

# Maupertuis (1698-1759) e o Princípio da Mínima Ação

Ildeu de Castro Moreira

*Instituto de Física - UFRJ*

*CP 68528. Ilha do Fundão*

*21945-190, Rio de Janeiro, Brasil*

*E-mail: ildeu@if.ufrj.br*

Recebido em 14 de Agosto, 1998

Trezentos anos atrás nascia, na França, Pierre Louis-Moreau de Maupertuis que viria a desempenhar um papel importante na física do século XVIII. Principal defensor das teorias newtonianas na França, Maupertuis é muito citado, nos livros de mecânica, por ter sido o formulador original do Princípio da Mínima Ação. De início, ele propôs o princípio para a ótica geométrica e, posteriormente, tentou estendê-lo para a mecânica, uma tarefa que seria completada por Euler. Neste trabalho apresentamos a tradução do artigo original de Maupertuis, de 1744, onde ele discute a aplicação do princípio proposto para o comportamento da luz. Apresentamos também um apinhado de sua vida e a obra. Ao lado disso, fazemos uma descrição histórica abreviada acerca dos diversos tipos de princípios variacionais utilizados na física, de Fermat até o século XX.

## I Introdução: Pierre Louis-Moreau de Maupertuis

Quase todos os grandes físicos teóricos se envolveram, em algum momento, com a questão do status dos princípios variacionais na física, seja discutindo o seu significado ou simplesmente utilizando-os pragmaticamente na formulação de suas teorias ou modelos. Essa questão continua, talvez de forma subreptícia, a permear o pensamento descritivo da física contemporânea e a desempenhar um papel significativo no ensino da ciência “normal”. Mas basta examinar os livros de mecânica clássica, por exemplo, para nos depararmos com um espectro de significados atribuídos aos princípios variacionais.

A existência de diferentes pontos de vista sobre o significado conceitual de tais princípios pode ser facilmente percebida quando se comparam dois exemplos extremos dentro desse espectro. Se abrimos, por exemplo, o livro *Mecânica*, do famoso curso de Landau e Lifschitz [1], veremos o princípio de Hamilton ser colocado, logo nos primeiros parágrafos, como a lei básica da mecânica. Nessa abordagem, a segunda lei de Newton, para sistemas conservativos, decorre desse princípio e as leis de conservação surgem associadas às simetrias da ação clássica; esse último resultado deve muito aos trabalhos da matemática Emmy Noether [2]. Já na leitura do livro de mecânica de Kilminster [3],

encontramos o mesmo princípio variacional reduzido a um papel secundário, em relação às leis de Newton, e tendo um caráter eminentemente matemático. Ele é apresentado ali como uma formulação alternativa e limitada da dinâmica newtoniana, e é feita uma crítica cerrada à posição daqueles que atribuem ao princípio um maior significado físico.

Nos mesmos textos de mecânica clássica ou de mecânica analítica, Maupertuis aparece, com bastante frequência, como sendo o formulador de um dos primeiros princípios variacionais, o *princípio da mínima ação*, com o qual pretendia construir uma descrição física unificada da natureza. Segundo muitos desses livros, as razões para a introdução do princípio da mínima ação emanariam fundamentalmente das convicções religiosas de seu proponente, mas isso é apenas uma parte da história, como veremos adiante. Pouco depois de ter publicado seu trabalho original, em que propõe o princípio de mínima ação para o comportamento da luz, Maupertuis tentou estendê-lo para a mecânica. Seu sucesso, no entanto, foi bastante limitado. A iniciativa só progrediu com a entrada em cena de seu amigo Euler que, muito mais dotado que ele em física e matemática, conseguiu construir um princípio da mínima ação correto para a mecânica, embora de aplicação restrita aos sistemas com energia constante.

O nome de Maupertuis aparece também, de forma

reiterada, nos estudos dos historiadores da ciência que analisam a difusão do newtonianismo na Europa. Para muitos deles, Maupertuis foi o principal defensor e divulgador na França das novas teorias newtonianas, em particular da mecânica e da lei da atração gravitacional. Sua memória *Sur les lois de l'attraction*, publicada pela Academia de Ciências de Paris em 1732, constituiu o primeiro artigo explicitamente newtoniano no seio da cidadela cartesiana. Além de defender conceitualmente as idéias de Newton, Maupertuis, juntamente com La Condamine, estabeleceu um verdadeiro programa para testar as previsões newtonianas em contraposição aos cartesianos, tendo com base a questão da forma da Terra. Segundo a *boutade* bem conhecida de Voltaire: “Em Paris se representa a forma da Terra como um melão, em Londres ela é achatada nas duas extremidades.”

Maupertuis foi o condutor da expedição à Lapônia, em 1736/37, com o objetivo de medir o comprimento de um grau ao longo do meridiano. As medidas realizadas por ele e seus companheiros, entre os quais Clairaut e Celsius, confirmaram as suposições de Newton sobre o achatamento da Terra. Esse resultado teve uma grande influência na aceitação da teoria newtoniana, entre outras razões, pelo fato de que, mesmo a expedição tendo sido capitaneada por um francês, contradizia a teoria proposta pelos cartesianos. A expedição de La Condamine e seus colegas, que se dirigiram às vizinhanças do equador, na Amazônia peruana, confirmariam anos depois o achatamento da Terra.

Já entre os historiadores da biologia, as referências a Maupertuis estão asseguradas especialmente por sua obra *Vênus Física* (1745), que teve grande sucesso de público na época e na qual expunha as principais teorias sobre a origem do homem. Propunha também um sistema com o qual pretendia explicar a reprodução humana, incorporando a ele várias extrapolações fantasiosas, e discutia a origem das “raças” humanas; chegou mesmo a esboçar idéias sobre a herança dos caracteres adquiridos, que viriam a empolgar os biólogos do século seguinte.

Se nos voltarmos para a história das instituições científicas e de como se estabelecem as relações entre o poder e a ciência, no século XVIII, a figura de Maupertuis nos traz também reflexões interessantes. Em várias de suas obras, permeadas de um moralismo algo exacerbado, ele nos apresenta a visão de um mundo ordenado e hierarquicamente fundado, que justifica e tranqüiliza a nobreza. Tais idéias não ocorrem à toa. Todo-poderoso presidente da Academia de Ciências de

Berlim, a partir de 1746, uma academia fundada por Frederico II, seu amigo e protetor, Maupertuis representou durante um bom número de anos o papel de um dos cientistas europeus de maior influência e poder. Poder esse que usava, às vezes, de forma autocrática e autoritária e que, por isso, fez com que colhesse o desagrado e a inimizade de muitos. Além disso, os franceses nunca se esqueceram de que seu compatriota fora abrihantar a academia e a corte da Prússia, enquanto que os alemães se recordavam sempre de sua origem francesa. Voltaire, que durante muitos anos havia sido admirador e amigo de Maupertuis, voltou-se depois contra ele com sua peculiar e devastadora virulência. Portanto, mesmo aqueles que se interessam apenas pela literatura, poderão se deparar com a figura de Maupertuis, travestida no cientista Dr. Akakia, na pena ácida de Voltaire, em seu *Diatribes du Docteur Akakia*. As críticas de Voltaire e as polêmicas acirradas em que se envolveu teriam deixado suas marcas em Maupertuis, quando morreu acabrunhado, na Suíça, em 1759.

No ano de 1998, registra-se o aniversário do nascimento de Maupertuis (Pierre-Louis Moreau de Maupertuis), trezentos anos atrás, em Saint-Malo, França. No mundo da ciência, essas comemorações retrospectivas de datas “redondas”, embora detenham alguns riscos evidentes, tornaram-se uma tradição importante. Por um lado, têm um aspecto positivo ao permitir que retornemos a fatos marcantes para refletir sobre o fluxo histórico que limita e encadeia o desenvolvimento da ciência. No entanto, além de trazerem à mente uma certa atração numerológica destituída de sentido, os registros de aniversários de eventos ou de personalidades traduzem avaliações subjetivas quanto à relevância dos fatos ou dos personagens reverenciados e freqüentemente encobrem escolhas pessoais e nacionalistas. Com todos esses riscos em mente, recordaremos brevemente a obra de Maupertuis, em razão dos trezentos anos de seu nascimento. É uma oportunidade para voltarmos um pouco no tempo e analisarmos como o princípio de mínima ação veio à luz dentro da física.

Estaremos, aqui, particularmente interessados nos aspectos dos trabalhos de Maupertuis diretamente ligados à introdução do princípio da mínima ação. Remetemos o leitor interessado em um aprofundamento maior para os livros e artigos indicados nas referências [4-8]. Limitar-nos-emos a apresentar um apanhado dos antecedentes, do surgimento e de alguns desenvolvimentos decorrentes do princípio da mínima ação maupertuisiano. O nosso objetivo principal, no entanto, é apre-

sentar a tradução do trabalho original de Maupertuis em que o princípio foi introduzido pela primeira vez na ótica. A leitura de artigos originais da ciência é uma boa oportunidade para que sejam percebidos os processos de criação e de descoberta científica. Além disso, do ponto de vista didático, podem contribuir para um melhor entendimento dos conceitos e teorias.

## II O princípio de mínima ação: de Fermat a Feynman

Os *princípios de mínima ação* (ou, mais apropriadamente, *princípios de ação estacionária* ou *princípios variacionais*) têm um lugar de destaque na descrição física da natureza. Trata-se da suposição de que os fenômenos naturais podem ser descritos matematicamente através da minimização (ou mais precisamente, da estacionaridade) de determinada quantidade física. Isso é obtido pela comparação da variação do valor dessa quantidade (geralmente um funcional, ou seja um número associado com cada trajeto), quando percursos vizinhos são comparados. Independentemente das interpretações físicas, metafísicas, religiosas, estéticas ou filosóficas a elas dadas, mas que contribuíram certamente nas suas criações e na definição de seus significados, os princípios variacionais continuam a desempenhar um papel importante dentro da física atual. Para Planck, por exemplo, a ciência física “tem como seu objetivo mais elevado e mais almejado ... condensar todos os fenômenos naturais que foram e que ainda serão observados em um único princípio. (...) [O princípio de mínima ação] é a mais abrangente de todas as leis físicas que governam igualmente a mecânica e a eletrodinâmica.” [9]

A idéia de que a natureza segue um *princípio de mínimo esforço* ou de que “não faz nada em vão” tem uma origem muito antiga. No ano 75, por exemplo, Heron de Alexandria propôs que a luz segue sempre o caminho mais curto ao se propagar em um meio homogêneo e, com isso, forneceu uma explicação para a igualdade entre o ângulo de reflexão e o ângulo de incidência da luz. De lá para cá, concepções similares têm permeado quase todas as teorias mais abrangentes da física. Podemos perceber, ao longo dos últimos séculos, cientistas que deram um destaque especial aos princípios variacionais dentro do anseio unificador das teorias físicas, como Fermat, Leibniz, Maupertuis, Euler, Helmholtz, Poincaré, Planck, Feynman. Por outro lado, muitos não atribuíam a eles qualquer significado maior como Newton, d’Alembert e Lagrange, entre ou-

tros. Outros, ainda, como Poisson, no século XIX, e Born, na década de 50, formularam críticas veementes à idéia de atribuir um papel de importância fundamental a esses princípios. Para eles, o caráter teleológico associado com os princípios variacionais não deve ter lugar na física.

Entre os princípios da mecânica, foi a formulação variacional a que despertou as polêmicas mais intensas ao longo da história. As diferentes concepções sobre ela resultaram, às vezes, em controvérsias acirradas, como a que ocorreu entre Fermat e os cartesianos, no século XVII, ou a polêmica entre Maupertuis e Samuel Krönig, no século XVIII, que envolveu também questões de prioridade científica e querelas pessoais. Várias questões estão presentes, de forma subjacente ou explícita, nessas controvérsias sobre os princípios variacionais, entre elas: O que constitui uma verdadeira lei da natureza? Qual a aplicabilidade dessas técnicas matemáticas à descrição da natureza? Os princípios de “origem metafísica” têm lugar na física? O que distingue uma argumentação física de um arrazoado metafísico? Só têm validade na física as explicações mecânicas locais? As causas finais podem persistir na física ou apenas as causas “eficientes”? Como distingui-las? Qual o status epistemológico desses princípios e o papel das descrições globais na física?

A história dos princípios variacionais torna explícitas muitas e interessantes conexões entre idéias científicas, pressupostos filosóficos, concepções religiosas e culturais que variam com a época e com a cultura subjacente. Eles estão matematicamente associados a uma descrição mais global dos fenômenos e na qual, pelo menos em certa medida, a noção de causa final parece estar presente. No entanto, a concepção mecanicista que emergia com os cartesianos, por exemplo, desqualificava este tipo de descrição. A ação contígua, por contato, era a forma básica para o entendimento do mundo. Isto deveria se refletir em leis de movimento locais. Com o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral, chegar-se-ia à expressão dessas ações locais sob a forma das equações diferenciais.

### a) Fermat e os cartesianos

Vamos apresentar, no que se segue, um apanhado da controvérsia científica surgida entre Fermat e Descartes, no século XVII [10], sobre a propagação e a refração da luz para podermos perceber as bases sobre as quais Maupertuis se firmou para propor seu princípio da mínima ação.

No século XVII, dentro das concepções cartesianas, a categoria das causas finais aristotélicas deveria ser afastada da descrição física. Todas as tentativas de atribuir finalidade aos fenômenos físicos, ou que pareciam fazê-lo, eram batizadas de “metafísicas” e destinadas a ser descartadas a priori. Contra essa corrente opor-se-ia Fermat, numa polêmica que ficou famosa na história da ciência, por sua duração e pela estatura dos oponentes. A chamada *lei dos senos* para a refração havia sido proposta por Descartes e, independentemente, por Snell. Na *Dióptrica* (1737), Descartes apresentara uma dedução dessa lei baseada em várias suposições: um mundo pleno (sem vácuo) e a luz, que se propagava instantaneamente, como uma *tendência* do meio sutil (que preenchia o universo) a se mover [11]. Construiu, então, uma analogia da luz com uma bola incidindo sobre a superfície da água, utilizou sua decomposição do movimento em componentes e fez a suposição da conservação da componente do momento na direção paralela aos dois meios em contato. Um pressuposto físico essencial, na concepção cartesiana, era também a idéia de que a luz tem mais facilidade de se mover nos meios mais densos. Essa última hipótese incomodava particularmente a Fermat, que intuía que a luz deveria ter velocidade finita e se mover mais lentamente nos meios mais densos. Apenas em meados do século XIX, a questão seria decidida, em favor de Fermat, com os experimentos de Foucault e Fizeau, e isso quando o avanço técnico veio permitir que experiências precisas da velocidade da luz fossem executadas.

Fermat fez, logo após a publicação da *Dióptrica*, uma crítica vigorosa da *demonstração* da lei da refração feita por Descartes, embora a tivesse aceito logo depois como empiricamente correta, dentro das limitações experimentais. Descartes reagiu com vigor às críticas de Fermat, assim como o fizeram posteriormente seus seguidores. Cerca de vinte e cinco anos depois, Fermat formularia seu princípio de mínimo tempo para a propagação da luz. Sua proposição surgiu após muitas tentativas infrutíferas de entendimento do comportamento da luz. Com ele, Fermat foi capaz de explicar as leis da reflexão e da refração. Foi, então, o primeiro a elaborar, propor e justificar o uso de um princípio de mínimo, com caráter fortemente matematizado. Nesse princípio, a quantidade a ser minimizada é o tempo gasto para a luz se propagar de um ponto a outro.

Em uma carta famosa, de janeiro de 1662, Fermat relatou como havia chegado, de forma inesperada e surpreendente, a uma “dedução” das leis da ótica geométrica, que lhe parecia inteiramente satisfatória,

pelo princípio do trajeto mais fácil (mínimo tempo): “Mas o prêmio de meu trabalho foi extraordinário, o mais imprevisível e o mais feliz que já me aconteceu. Porque, depois de ter passado por todas as equações, multiplicações, antíteses e outras operações de meu método, e de haver por fim concluído o problema - que o senhor pode ver em folha separada -, encontrei que meu princípio fornecia justa e precisamente a mesma proporção das refrações que Descartes havia estabelecido. Fiquei tão surpreso com um evento tão inesperado, que a custo saí de meu espanto. Repeti minhas operações algébricas diversas vezes e sempre o sucesso foi o mesmo, ainda que minha demonstração suponha que a passagem da luz pelos corpos densos seja mais difícil que nos corpos menos densos, o que eu creio que é muito verdadeiro e indisputável, e embora Descartes suponha o contrário.” [12]

Na demonstração de seu princípio, Fermat utiliza pela primeira vez seu princípio de máximos e mínimos. Parte da observação “intuitiva” de que em uma situação de máximo ou mínimo, no cume de uma montanha ou no fundo de um vale, por exemplo, um pequeno desvio no trajeto não afeta significativamente seu comprimento. Através de uma generalização matemática dessa idéia, a determinação de um máximo ou de um mínimo é feita pela análise do que ocorre quando a quantidade considerada  $A$  sofre uma pequena variação, ou seja, quando se soma a ela uma quantidade muito pequena. As condições para a existência do máximo ou do mínimo são fornecidas pela exigência de que a variação em torno de uma situação ou trajeto estacionário deve ser nula.

No caso da refração, a luz, para minimizar o intervalo de tempo, “busca percorrer” um trajeto maior no meio menos denso, no qual tem uma velocidade maior, e “busca percorrer” uma distância menor no meio mais denso. A trajetória real surge como um compromisso entre a necessidade de o trajeto total percorrido ser o menor possível e essa tendência de aproveitar ao máximo o meio no qual a luz se move mais rapidamente.

Fermat provou, então, que a trajetória estacionária, em torno da qual a variação do tempo total gasto no trajeto é nula, leva à proporção cartesiana:

$$\text{sen}(\Theta_i)/\text{sen}(\Theta_r) = v_i/v_r = n.$$

É curioso observar que a resolução desse problema teve importância grande no cálculo diferencial, sendo o primeiro em que se aplicou, de forma rigorosa, um procedimento de minimização. Note-se também que, em-

bora a lei obtida por Fermat dê a mesma (e correta) proporção de Descartes, ela leva a uma razão entre os senos que depende diretamente das velocidades e não inversamente, como ocorre com a proporção cartesiana e como viria a ser novamente proposto por Maupertuis, como veremos mais adiante.

A réplica ácida dos cartesianos ao princípio proposto por Fermat, feita através de Clerselier, não tardou muito. Foram feitas várias objeções ao princípio, embora fossem elogiadas a engenhosidade da demonstração e sua correção matemática. Após tecer várias críticas à proposição de Fermat, Clerselier sintetiza dogmaticamente: “A diferença é que vós não provais nada, mas fazeis uma suposição por princípio, que a luz passa mais facilmente nos corpos ralos do que nos densos, enquanto Descartes prova, e não simplesmente supõe, que a luz passa mais facilmente nos corpos densos que nos ralos.”

Mas a principal crítica ao princípio proposto por Fermat se refere à suposição de que a natureza obedece ao princípio das vias mais curtas e simples: tratar-se-ia de um princípio moral e não físico, de natureza teleológica e, portanto, inaceitável na ótica cartesiana. O princípio colocaria também a natureza em uma indecisão. Por que ela não seguiria a trajetória mais curta, a reta, se segue as vias mais curtas e simples? Qual seria o caminho mais *simples*: o mais rápido ou o mais curto? E como a natureza sabe o caminho a escolher? E o raio de luz, estando já no ar, como poderá saber para onde se inclinar se meios diferentes (água ou vidro) forem colocados à sua frente?

Pouco depois, Fermat respondeu com ironia e com uma consciente antevisão de que a história da polêmica ainda não estava terminada:

“...não pretendo nem jamais pretendi ser o confidente secreto da natureza. Ela tem vias obscuras e ocultas que não tentei jamais penetrar; eu apenas havia lhe ofertado um pequeno auxílio de geometria acerca do assunto refração, se ela tivesse necessidade disso. Mas, porque o senhor me assegura que ela pode cumprir suas tarefas sem a geometria e que se contenta com o caminho que Descartes lhe prescreveu, eu abandono de bom coração, em vossas mãos, minha pretensa conquista de física. É suficiente para mim que o senhor me deixe de posse de meu problema de geometria inteiramente puro e *in abstracto*, por meio do qual se pode encontrar a rota de um móvel que passa por dois meios diferentes e que busca concluir seu movimento da maneira mais rápida possível.” Finalizando sua carta, Fermat citava irônico: *Quando serà il vero/ Si bello, che si posa a*

*ti preporre?* e afirmava que, a partir dali, cruzaria as armas. O embate terminara.

## b) Huygens, Newton e Leibniz

Mencionemos brevemente como a questão da propagação da luz era vista pelos três grandes cientistas que surgiram na segunda metade do século XVII. Huygens, um dos seguidores mais brilhantes de Descartes, estudando novamente o problema da propagação da luz, construiu um modelo em que essa permanece como um movimento transmitido por contato, mas não mais instantâneo. Sua analogia inicial para a propagação baseia-se em um modelo constituído por um conjunto de esferas elásticas e contíguas que podem transmitir uma perturbação por contato. Como contribuição essencial para o estudo da propagação da luz, estabeleceu o justamente famoso *Princípio de Huygens* [13]. A partir desse e de sua teoria ondulatória, chegou também ao Princípio de Fermat. Para Huygens, a velocidade da luz é maior no meio menos denso.

Já Newton foi um crítico vigoroso, por um lado, das concepções cartesianas, mas deu continuidade, em outros aspectos, à visão cartesiana da luz. Para ele, Descartes “demonstrou, não sem elegância, a verdade da lei da refração, desde que não deixou margem à dúvida quanto às causas físicas que supôs.” Em sua teoria, Newton aprimorou significativamente a dedução mecânica de Descartes, e seu modelo básico passou a ser diverso: a luz é agora constituída de corpúsculos. A refração se tornou um caso particular de dinâmica da partícula: os corpúsculos sofrem uma atração maior na direção das partículas do corpo mais denso. A força age perpendicularmente à interface. Para dar conta dos fenômenos de interferência, que traduziam um comportamento ondulatório em contradição com a hipótese corpuscular, Newton introduziu o conceito ambíguo, e que já deu margem a muita especulação entre historiadores e cientistas, dos “fits of easy reflexion (transmission)” pelos quais a passagem da luz é periodicamente dificultada ou facilitada [14]. Para Newton a luz tem velocidade finita e, na linha cartesiana, é mais rápida nos meios mais densos. Apesar de sua física estar fortemente impregnada de concepções teológicas e de várias afirmações esparsas sobre o fato de que “a natureza não faz nada em vão”, Newton, em sua mecânica, não dedicou interesse aos princípios de mínimo; o mesmo ocorreu com os princípios de conservação que não têm função dentro de sua visão de mundo dinamicista e

na qual Deus desempenha um papel permanente para mantê-lo funcionando.

No início do século XVIII, Leibniz propôs para a luz o princípio do caminho mais fácil (ou “menor resistência”) [15]. Mas, para ele, ao contrário de Fermat, a velocidade da luz será maior nos meios mais densos: as partículas deste meio estão mais juntas, o que impede a luz de ser difundida e leva a que seu fluxo seja acelerado, como um jato de água fica mais rápido em uma passagem mais estreita. A resistência é, então, proporcional à velocidade. Segundo Leibniz: “A demonstração do mesmo teorema [lei dos senos] que Descartes desejava oferecer por meio das causas eficientes, está longe de ser tão boa [como a demonstração de Fermat da mesma lei], a partir das causas finais, isto é, o princípio do mínimo tempo.” Leibniz formulou, então, qualitativamente o princípio de menor resistência ou do caminho mais fácil para a luz. Em notação atual, podemos escrever:  $\delta(\Sigma \mathbf{R} \cdot \Delta s) = 0$ , onde  $\mathbf{R}$  é uma quantidade (mal definida por Leibniz) que mediria a resistência do meio e  $s$  é a variável que descreve o trajeto. No entanto, Leibniz não deixou claro como devia ser feita a medida dessa resistência nem aplicou o seu princípio a casos específicos. A fundamentação metafísica de Leibniz fica clara em sua afirmação de que “a causa final não serve somente à virtude e à piedade na ética e na teologia natural, mas também à própria física na busca e descoberta de verdades ocultas.”

### c) Maupertuis e seu princípio

Um papel tentativo de conciliação de um princípio variacional similar ao de Fermat com a descrição cartesiana e newtoniana, que está baseada em ações locais, vai ocorrer com Maupertuis. Em seu famoso artigo de 1744, *Acordo entre diferentes leis da natureza que até agora pareciam incompatíveis*, citado com frequência, mas ao que parece pouco lido, ele estabeleceu um princípio de mínimo esforço para o comportamento da luz [16]. Nesse artigo, o caminho que a luz toma é aquele no qual a quantidade de ação é mínima. Para Maupertuis a quantidade de ação é proporcional à soma dos espaços multiplicados cada um pela velocidade com a qual o corpo os percorre:  $\delta(\Sigma v \Delta s) = 0$ . Essa quantidade de ação é o verdadeiro dispêndio da Natureza e o que ela economiza ao máximo na propagação da luz.

No seu artigo original, a partir de comentários críticos iniciais sobre as conjecturas e hipóteses de vários de seus predecessores, Maupertuis expõe sua

nova idéia. Usa um interessante argumento de simetria, similar aos dos cartesianos, para criticar o princípio do mínimo tempo de Fermat e para propor seu novo princípio: “Com feito, que preferência deveria ter aqui o tempo sobre o espaço? A luz não podendo mais seguir ao mesmo tempo pelo trajeto mais curto e pelo mais rápido, por que iria por um deles e não pelo outro? A luz não segue nenhum dos dois trajetos, ela toma um caminho que tem uma vantagem mais real: *o caminho que ela toma é aquele no qual a quantidade de ação é mínima*. Falta explicar agora o que entendo por *quantidade de ação* (...). Ela é proporcional à soma dos espaços multiplicados cada um pela velocidade com a qual o corpo os percorre. É essa quantidade de ação que é aqui o verdadeiro dispêndio da Natureza e o que ela economiza o mais possível no movimento da luz.” Note-se que o conceito de ação já havia sido introduzido por Leibniz, como, aliás, é reconhecido pelo próprio Maupertuis.

Observe-se ainda que, para ele, a velocidade da luz é maior no meio mais denso. “Tudo se passa, no entanto, ao contrário... dado este fato - que a *luz se move mais rápido nos meios mais densos* - todo o edifício que Fermat e Leibniz construíram é destruído. A luz quando atravessa meios diferentes não vai nem pelo caminho de menor distância nem pelo de menor tempo.” Maupertuis atribuiu incorretamente a Leibniz a suposição de que a luz é mais rápida nos meios menos densos.

Em sua dedução do caminho de menor ação, Maupertuis utilizou um dedução similar à original de Fermat, evidentemente substituindo a condição de trajeto mais rápido para trajeto em que a ação é minimizada. A forma do trajeto (dada pela lei de refração) continua a mesma, só que agora está baseada na suposição de que a velocidade da luz é maior no meio mais denso. Em função disso, o intervalo de tempo que na soma de Fermat, a ser minimizada, aparece no numerador, na expressão de Maupertuis aparecerá no denominador.

Um ponto pouco destacado nos livros de história da mecânica é o fato de que a tentativa de Maupertuis é, de certo modo, conciliatória entre as duas visões, local e global, para a descrição dos fenômenos físicos. Não se trata de uma posição que propõe eliminar a descrição newtoniana local. Ele advoga, de fato, um certo pluralismo descritivo, que seria retomado por Euler: a perspectiva de ações locais, traduzida nas equações diferenciais, e a descrição global, pelos princípios de mínimo, se tornam compatíveis e confirmam o poder e a sabedoria de Deus. Assim, escreve: “Não se pode duvidar que todas as coisas sejam regidas por um Ser supremo

que, ao mesmo tempo que imprimiu forças à matéria que atestam sua potência, a destinou a executar tarefas que confirmam Sua sabedoria. E a harmonia desses dois atributos é tão perfeita que, sem dúvida, todos os fenômenos da Natureza poderão ser deduzidos de cada um tomado separadamente. Uma mecânica cega e necessária obedece ao traçado da Inteligência mais esclarecida e mais livre e se o nosso espírito fosse suficientemente vasto, ele veria igualmente as causas dos fenômenos físicos, seja calculando as propriedades dos corpos ou buscando o que houvesse de mais conveniente para ser executado por eles.”

Uma questão recorrente, que recebe muito destaque nos livros de mecânica que tecem algum comentário de fundo histórico sobre Maupertuis, refere-se aos pressupostos religiosos que levaram Maupertuis a formular o seu princípio. Embora isso tenha um fundo claro de verdade, não se pode ignorar que, como poderá ser percebido da leitura do artigo de Maupertuis, seu princípio está absolutamente integrado e baseado, de forma coerente, em desenvolvimentos anteriores daquilo que poderíamos chamar de física matemática da época. Além disso, até meados do século XVIII, argumentos explicitamente metafísicos e religiosos fazem parte integrante das análises da grande maioria dos cientistas. Basta nos lembrarmos de Descartes, Newton, Leibniz e mesmo Euler. Paulatinamente, esse tipo de argumentação perde força na física, ao longo do século XVIII, esvaindo-se lentamente com a emergência dos filósofos ilustrados. A crítica de d’Alembert e o iluminismo vão tornar *demodé* este tipo de argumentação e promover, pelo menos na física, uma separação mais nítida entre ciência e argumentos de origem religiosa.

O ponto mais fraco da formulação de Maupertuis situa-se na sua tentativa de estender o princípio, introduzido inicialmente para tratar do comportamento da luz, para analisar fenômenos na dinâmica das partículas. Assim, tentou analisar os problemas de equilíbrio e de choque entre partículas baseando-se na mesma idéia da minimização da ação. Seu artigo, de 1746, onde pretende estender o princípio para toda a mecânica, tinha o título: *Les lois du mouvement et du repos déduites d’un principe métaphysique* [17]. Aqui afirma, de forma geral: “em todas as mudanças que ocorrem no universo, a soma dos produtos de cada corpo multiplicados pela distância em que ele se move e pela velocidade com a qual se move, é a mínima possível.” Contudo, como destacado por Yourgrau e Mandelstam [8], seu uso da quantidade de ação se mostra confuso e limitado, o que fica evidenciado nas ten-

tativas práticas de aplicar seu princípio; falha ainda na definição precisa dos intervalos nos quais o princípio deve ser aplicado. Isso levou a que não conseguisse extrair novos e significativos resultados com a utilização de seu princípio na mecânica. Seu mérito maior, na proposição do princípio de mínima ação, reside no aspecto geral de tentar introduzir um princípio unificador para toda a dinâmica newtoniana.

Na medida em que corriam os anos, Maupertuis buscou estender seu princípio para englobar todos os fenômenos da natureza. Em trabalhos posteriores, como em seu influente *Essai de cosmologie* (1750) [18], tenta abarcar com ele toda a obra da criação: “pelo fato de se encontrar que as leis do movimento assim deduzidas [deste princípio] são precisamente as mesmas observadas na natureza, podemos admirar a sua aplicação a todos os fenômenos, no movimento dos animais, na vegetação das plantas, na revolução dos corpos celestes: e o espetáculo do universo se torna o maior, o mais belo, o mais digno de seu Autor... Essas leis, tão belas e tão simples, são talvez as únicas que o Criador e Organizador das coisas estabeleceu na matéria de modo a englobar todos os fenômenos do mundo visível.” No seu *Ensaio de filosofia moral* de 1749, ele chegou mesmo a sugerir um modelo de aritmética moral baseado em seu princípio da mínima ação: no comportamento humano e na ação política, tratava-se de minimizar as dores e privações e maximizar os prazeres. E concluiria, coerente com seus pressupostos ideológicos, que o cristianismo é a maneira mais eficiente de se maximizar a felicidade, definida por ele como a diferença entre a soma dos momentos felizes e a dos momentos infelizes.

Em 1749, D’Arcy faz várias críticas ao princípio proposto por Maupertuis, em particular à sua definição de ação e ao uso feito do princípio nos problemas de choques de partículas [19-21]. Algum tempo depois, uma polêmica acirrada se deslançou, tendo com fulcro a questão da prioridade quanto à formulação do princípio, se por Maupertuis ou por Leibniz. O matemático Samuel Krönig, um antigo protegido de Maupertuis, afirmou publicamente, em 1751, que Leibniz havia já formulado o princípio da mínima ação, em uma carta escrita a Hermann, em 1707, muitos anos antes de Maupertuis [22]. Maupertuis respondeu com extrema dureza, exigindo provas da autenticidade da carta de Leibniz e conseguindo da Academia de Ciências de Berlim um posicionamento inteiramente a seu favor [23]. Essa polêmica atingiu tons de violência elevada, teve episódios lamentáveis e não alcançou, em relação

ao conteúdo científico, o grau de profundidade da controvérsia entre Fermat e os cartesianos. Do lado de Maupertuis se postou decididamente Euler. Do lado contrário, se colocou Voltaire que, a partir de 1752, passa a ironizar profundamente Maupertuis, antes seu amigo e ídolo, escrevendo a *Diatribes du Docteur Akakia*. Quanto à carta e aos trabalhos de Leibniz, de fato ele já havia proposto anteriormente a idéia de um princípio de mínima ação, mas de forma bastante vaga e qualitativa. Leibniz dava mais ênfase, no entanto, à idéia dos princípios conservativos do que a de um princípio de mínimo. Não se pode, portanto, caracterizar o trabalho de Maupertuis como plágio mesmo se, o que é pouco provável, ele tivesse tido acesso anterior à carta de Leibniz.

#### d) No rastro de Maupertuis: de Euler a Feynman

Euler, estendendo e precisando as idéias de Maupertuis, propõe também um princípio de ação estacionária para a mecânica, na forma de um teorema matemático bem construído, que poderia ser escrito hoje na forma:  $\delta \int_A^B (v ds) = 0$ , (válido para trajetos virtuais com energia constante) [24-25]. Para ele: ‘Desde que todos os processos na natureza obedecem a certas leis de máximo ou mínimo, não há dúvida de que as curvas, descritas pelos corpos sob a influência de forças arbitrárias, também possuem alguma propriedade de máximo e mínimo.’ Reconheceu também que o princípio, na forma proposta, se aplicava a sistemas cujas forças dependem apenas da posição e apontou que os sistemas dissipativos não se prestariam a esse tipo de descrição.

Segundo Lanczos, Euler teria descoberto o princípio da mínima ação independentemente de Maupertuis, uma posição que é partilhada por outros estudiosos do período considerado: ‘... Euler mesmo tinha descoberto o princípio pelo menos um ano antes de Maupertuis, e em sua forma inteiramente correta. Em particular, Euler sabia que tanto o movimento real como o movimento variado tinha de satisfazer à lei da conservação da energia. Sem essa condição auxiliar a quantidade de ação de Maupertuis (...) perde todo seu significado.’ [26] Para Lanczos, Euler, apesar de ter percebido a fraqueza do argumento de Maupertuis, absteve-se de qualquer crítica à formulação feita por ele. E teria, em um ato de extrema modéstia, usado sua autoridade em favor de proclamar Maupertuis como o inventor do princípio da mínima ação. Brunet defende também a

posição de que ambos, Maupertuis e Euler, teriam chegado ao mesmo princípio quase simultaneamente. Mas, para ele: ‘... a influência de Maupertuis não somente sobre Euler, mas ainda sobre Lagrange, foi bastante mais profunda do que se poderia supor de início. No que se refere a Euler, parece-nos que colocar em dúvida a sinceridade de suas afirmações reiteradas sobre a prioridade de Maupertuis seria exagerar singularmente sua atitude de amizade respeitosa para com o presidente da Academia de Berlim, até reduzi-la, contra a verdade, a uma adulação mais ou menos interessada.’ [7, pág. 80].

Não é demais lembrar que Euler, enfrontado com o contexto geral de sua época, vai também buscar apoio em argumentos religiosos para o princípio que utiliza, embora faça isso com menor ênfase que Maupertuis e muito melhor escorado em suas fundamentações matemáticas e físicas. Euler advogava também uma concepção descritiva pluralista para física: ‘Por isso se vê que deve haver um método duplo de resolver os problemas da mecânica. Um deles é o método direto que está baseado nas leis do equilíbrio ou do movimento, enquanto o outro é aquele que acabo de mencionar, em que, pelo uso da fórmula que deve ser um máximo ou um mínimo, a solução é encontrada através do método de *maximis et minimis*. A primeira fornece a solução pela determinação do efeito pelas causas eficientes; o outro tem em vista as causas finais e deduz daí o efeito. Ambos devem conduzir à mesma solução, e é essa harmonia que nos convence da verdade da solução, posto que cada método deve estar fundamentado em princípios indubitáveis. Mas é freqüentemente muito difícil descobrir a fórmula que deve ser um máximo ou um mínimo, e pela qual a quantidade de ação deve ser representada. É uma pesquisa que pertence menos à matemática do que à metafísica, porque se trata de conhecer a finalidade que a natureza se propõe nessas operações. Seria conduzir essa ciência ao seu mais alto grau de perfeição, se estivéssemos em condições de assinalar, para cada efeito que a natureza produz, essa quantidade de ação que é a menor possível, e da qual poderíamos deduzir os princípios primeiros de nosso conhecimento.’

Por seu lado, Lagrange, em sua *Mecânica Analítica*, produziu uma formulação geral do princípio de ação estacionária (sistema de n corpos interagindo):

$$\delta_{E=cte} (m_1 \int_A^B v_1 ds_1 + m_2 \int_A^B v_2 ds_2 + \dots) = 0.$$

Coerente com os novos tempos - recordemo-nos a in-



fluência marcante dos iluministas no período entre ele e Maupertuis -, o princípio, para ele, deve ser considerado como consequência das leis básicas da mecânica e não proveniente de postulados metafísicos ou fundamentado em pressuposições de caráter religioso [27]

Em 1834, o físico e astrônomo irlandês William Rowan Hamilton estabelece uma poderosa analogia entre a mecânica e a ótica, conectando o princípio de Fermat ao princípio de Maupertuis (para a luz) [28]. Chegou também à forma atual básica e mais usada do princípio variacional da mecânica, que ganhou a denominação de *princípio de Hamilton*:

$$\delta S = \delta \int_1^2 (T - V) dt = 0,$$

onde  $T$  é a energia cinética e  $V$  a energia potencial do sistema. É curioso destacar que Poisson, pouco tempo antes, consideraria o princípio da ação estacionária um resultado de caráter secundário, e que seria, portanto, uma “regra inútil” na mecânica [29]. Ele enfatizou também que o princípio, na forma proposta por Euler, tinha aplicação limitada aos sistemas conservativos.

Para Mach, em abordagem filosófica diversa, feita em 1889, os princípios variacionais expressam não uma economia da natureza, mas uma economia do pensamento humano [30]. Já Helmholtz, neste mesmo período, adota uma postura mais pragmática e se preocupa em estender e determinar os limites de aplicabilidade dos princípios variacionais. Ele os constrói para o eletromagnetismo e para a termodinâmica reversível. Discutiu também as condições gerais que um sistema de equações diferenciais (de segunda ordem) deve satisfazer para poder ser descrito por um princípio variacional global [31]. Esse resultado viria a ser generalizado, em 1913, pelo matemático italiano Vito Volterra [32]. Isso permite um entendimento mais profundo dos limites de aplicabilidade dos princípios variacionais, particularmente aos sistemas dissipativos. Trata-se, estranhamente, de um resultado importante mas que é raramente citado nos livros de mecânica ou de teorias de campo. O princípio variacional era visto por Helmholtz como a lei natural unificadora que poderia englobar todos os domínios da física. Considerava-o como um princípio heurístico e como guia para formular as leis dos outros fenômenos naturais.

Em face das dificuldades que identificava nos dois grandes sistemas mecânicos, o newtoniano e o energético, Hertz propôs, em 1894, em seu livro *Os princípios da mecânica apresentados em uma nova forma*, um novo sistema que tenta superá-las, ou pelo

menos mitigá-las, e que estivesse de acordo com os critérios que as teorias científicas deveriam satisfazer, segundo sua visão [33]. A nova dinâmica de Hertz se reduzia, num certo sentido, à cinemática. Sua lei de movimento fundamental era: *cada sistema livre persiste em seu estado de repouso ou de movimento na trajetória mais “reta”*. Essa lei pode ser expressa de outras maneiras: como um princípio de aceleração mínima ou na forma do princípio de Gauss dos mínimos quadrados. Trata-se de um princípio variacional local, ao contrário do princípio de Hamilton que possui caráter global.

Em seu sistema, Hertz introduziu sistemas com vínculos (conexões geométricas) que ligam os objetos e elementos hipotéticos, as massas ocultas, por trás de todos os fenômenos naturais. A idéia de Hertz, com seu novo princípio, era superar a noção de força, um dos entraves mais sérios que identificava no sistema clássico; para isso, aproveita-se de uma modificação dos princípios variacionais, que o atraíam fortemente, tornando-os locais e imunes à crítica de carregarem uma concepção teleológica. As dificuldades do sistema energético, no que se refere ao conceito de energia potencial, são aqui superadas também pela uso das massas ocultas. O preço conceitual a pagar é a introdução desses objetos físicos não mensuráveis, as massas ocultas. Essa tentativa de Hertz constituiu-se em seu canto de cisne e também na última grande empreitada unificadora, dentro da perspectiva de se basear toda a física em mecanismos clássicos.

Mesmo com o surgimento da relatividade especial e geral, no início deste século, os princípios variacionais não foram descartados. Significativamente, na relatividade o princípio básico para o movimento está baseado na estacionaridade da separação no espaço-tempo, o que contorna a objeção de Maupertuis sobre a assimetria entre o uso do intervalo de tempo ou da distância percorrida, que aparecia nos princípios de mínimo anteriores a ele. Tanto a lei do movimento como as equações de campo, dentro da relatividade geral, vão encontrar uma expressão variacional nas mãos de Einstein e de Hilbert, no final de 1915 [34-35].

Com a introdução da idéia de que ondas estão associadas à matéria, um resultado inspirado no comportamento do fóton e em deduções relativísticas, De Broglie viria possibilitar, em um trabalho de 1924, a conciliação do princípio de Fermat para a luz com o princípio de Maupertuis para a matéria [36].

Mesmo a mecânica quântica que, num primeiro momento, parecia eliminar, com seu caráter probabilístico [37], a possibilidade de uma formulação baseada na

comparação de trajetórias bem definidas, pode ser traduzida em um princípio variacional adequadamente generalizado. Em um trabalho clássico [38], Feynman, que partira de uma sugestão inicial de Dirac, criou um princípio variacional *latu sensu*, que engloba os fenômenos quânticos. Seu postulado básico vai afirmar que todas as trajetórias são possíveis, ao contrário da formulação clássica na qual só a trajetória estacionária é real, mas têm associadas com elas probabilidades (ou mais precisamente, amplitudes de probabilidade) diferentes.

Segundo Feynman: *Todas as trajetórias são possíveis e a amplitude de probabilidade de cada uma, entre dois pontos 1 e 2 é medida pela ação clássica:  $\langle 1/2 \rangle = A \exp\{iS/\hbar\}$ . A amplitude de probabilidade é um número complexo e a soma das amplitudes de cada trajeto possível leva à amplitude de probabilidade total. Esse número quando elevado ao quadrado fornece a probabilidade total do evento mencionado ocorrer (no caso, de a partícula, estando inicialmente na posição 1, ser encontrada posteriormente na posição 2).* Significati-

vamente, e de forma muito bonita e elegante, Feynman mostrou que a equação de Schrödinger que descreve os fenômenos quânticos (não-relativísticos) decorre de seu postulado. O limite clássico também é restaurado quando o postulado generalizado de Feynman se reduz ao princípio variacional usual, nos casos em que a ação envolvida no processo é bem maior que o valor da constante de Planck, uma medida quantizada da ação. Este trabalho de Feynman trouxe também uma resposta a muitos críticos do uso dos princípios variacionais na física como tijolos teóricos em suas fundações; eles se escoravam no fato de que a teoria física fundamental, a mecânica quântica, não parecia capaz de admitir uma descrição deste tipo. De certa forma, a estrutura global dos princípios variacionais encontrou similaridade nos fenômenos quânticos, que têm na globalidade uma de suas características marcantes.

O quadro I resume, em uma listagem cronológica, algumas das principais contribuições referentes aos princípios variacionais na física.

**QUADRO I - PRINCÍPIOS VARIACIONAIS NA FÍSICA**

	<b>Princípio Variacional</b>
Heron de Alexandria (c.75)	A luz segue o trajeto mais curto em meios homogêneos (reflexão).
Ibn Haytham (1039)	A luz segue o caminho mais fácil (menor resistência).
Fermat (1662)	Princípio do mínimo tempo: a luz segue o caminho mais rápido na reflexão e na refração.
Leibniz (1710)	Luz segue o caminho mais fácil (menor resistência).
Maupertuis (1744)	Formula o <i>Princípio da Mínima Ação</i> : a luz segue o caminho que minimiza essa quantidade. Tenta estender o princípio para a mecânica.
Euler (1744)	Estabelece o <i>Princípio da Mínima Ação</i> para a mecânica, válido no caso de energia constante.
Hamilton (1834)	Introduz o <i>Princípio de Hamilton</i> . Analogia entre a ótica e a mecânica.
Helmholtz (1887)	Princípio variacional para o eletromagnetismo. Formula o problema variacional inverso.
Hertz (1894)	Princípio variacional de novo tipo, com características locais, como lei básica da física.
Volterra (1913)	Teorema geral sobre o problema inverso do cálculo variacional.
Hilbert e Einstein 1916)	Princípio variacional para a relatividade geral.
De Broglie (1923)	Ondas de matéria: unificação do Princípio de Fermat e do Princípio de Maupertuis.
Feynman (1948)	Generalização do princípio variacional para a mecânica quântica.

### III O artigo de Maupertuis: “Acordo entre diferentes leis da natureza que até agora pareciam incompatíveis” [Mémoires de l’Académie des Sciences de Paris, 417 - 426 (1744)]

Não se deve exigir que os diversos meios para aumentar nossos conhecimentos conduzam-nos às mesmas verdades, mas seria desanimador ver as proposições, que são apresentadas pela Filosofia como verdades fundamentais, serem desmentidas pelos raciocínios da Geometria ou pelos cálculos da Álgebra. Um exemplo memorável dessa contradição se situa numa das áreas mais importantes da Física. Depois da renovação das ciências, ou mesmo desde suas origens, não se fez descoberta mais bela do que aquela que se refere às leis que a luz obedece, quando ela se move num meio uniforme ou quando encontra corpos opacos e é refletida nas superfícies, ou, ainda, quando corpos transparentes obrigam-na a mudar de direção ao atravessá-los. Essas leis constituem os fundamentos de toda a ciência da luz e das cores.

No entanto, talvez se pudesse demonstrar melhor sua importância se, ao invés de apresentar um assunto tão extenso, me detivesse somente em uma parte, oferecendo apenas casos mais limitados e melhor conhecidos. Ou se dissesse que essas leis são os princípios sobre os quais se apóia essa arte admirável que, quando em um velho todos os órgãos se enfraquecem, sabe devolver a seus olhos sua primitiva força e dar-lhes mesmo uma força que não receberam da natureza. É essa arte que estende nossa visão aos lugares mais longínquos do espaço, que a leva até às menores partes da matéria e que nos faz descobrir objetos cuja visão pareceria interdita aos homens.

As leis obedecidas pela luz, quando ela se move em um meio uniforme, ou quando encontra corpos onde não pode penetrar, eram já conhecidas pelos Antigos. A lei que determina o trajeto que ela segue ao passar de um meio a outro só foi conhecida a partir do século passado. Snellius descobriu-a, Descartes tentou explicá-la e Fermat criticou essa explicação. Desde essa época, o assunto tem sido objeto de pesquisa dos maiores geômetras, sem que até aqui se tenha conseguido conciliar essa lei com outra que a Natureza deve seguir ainda mais inviolavelmente.

Eis as leis que a luz segue. A primeira é: **em um meio uniforme ela se move em linha reta.** A segunda: **quando a luz encontra um corpo em que**

**não pode penetrar, ela é refletida, e o ângulo de sua reflexão é igual ao ângulo de sua incidência.** Isso quer dizer que, após sua reflexão, a luz faz, com a superfície do corpo, um ângulo igual àquele sob o qual ela o encontrou.

A terceira lei é: **quando a luz passa de um meio transparente para o outro, seu trajeto, após encontrar o novo meio, faz um ângulo com o trajeto anterior, e o seno do ângulo de refração está sempre na mesma razão com o seno do ângulo de incidência.** Se, por exemplo, um raio de luz, que passa do ar para a água, se quebra de forma que o seno do ângulo de sua refração seja três quartos do seno de seu ângulo de incidência, o seno de sua refração será sempre três quartos do seno de sua nova incidência, sob qualquer outra obliquidade em que ele encontre a superfície da água.

A primeira dessas leis é comum à luz e a todos os corpos que se movem em linha reta, a menos que alguma força estranha os desvie. A segunda é a mesma que segue uma bola elástica lançada contra uma superfície dura. A mecânica demonstra que uma bola que encontra tal superfície é refletida com um ângulo igual àquele sob o qual ela a havia encontrado e é isso que a luz faz. Mas é preciso também que a terceira lei seja explicada de maneira igualmente satisfatória. Quando a luz passa de um meio a outro, os fenômenos são diferentes daqueles que ocorrem quando uma bola atravessa diversos meios. De qualquer modo que se tente explicar a refração, encontram-se dificuldades que não foram ainda superadas. Não citarei todos os grandes homens que trabalharam sobre esse assunto. Seus nomes formariam uma lista tão numerosa que seria um ornamento inútil para esta memória e a exposição de seus sistemas seria uma obra imensa. Mas reduzirei a três grupos todas as explicações que esses autores têm dado sobre a reflexão e a refração da luz.

O primeiro grupo abrange as explicações daqueles que pretenderam deduzir a refração dos princípios mais simples e mais comuns da Mecânica. O segundo grupo abrange as explicações que, além dos princípios da Mecânica, supõem uma tendência da luz em direção aos corpos, seja considerando-a como uma atração da matéria, seja como o efeito de uma causa, qualquer que ela seja. O terceiro grupo abrange, finalmente, as explicações que se têm tentado tirar de princípios metafísicos, das leis às quais a Natureza parece ter sido sujeita, por uma Inteligência superior que, na produção de seus efeitos, a faz sempre proceder da maneira mais simples.

Descartes e aqueles que o têm seguido estão no primeiro grupo. Eles consideraram o movimento da luz como o de um projétil que, ao encontrar uma superfície

que não cede de forma alguma, ricocheteia em direção ao lugar de onde veio; ou que, ao encontrar um meio que cede, continua a avançar, mudando apenas a direção do trajeto. Se a forma pela qual esse grande filósofo pretendeu explicar esses fenômenos é imperfeita, ele tem o mérito de haver tentado deduzí-la da mecânica mais simples. Vários matemáticos revelaram alguns paralogismos que escaparam a Descartes e fizeram ver a falha de sua explicação.

Newton, sem esperança de deduzir os fenômenos da refração daqueles que descrevem os choques de um corpo contra obstáculos, ou daqueles em que os corpos são lançados em um meio que resiste diferentemente a eles, recorreu à sua atração. Essa força de atração, presente em todos os corpos na proporção de sua quantidade de matéria, uma vez admitida, explica da maneira mais exata e mais rigorosa os fenômenos da refração. Clairaut, em uma excelente memória sobre esse assunto, não somente tornou clara a insuficiência da explicação cartesiana, mas, admitindo uma tendência da luz para os corpos transparentes e considerando-a como causada por alguma atmosfera que produzisse os mesmos efeitos da atração, deduziu dela os fenômenos da refração com a clareza que costuma trazer aos assuntos que analisa.

Fermat foi o primeiro a perceber a falha da explicação de Descartes. Também ele, aparentemente, ficou sem esperanças de deduzir os fenômenos da refração daqueles de um projétil lançado contra obstáculos ou movendo-se em meios resistentes. Mas não recorreu nem à atmosfera ao redor dos corpos nem à atração, embora saibamos que esse último princípio não lhe era desconhecido nem desagradável. Buscou a explicação desses fenômenos em um princípio bem diferente e puramente metafísico.

Todo mundo sabe que quando a luz ou qualquer outro corpo vai de um ponto a outro, em uma linha reta, o faz pelo caminho mais curto e de menor tempo. Sabe-se também, ou pelo menos pode-se saber facilmente, que, quando a luz é refletida, ela segue também o caminho mais curto e mais rápido. Demonstra-se que um projétil que deve ir de um ponto a outro, depois de ter sido refletido por um plano, precisa fazer, sobre este plano, um ângulo de reflexão igual ao de incidência, para seguir o caminho mais curto e de menor tempo. Porque se esses dois ângulos forem iguais, a soma das duas linhas, pelas quais o projétil vai e vem, é a mais curta e é percorrida no tempo mais curto do que a soma de quaisquer outras duas linhas que fizessem ângulos desiguais.

Eis aí, portanto, o movimento direto e o movimento refletido da luz, que parecem depender de uma lei metafísica que afirma: **a natureza na produção de seus efeitos age sempre pelos meios mais simples.** Se um corpo deve ir de um ponto a outro, sem encontrar

qualquer obstáculo, ou se deve fazê-lo depois de ter encontrado um obstáculo invisível, a natureza o conduzirá pelo trajeto mais curto e no tempo mais rápido.

Para aplicar esse princípio à refração, consideremos dois meios permeáveis à luz e separados por um plano comum a eles. Vamos supor que o ponto de onde um raio de luz parte esteja em um desses meios e que aquele ponto onde ele deve chegar esteja no outro meio, mas que a linha que liga estes pontos não seja perpendicular à superfície desses meios. Suponhamos ainda que, por uma razão qualquer, a luz se mova em cada meio com velocidades diferentes. É claro que a linha reta que liga os dois pontos será sempre o caminho mais curto para ir de um ponto ao outro, mas não será o trajeto de tempo mais curto. Como esse tempo depende das diferentes velocidades que a luz tem nos diferentes meios, o raio de luz para gastar o menor tempo possível no trajeto, deverá, ao encontrar a superfície comum, se quebrar de maneira que a maior parte de seu trajeto se faça no meio onde se move mais rápido e a menor parte ocorra no meio onde se move mais lentamente.

É o que a luz parece fazer quando passa do ar à água: o raio se quebra de maneira que a maior parte de seu trajeto se encontra no ar e a menor na água. Assim então, como seria bastante razoável supor, se a luz se movesse mais rápido nos meios mais tênues que nos mais densos - se ela se movesse mais rápido no ar do que na água - ela seguiria aqui o trajeto que a conduziria o mais rapidamente possível de seu ponto de partida até o de chegada. Foi por esse princípio tão verossímil que Fermat resolveu o problema: a luz, que na sua propagação e na sua reflexão se move segundo o tempo mais curto possível, seguiria também essa mesma lei em sua refração. Ele não hesita em acreditar que a luz se move com maior facilidade e mais rapidamente nos meios mais tênues do que naqueles onde, num mesmo espaço, encontraria uma quantidade de matéria maior. Com efeito, poder-se-ia acreditar à primeira vista que a luz atravessaria mais facilmente e mais rapidamente o cristal e a água do que o ar e o vazio?

Vemos também vários dos mais célebres matemáticos compartilharem do sentimento de Fermat. Leibniz é aquele que lhe deu mais destaque por causa de seu prestígio e por uma análise muito elegante que deu ao problema. Ele encantou-se tanto com o princípio metafísico, por encontrar nele suas *causas finais*, às quais, sabemos, era tão ligado, que tomou como fato indubitável que a luz se move mais rápido no ar do que na água ou no vidro. Tudo se passa, no entanto, ao contrário, como Descartes o afirmou em primeiro lugar: a luz se move mais rápido nos meios mais densos e, embora a explicação que ele deduziu fosse insuficiente, sua

falha não invalida a suposição que fazia. Todos os sistemas que dão alguma explicação plausível dos fenômenos da refração ou supõem o paradoxo ou o confirmam.

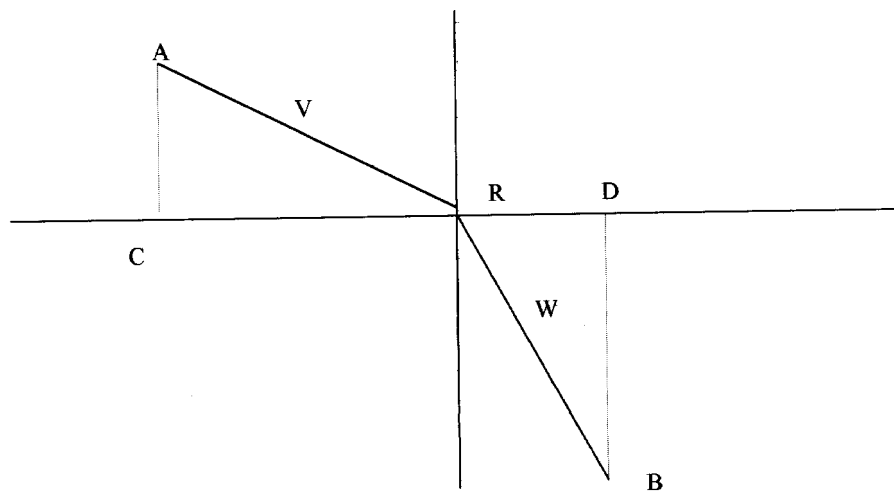
Dado esse fato - que **a luz se move mais rápido nos meios mais densos** - todo o edifício que Fermat e Leibniz construíram é destruído. A luz quando atravessa meios diferentes não vai nem pelo caminho de menor distância nem pelo de menor tempo. O raio que passa do ar à água, fazendo a maior parte do trajeto no ar, chega mais tarde do que chegaria se fizesse a menor parte dele no ar. Pode-se ver, na memória de Mairan sobre a reflexão e a refração, a história da disputa entre Fermat e Descartes e o embaraço e a impotência em que até agora nos encontramos para conciliar a lei da refração com o princípio metafísico.

Meditando profundamente sobre esse assunto, pensei se a luz, que abandona o caminho mais curto (ou a linha reta) quando passa de um meio a outro, não poderia também deixar de seguir o caminho mais rápido. Com efeito, que preferência deveria ter aqui o tempo sobre o espaço? A luz não podendo mais seguir ao mesmo tempo pelo trajeto mais curto e pelo mais rápido, por que iria por um deles e não pelo outro? De fato, ela não segue nenhum dos dois, ela toma um caminho que tem

uma vantagem mais real: **o caminho que ela toma é aquele no qual a quantidade de ação é mínima**. Falta explicar agora o que entendo por *quantidade de ação*. Quando um corpo é levado de um ponto a outro, é necessário para isto uma certa ação. Essa ação depende da velocidade que o corpo tem e do espaço que percorre, mas ela não é nem a velocidade nem o espaço tomados separadamente. A quantidade de ação será tanto maior quanto maior for a velocidade do corpo e quanto maior for o caminho percorrido. Ela é proporcional à soma dos espaços multiplicados cada um pela velocidade com a qual o corpo os percorre. É essa quantidade de ação que é aqui o verdadeiro dispêndio da Natureza e o que ela economiza o mais possível no movimento da luz.

Consideremos dois meios diferentes, separados por uma superfície comum representada pela linha CD. A velocidade da luz no meio que está em cima é  $V$  e a velocidade no meio que está em baixo é  $W$ . Seja um raio de luz AR que, partindo de um ponto dado  $A$ , deve chegar ao ponto  $B$ . Para encontrar o ponto  $R$ , onde o raio deve se quebrar, busco o ponto onde ele, ao se quebrar, torna mínima a quantidade de ação. Logo,  $V \cdot (\underline{AR}) + W \cdot (\underline{RB})$  deve ser um mínimo. Daí,

$$V \cdot [\underline{AC}^2 + \underline{CR}^2]^{1/2} + W \cdot [\underline{BD}^2 + \underline{CD}^2 - 2\underline{CD} \cdot \underline{CR} + \underline{CR}^2]^{1/2} = \text{mínimo.}$$



Como AC, BD e CD são constantes, temos:

$$V \cdot (\underline{CR}) \cdot d(\underline{CR}) / [\underline{AC}^2 + \underline{CR}^2]^{1/2} - W \cdot (\underline{CD} - \underline{CR}) \cdot d(\underline{CR}) / [\underline{BD}^2 + \underline{DR}^2]^{1/2} = 0,$$

donde

$$V \cdot (\underline{CR}) / (\underline{AR}) = W \cdot (\underline{DR}) / (\underline{BR}) \Rightarrow [(\underline{CR}) / (\underline{AR})] / [\underline{DR} / (\underline{BR})] = W / V,$$

ou seja, o seno da incidência está para o seno da refração na razão inversa das velocidades que a luz tem em cada meio.

Todos os fenômenos da refração estão agora de acordo com o grande princípio: a natureza, na produção de seus efeitos, age sempre pelas vias mais simples. Desse princípio se segue que, quando a luz passa de um meio a outro, o seno do ângulo de refração está para o seno do ângulo de incidência na razão inversa das velocidades da luz em cada meio.

Mas será que essa quantidade de ação, que a Natureza economiza no movimento da luz através de meios diferentes, é também poupada quando a luz é refletida pelos corpos opacos ou se propaga em um meio uniforme? Sim, essa quantidade é sempre a menor possível. Nos dois casos, da reflexão e da propagação, mantendo-se a mesma velocidade para a luz, a menor quantidade de ação fornece tanto o caminho mais curto como o caminho mais rápido. Mas esse caminho, mais rápido e mais curto, é apenas uma consequência da quantidade de ação mínima e foi essa consequência que Fermat e Leibniz tomaram como princípio. O princípio verdadeiro uma vez descoberto, me permite deduzir todas as leis que a luz obedece, seja em sua propagação, seja em sua reflexão e refração. Guardo para nossas assembléias particulares a demonstração geométrica do que afirmo.

Conheço a repugnância que vários matemáticos têm pelas *causas finais* aplicadas à física e concordo com eles até certo ponto. Não é sem perigo que as introduzimos. O erro em que caíram homens como Fermat e Leibniz ao segui-los apenas confirma quanto seu uso é perigoso. Pode-se, no entanto, dizer que não foi o princípio que os conduziu ao erro, foi a precipitação com a qual eles tomaram como princípio o que não era mais do que consequência.

Não se pode duvidar que todas as coisas sejam regidas por um Ser supremo que, ao mesmo tempo que imprimiu forças à matéria que atestam sua potência, a destinou a executar tarefas que confirmam Sua sabedoria. E a harmonia desses dois atributos é tão perfeita que, sem dúvida, todos os fenômenos da Natureza poderão ser deduzidos de cada um tomado separadamente. Uma mecânica cega e necessária obedece ao traçado da Inteligência mais esclarecida e mais livre e se o nosso espírito fosse suficientemente vasto, ele veria igualmente as causas dos fenômenos físicos, seja calculando as propriedades dos corpos ou buscando o que houvesse de mais conveniente para ser executado por eles.

O primeiro desses meios está mais ao nosso alcance,

mas não nos leva muito longe. O segundo às vezes nos escapa, porque não conhecemos bem qual é a intenção da Natureza e porque podemos nos enganar sobre a *quantidade* que devemos considerar como o *dispêndio* da natureza. Parece que os antigos filósofos deram os primeiros passos neste tipo de Matemática. Buscaram as razões metafísicas nas propriedades dos números e dos corpos; e quando disseram que a ocupação de Deus era a Geometria, falavam certamente dessa ciência que compara as obras de Sua potência com as visões de Sua sabedoria. Não eram geômetras o suficiente para a tarefa pretendida: o que nos deixaram ou tem pouco fundamento ou não é inteligível. A perfeição que a Arte adquiriu depois deles nos levou mais próximo de conseguir realizá-la, e contribuiu para isso talvez mais do que toda a vantagem que esses grandes gênios tiveram sobre nós.

## References

1. L. Landau et E. Lifchitz, *Mécanique*, Éditions Mir, Moscou, 1966.
2. E. Noether, *Invariante Variationsprobleme*, Nachr. Wiss. Göttigen **253**, 57 (1918). [Tradução para o inglês: Transp. Theory Stat. Phys. **1**, 186 (1971)].
3. C. W. Kilminster, *Hamiltonian Dynamics*, Longman, Londres, 1964.
4. *Actes de la Journée Maupertuis*, CNRS-Vrin, 1975.
5. A. I. Sabra, *Theories of light from Descartes to Newton*, Cambridge University Press, New York, 1981.
6. L. R. Freitas, I. C. Moreira e R. Valois, *O Princípio de Mínima Ação na Física: história e significado*, Supl. Ciência e Cultura **37**, 332 (1985).
7. P. Brunet, *Étude Historique sur le Principe de la Moindre Action*, Hermann et Cie, Éditeurs, Paris, 1938.
8. W. Yourgrau and S. Mandelstam, *Variational Principles in Dynamics and Quantum Theory*, W. B. Saunders Company, Philadelphia, 1968.
9. M. Planck, *Vorträge und Erinnerungen*, Stuttgart, 1949.
10. I. C. Moreira, *Fermat X Cartesianos: uma economia na natureza?*, em: *O legado científico de Descartes*, Saul Fuks (ed.), Relume-Dumará, Rio de Janeiro, 1998.
11. R. Descartes, *Discours de la Méthode plus La Dioptrique, Les Météores et La Géométrie*, Fayard, Paris, 1987.
12. *Oeuvres de Fermat*, P. Tannery et C. Henry (eds.), 4 vols, Paris, 1897-1912.
13. C. Huygens, *Tratado sobre a luz*, Cadernos de História e Filosofia da Ciência, Suplemento 4, CLE-UNICAMP, 1986.

14. I. Newton, *Opticks*, Dover Publications, New York, 1979.
15. W. Leibniz, *Unicum opticae, catoptricae et dioptricae principium*, Acta Eruditorum 185 (1682).
16. P.-L. M. de Maupertuis, *Accord des différentes lois de la nature qui avaient jusqu'ici paru incompatibles*, Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, 417 (1744).
17. P.-L. M. de Maupertuis, "Les lois du mouvement et du repos, déduites d'un principe de métaphysique", Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, 267 (1746).
18. P.-L. M. de Maupertuis, *Essai de cosmologie*, Berlin, 1750.
19. D'Arcy, "Réflexions sur le principe de la moindre action de M. de Maupertuis", Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, 1749.
20. P.-L. M. de Maupertuis, "Réponse à un mémoire de M. D'Arcy sur la moindre action, inserée dans le volume de 1749 de l'Académie des Sciences de Paris, Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, 1752.
21. D'Arcy, "Réplique à un mémoire de M. de Maupertuis sur le principe de la moindre action", Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, 1752.
22. S. Krönig, *Recueil d'écrits sur la question de la moindre action*, Leyde, 1752.
23. "Examen de la dissertation de M. le professeur Koenig inserée dans les Actes de Leipzig pour le mois de mars 1751", Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, 219 (1751).
24. L. Euler, "Harmonie entre les principes generaux de repos et de mouvement de M. de Maupertuis", Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, VII (1751).
25. L. Euler, "Sur le Principe de la Moindre Action", Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin VII, 199 (1751).
26. C. Lanczos, *The variational principles of mechanics*, University of Toronto Press, Toronto, 1960.
27. J. Lagrange, *Mécanique Analytique*, Paris, 1788.
28. W. R. Hamilton, "On general method in dynamics", Phil. Trans. Roy. Soc. 247 (1834)
29. D. Poisson, *Traité de Mécanique*, 2 vol., Paris, 1811.
30. E. Mach, *The Science of Mechanics*, Open Court Publ., La Salle, Illinois, 1960.
31. H. von Helmholtz, "Über die physikalische Bedeutung des Princips der kleinsten Wirkung", Crelle's Journal 100, 137 (1886).
32. V. Volterra, *Leçons sur les fonctions de ligne*, Gauthier-Villars, Paris, 1913.
33. H. Hertz, *The principles of mechanics*, Dover, New York, 1956.
34. A. Einstein, "Hamilton's Principle and the General Theory of Relativity", 1916, in *The Principle of Relativity*, Dover, New York, 1952.
35. D. Hilbert, *Göttinger Nachr.*, Part 3, 1915.
36. L. de Broglie, *Philosophical Magazine* 47, 446 (1924).
37. M. Born, "Cause, purpose and economy in natural laws", *Proc. Roy. Inst.* vol. XXX, Part iii, 1939.
38. R. Feynman, "The Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics", *Reviews of Modern Physics* 20, 367 (1948).