi_0^{(2)} = A_1^+ \exp\left[-\int W_2(\bar{x})d\bar{x}\right] \quad (12)$$

Repetindo este processo  $n$  vezes, tem-se toda uma família de Hamiltonianos:

$$H_n = A_n^+ A_n^- + E_0^{(n)} \quad (13)$$

onde

$$A_n^\pm = \mp \frac{d}{dx} + W_n(x) \quad (14)$$

e a função de onda de cada estado fundamental é dada, a menos da constante de normalização, por

$$\Psi_0^{(n)}(x) = \exp\left[-\int W_n(\bar{x})d\bar{x}\right] \quad (15)$$

A supersimetria permite obter a solução do problema original  $H_1$  através das relações entre os estados fundamentais de cada membro da família:

$$\Psi_1^{(n)} \propto A_1^+ A_2^+ \dots A_n^+ \Psi_0^{n+1} \quad (16)$$

$$E_n^{(1)} = E_0^{n+1} \quad (17)$$

Desta forma, o método apresentado consiste em determinar o superpotencial para cada membro da superfamília. Feito isto as autofunções e autovalores do problema original estão automaticamente determinados pelas relações (16) e (17). Obviamente, apenas os potenciais exatamente solúveis permitem a construção da superfamília completa.

### III Oscilador harmônico

O oscilador harmônico unidimensional é um dos potenciais mais simples que se pode tomar para exemplificar o método baseado na supersimetria, ele também pode ser usado para introduzir a super-álgebra em Mecânica Quântica [1,3].

Neste caso, o Hamiltoniano é escrito:

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 \quad (18)$$

lembrando que  $\hbar = 2m = 1$ . Com operadores bosônicos definido em (6) a equação de Ricatti (7) é escrita:

$$W_1^2 - W_1' + E_0^{(1)} = x^2 \quad (19)$$

Para que esta igualdade seja satisfeita, basta tomar:

$$W_1(x) = x \quad e \quad E_0^{(1)} = 1 \quad (20)$$

Nestas condições o Hamiltoniano (18) é o primeiro membro da superfamília. O segundo membro é obtido invertendo os operadores bosônicos, equação (9):

$$H_2 = A_1^- A_1^+ + E_0^{(1)} = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + 2 \quad (21)$$

Fatorizando  $H_2$  em termos de novos operadores bosônicos

$$H_2 = A_2^+ A_2^- + E_0^{(2)} \quad (22)$$

onde  $A_2^\pm$  é escrito em termos do superpotencial  $W_2$  [eq (11)]. A igualdade entre as equações (21) e (22) nos leva a uma nova equação de Ricatti:

$$W_2^2 - W_2' + E_0^{(2)} = x^2 + 2 \quad (23)$$

cuja solução neste caso vale:

$$W_2 = x \quad e \quad E_0^{(2)} = 3 \quad (24)$$

Repetindo o processo é possível verificar que para o próximo membro da superfamília:

$$W_3 = x \quad e \quad E_0^{(3)} = 5 \quad (25)$$

Seguindo o método para mais alguns membros, percebe-se que, para este exemplo, os superpotenciais são sempre iguais e a energia dos estados fundamentais seguem a sequência dos números ímpares. Assim no caso geral

$$W_n = x \quad e \quad E_0^{(n)} = 2n - 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (26)$$

A partir da equação (15) é possível determinar a função de onda para os estados fundamentais de cada membro da superfamília:

$$\Psi_0^{(n)}(x) = e^{-\int x dx} = e^{-x^2/2} \quad (27)$$

Finalmente, usando as relações (16) e (17) obtém-se a solução total do problema do oscilador harmônico quântico:

$$\Psi_n^{(1)} = A_1^+ A_2^+ \dots A_n^+ e^{-x^2/2} \quad (28)$$

onde  $A_n^+ = (-\frac{d}{dx} + x)$ ; e

$$E_n^{(1)} = 2n + 1 \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (29)$$

Este valor de energia pode ser diretamente comparado com valores obtidos por outros métodos [7,8], respeitando a convenção de que  $\hbar = 2m = 1$ . As funções de onda (28) também podem ser comparadas. No caso das soluções obtidas pelo método de fatorização [8] a comparação é direta uma vez que os operadores bosônicos, neste exemplo, coincidem com os operadores usuais de criação e destruição. Das soluções obtidas pelo método tradicional [7,9] a comparação pode ser feita aplicando os operadores a função  $e^{-x^2/2}$ , por exemplo:

$$\Psi_3^{(1)} = A_1^+ A_2^+ A_3^+ e^{-x^2/2} = (8x^3 - 12x)e^{-x^2/2} \quad (30)$$

onde  $(8x^3 - 12x)$  é o quarto polinômio de Hermite [9].

## IV Potencial de Coulomb

Seguindo o mesmo procedimento usado para o oscilador harmônico pode-se obter as soluções da equação de Schrödinger para o problema coulombiano. Neste caso o Hamiltoniano de partida [7] é:

$$H = -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \quad (31)$$

onde é assumido  $2m = \hbar = e = 1$ . De acordo com o método, fatoriza-se o Hamiltoniano (31):

$$H_1 = a_1^+ a_1^- + E_0^{(1)} \quad (32)$$

onde os operadores bosônicos valem.

$$a_1^\pm = \mp \frac{d}{dr} + w_1 \quad (33)$$

Juntando a equação (32) à definição (33) e usando (31) obtém-se a equação de Ricatti:

$$w_1^2 - w_1' + E_0^{(1)} = -\frac{1}{r} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \quad (34)$$

A solução desta equação terá a forma:

$$w_1 = -\frac{a}{r} + c \quad (35)$$

onde  $a$  e  $c$  são constantes determinadas substituindo (35) em (34); desta substituição obtém-se:

$$w_1 = -\frac{(\ell+1)}{r} + \frac{1}{2\ell+2} \quad (36)$$

e o autovalor de energia:

$$E_0^{(1)} = -\frac{1}{4\ell^2 + 8\ell + 4} = -\frac{1}{4(\ell+1)^2} \quad (37)$$

O companheiro supersimétrico de  $H_1$  (32) é obtido invertendo os operadores bosônicos

$$H_2 = a_1^- a_1^+ + E_0^{(1)} \quad (38)$$

ou seja:

$$H_2 = -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} + \frac{\ell(\ell+3)+2}{r^2} \quad (39)$$

Fatorizando  $H_2$  em termos de novos operadores  $a_2^\pm$  formados pela derivada segunda e o novo superpotencial  $w_2$ , obtém-se a nova equação de Ricatti:

$$w_2^2 - w_2' + E_0^{(2)} = -\frac{1}{r} + \frac{\ell(\ell+3)+2}{r^2} \quad (40)$$

É necessário novamente resolver esta equação. Neste caso, a solução terá a mesma forma de  $w_1$  (35), porém com constantes diferentes:

$$w_2 = -\frac{(\ell+2)}{r} + \frac{1}{2(\ell+2)} \quad (41)$$

O autovalor de energia aqui será:

$$E_0^{(2)} = -\frac{1}{4(\ell+2)^2} \quad (42)$$

O próximo membro da superfamília é obtido invertendo os operadores  $a_2^\pm$ :

$$H_3 = a_2^- a_2^+ + E_0^{(2)} = -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} + \frac{\ell(\ell+5)+6}{r^2} \quad (43)$$

Como foi feito até agora, novos operadores bosônicos devem ser definidos usando um novo superpotencial  $w_3$ :

$$H_3 = a_3^+ a_3^- + E_0^{(3)} \quad (44)$$

A solução da equação de Ricatti resultante da comparação de (43) com (44) fornece:

$$w_3 = -\frac{(\ell+3)}{r} + \frac{1}{2(\ell+3)} \quad (45)$$

e

$$E_0^{(3)} = -\frac{1}{4(\ell+3)^2} \quad (46)$$

Da comparação dos valores obtidos, (36), (41) e (45), obtém-se que [10]:

$$w_{n+1} = -\frac{(\ell+n+1)}{r} + \frac{1}{2(\ell+n+1)} \quad (47)$$

Portanto, as funções de onda do estado fundamental de cada membro da superfamília são escritas como; equação (15):

$$\Psi_0^{(n+1)} = r^{(\ell+n+1)} e^{-r/2(\ell+n+1)} \quad (48)$$

Por outro lado, observando os autovalores de energia, (37), (42) e (46), obtém-se [10] a forma geral para o valor da energia dos estados fundamentais de cada membro da hierarquia de Hamiltonianos:

$$E_0^{(n+1)} = -\frac{1}{4(\ell+n+1)^2} \quad (49)$$

A supersimetria permite relacionar todos os membros da superfamília com a solução do Hamiltoniano original de acordo com as relações (16) e (17). Para o problema coulombiano as autofunções são dadas por:

$$\Psi_n^{(1)} \propto a_1^+ a_2^+ \dots a_n^+ \left[ r^{(\ell+n+1)} e^{-\frac{r}{2(\ell+n+1)}} \right] \quad (50)$$

onde

$$a_{n+1}^\pm = \mp \frac{d}{dr} - \frac{(\ell+n+1)}{r} + \frac{1}{2(\ell+n+1)} \quad (51)$$

As autofunções (50) e os autovalores (49) são a solução de Schrödinger com potencial de Coulomb. Os autovalores podem ser diretamente comparados com aqueles obtidos por outros métodos (veja por exemplo, ref [7]), para uma comparação mais imediata pode-se fazer  $N = n + \ell + 1$ , onde  $N$  é o número quântico normalmente usado. As autofunções também podem ser diretamente comparadas, para tanto deve-se observar que para cada valor de  $\ell$  tem-se toda uma superfamília. Quando  $\ell = 0$ , por exemplo, são obtidos todas as autofunções dos estados  $s$  do Hamiltoniano; para  $\ell = 0$  e  $n = 0$  (o que

corresponde na notação usual a  $N = 1$  e  $\ell = 0$ , estado 1s):

$$\Psi_0^{(1)} = \Psi_{10} = r \cdot e^{-r/2} \quad (52)$$

outro exemplo,  $\ell = 0$  e  $n = 1$  (usualmente  $N = 2$  e  $\ell = 0$ , estado 2s):

$$\Psi_1^{(1)} = \Psi_{20} = a_1^+ \Psi_0^{(2)} = r \cdot e^{-r/4} \left( \frac{3}{4}r - 3 \right) \quad (53)$$

Outras autofunções podem ser obtidas a fim de serem verificadas com aquelas obtidas por outros métodos. Os resultados da referência [11] permitem uma comparação direta com estas autofunções, lembrando que a normalização ainda não está embutida em (53).

## V Conclusão

Neste artigo procurou-se reforçar o método de solução da equação de Schrödinger baseado no formalismo da Mecânica Quântica Supersimétrica. Dois exemplos foram estudados, a saber, o oscilador harmônico unidimensional e o problema coulombiano. Neste segundo caso percebe-se que o número quântico do momento angular desempenha um importante papel na descrição da superfamília, uma vez que para cada valor de  $\ell$  obtém-se toda uma Hierarquia de Hamiltonianos.

O método de solução apresentado é bastante geral, podendo ser aplicado a qualquer dos potenciais que permitem solução exata (de Morse [12], Pöschl-Teller [13], entre outros). A vantagem adicional deste procedimento é permitir estudar as soluções estado por estado, o que o torna particularmente interessante para estudar os chamados potenciais parcialmente solúveis. Estes potenciais possuem solução analítica apenas para uma parte do espectro; é o caso, por exemplo, do potencial de Coulomb truncado [14], oscilador anarmônico [15], entre outros [16].

Uma simetria adicional (“shape invariance” [17]) relacionada a forma dos potenciais dos membros da superfamília foi introduzida [5,18] na tentativa de classificar os potenciais exatamente solúveis em termos da supersimetria. Entretanto, esta simetria mostrou ser uma condição suficiente, mas não necessária para que a equação de Schrödinger seja resolvida analiticamente para todos os níveis de energia [19]. A questão de uma simetria mais geral ainda permanece em aberto.

## Agradecimentos

Os autores agradecem a FAPESP pelo apoio financeiro. EDF também agradece ao CNPq por apoio financeiro parcial.

## References

- [1] E. Drigo Filho, Rev. Bras. Ens. Fís. **19**, 152 (1997).
- [2] F. Cooper, A. Khare e U. Sukhatme, Phys. Rep. **251**, 267 (1995).
- [3] F. Ravndal Elementary Supersymmetry CERN School of Physics CERN **85-11**, 300 (1985).
- [4] R. de Lima Rodrigues, A. Narayan Vaidya, Rev. Bras. Ens. Fís. **19**, 374 (1997).
- [5] L. E. Gendenshtein and I. V. Krive, Sov. Phys. Usp **28**, 645 (1985).
- [6] N. Curle, *Equações Diferenciais Aplicadas*, Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1975.
- [7] L. Schiff, *Quantum Mechanics*, Ed. Mc Graw-Hill, New York, 1968.
- [8] S. Borowitz, *Fundamentos de Mecânica Cuántica*, Editorial Reverté, Barcelona, 1967.
- [9] R. M. Eisberg, *Fundamentos da Física Moderna*, Editora Guanabara Dois, Rio de Janeiro, R.J.1979.
- [10] O processo pode ser repetido inúmeras vezes a fim de deixar mais claro a forma geral indicada.
- [11] A. S. Davydov, *Quantum Mechanics*, Ed. Pergamon Press, Oxford, 1965.
- [12] P. M. Morse, Phys. Rev. **34**, 57 (1929).
- [13] G. Pöschl and Teller, Z. Phys. **83**, 143 (1933).
- [14] E. Drigo Filho, Mod. Phys. Lett **9**, 411 (1994).
- [15] P. Roy, B. Roy and R. Roychoudhury, Phys. Lett A**139**, 427 (1989).
- [16] Exemplos de outros potenciais podem ser encontrados em E. Drigo Filho and R. M. Ricotta, Phys. Lett. A**4**, 2283 (1989); E. Drigo Filho, Phys. Lett. A**11**, 207 (1996).
- [17] R. Dutt, A Khare and U. P. Sukhatme, Am. J. Phys. **56**, 163 (1988).
- [18] L. E. Gedenstein, Pis'ma. Zh. Eksp. Teor. Fiz. **38**, 299 (1983); (JEPT Lett. **38**, 356 (1983).
- [19] F. Cooper and J. N. Ginocchio, Phys. Rev. D**36**, 2458 (1987).