

Ondas Estacionárias Longitudinais no Tubo de Chamas*

(Stationary Longitudinal Waves in the Flaming Tube)

Antonio Carlos Baratto

Departamento de Física, Centro de Ciências Exatas

Universidade Federal do Espírito Santo - UFES

Av. Fernando Ferrari, s/n 29060-900 - Vitória - ES

Trabalho recebido em 7 de fevereiro de 1997

Apresenta-se uma solução para o problema do diagrama sinuoso das chamas no Tubo de Chamas, baseada num tratamento em termos da vazão média temporal do gás, pelos furos, ao longo do tubo. Esta vazão é obtida pela aplicação da equação de Bernoulli ao escoamento do gás pelos furos. O resultado obtido está em bom acordo com o observado no experimento.

In this work we present a solution to the phenomenon of the sinusoidal diagram of the flames in the flaming tube. By means of Bernoulli's equation it is attempt to find the time average flow through the holes along the tube. Our results are in good agreement with the observed behavior of the experiment.

1 Introdução

O Tubo de Chamas é um aparato experimental tradicionalmente usado para demonstrar a existência de ondas sonoras estacionárias numa coluna de gás. Muito embora seja freqüentemente usado como uma muito bonita demonstração, nem sempre a explicação do fenômeno é convincente [1-2], sendo mesmo, por vezes, flagrantemente equivocada, apresentando o fenômeno como devido a diferenças na pressão média ao longo do tubo [3].

O experimento consiste de um tubo longo ($\pm 2m$), fechado numa das extremidades e tendo um alto-falante na outra extremidade. Ao longo do tubo, longitudinalmente, há uma série de pequenos furos, espaçados de cerca de 2 cm. Gás (GLP) é injetado no tubo e sai pelos furos. Inflamando-se o gás que sai pelos furos tem-se uma linha de chamas cuja altura pode ser controlada pela vazão imprimida ao gás.

O alto-falante é alimentado por um gerador de sinal senoidal, cuja freqüência pode ser variada. Em certas freqüências as alturas das chamas ao longo do tubo apresentam um aspecto sinuoso estacionário, indicando

uma condição de ressonância.

Figura 1

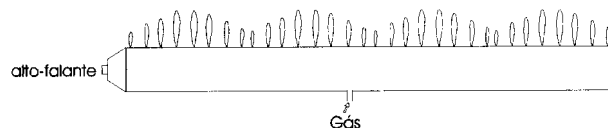


Figura 1.

2 Condição de Ressonância

Busquemos, primeiro, estabelecer as condições para a existência de ondas estacionárias no tubo.

O alto-falante cria, na extremidade esquerda do tubo (em $x=0$), uma perturbação periódica longitudinal, de amplitude B pequena, e freqüência ω .

Chamemos de X o deslocamento de uma infinitesimal camada de gás, na direção x , a partir de sua posição de equilíbrio x .

* Trabalho realizado com suporte financeiro de VITAE e CAPES

A perturbação iniciada pelo alto-falante se propaga pelo tubo, devendo obedecer à equação de movimento:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2}$$

onde v é a velocidade do som no gás, e pode ser dada em termos do módulo volumétrico de elasticidade adiabático (K_{ad}) e da densidade (ρ) do gás por:

$$v = \left(\frac{K_{ad}}{\rho} \right)^{1/2}$$

Como o tubo, de comprimento L , é fechado à direita, o deslocamento do gás, aí, é nulo. Devemos, pois, buscar soluções estáveis para as perturbações ao longo do tubo do tipo:

$$X(x, t) = f(x) \cos \omega t = A \sin(kx + \alpha) \cos \omega t$$

(onde $k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$) e que satisfaçam às condições de contorno:

$$X(0, t) = B \cos \omega t$$

$$X(L, t) = 0$$

Temos, pois: $X(L, t) = 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{\omega}{v}L + \alpha\right) = 0$ Assim:

$$\frac{\omega}{v}L + \alpha = n\pi \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\alpha = n\pi - \frac{\omega}{v}L$$

Mas:

$$X(0, t) = B \cos \omega t = A \sin \alpha \cos \omega t$$

Portanto:

$$B = A \sin \alpha \Rightarrow A = \frac{B}{\sin \alpha}$$

$$A = \frac{B}{\sin\left(n\pi - \frac{\omega L}{v}\right)}$$

ou

$$X(x, t) = \frac{B}{\sin\left(n\pi - \frac{\omega L}{v}\right)} \sin\left(kx + n\pi - \frac{\omega L}{v}\right) \cos \omega t$$

Vemos que, quando $\omega L/v = n\pi$, a amplitude das perturbações se tornará virtualmente infinita, não obstante a amplitude da perturbação inicial (B) ser pequena. Isso caracteriza um comportamento ressonante. Essa

divergência só não se manifesta na prática devido à existência de forças dissipativas não consideradas nesse tratamento simples.

As condições de ressonância são, portanto:

$$kL = n\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}L = n\pi \Rightarrow \lambda = \frac{2L}{n}$$

Teremos nodos de deslocamento (anti-nodos de pressão) em $x = L$ e (aproximadamente) em $x = 0$. Em termos da pressão, a onda estacionária pode ser escrita:

$$P(x, t) = P_0 \cos kx \cos \omega t$$

3 Ondas longitudinais estacionárias

Antes de prosseguir é instrutivo procedermos à visualização de um modelo sobre como se comporta uma coluna de gás na ressonância, isto é, quando nela se estabelece uma onda longitudinal estacionária.

Vimos que a expressão que descreve o deslocamento de uma camada de gás, a partir da sua posição de equilíbrio, em função do tempo deve ser do tipo:

$$X(x, t) = X_0 \sin kx \cos \omega t$$

A figura 2 apresenta uma série de instantâneos do comportamento de algumas camadas do gás, tomados a intervalos temporais regulares de $1/24$ do período. Nesta série foram calculadas as posições das camadas nos diversos instantes de tempo tomando, para a onda estacionária, uma amplitude (exagerada em relação a qualquer intensidade razoável de som) de $X_0 = 2,0\text{cm}$, e um comprimento de onda $\lambda = 20,0\text{cm}$.

Observe-se que, nos nodos de deslocamento, localizados nas posições 0, 10, 20 e 30, a pressão apresenta a máxima variação em relação à pressão média no tubo.

Figura 2

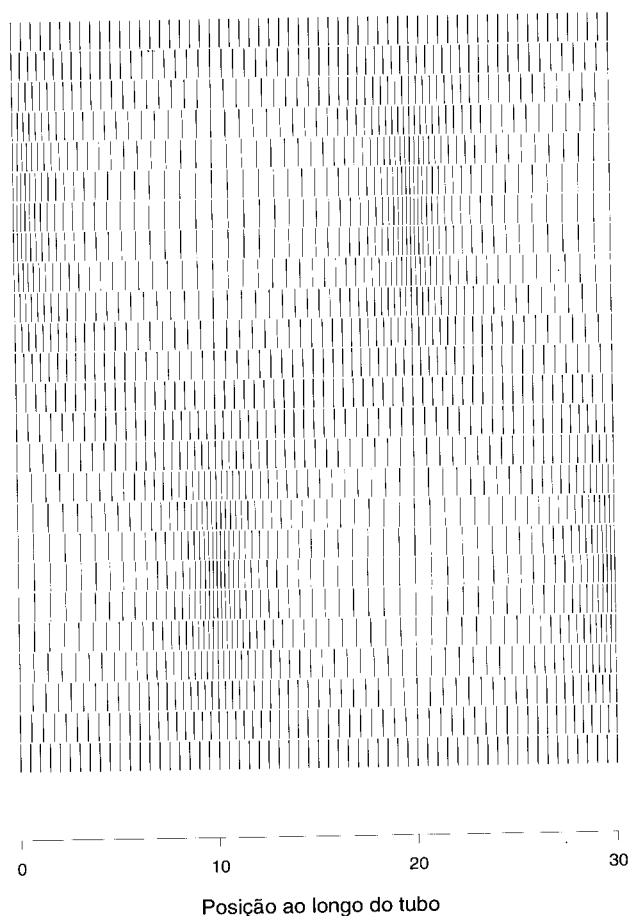


Figura 2.

4 Ondas estacionárias - Diagramas das chamas

Na Figura 3 está esquematizada a situação física do problema.

Na figura, P_a é a pressão atmosférica, ΔP_a é a sobrepresão dentro do tubo e P_0 é a amplitude da onda

estacionária de pressão. Supomos $P_0 \ll \Delta P_a < P_a$.

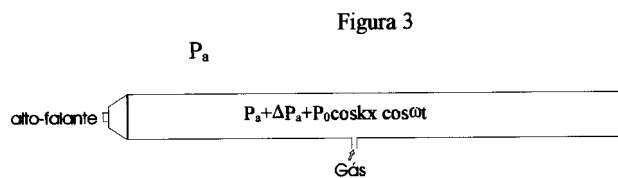


Figura 3.

Na ausência da onda estacionária as alturas das chamas são iguais. Na presença da onda estacionária as alturas das chamas apresentam um comportamento característico.

A primeira pergunta evidente frente ao comportamento do Tubo de Chamas na ressonância é: “o que causa o diagrama sinuoso das chamas?”

E a primeira resposta evidente será: “as variações na pressão média ao longo do tubo!”:

$$\Delta P = \Delta P_a + P_0 \cos kx \cos \omega t$$

Ora, a pressão média é a mesma ao longo do tubo!!
Pois a média temporal de $\cos \omega t$:

$$\left(\overline{\cos \omega t} = \frac{1}{T} \int_0^T \cos \omega t dt \right)$$

é nula.

Apliquemos a equação de Bernoulli (Daniel-1738) ao escoamento do gás pelos furos do tubo, sendo P_1 e P_2 as pressões no exterior e no interior do tubo.

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_1 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2$$

onde o índice “2” se refere ao interior do tubo. Como o tubo é horizontal os terceiros termos se cancelam mutuamente. O segundo termo da direita se anula pois $v_2 \simeq 0$. Assim:

$$P_a + \frac{1}{2} \rho v^2 = P_a + \Delta P_a + P_0 \cos kx \cos \omega t$$

$$v^2(x, t) = \frac{2}{\rho} (\Delta P_a + P_0 \cos kx \cos \omega t) = \frac{2 \Delta P_a}{\rho} \left(1 + \frac{P_0}{\Delta P_a} \cos kx \cos \omega t \right)$$

$$v(x, t) = \left(\frac{2\Delta P_a}{\rho} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{P_0}{\Delta P_a} \cos kx \cos \omega t \right)^{1/2}$$

A velocidade média temporal pelos furos ao longo do tubo será:

$$\overline{v(x)} = \frac{1}{T} \int_0^T v(x, t) dt$$

onde T é o período da onda estacionária.

$$\overline{v(x)} = \left(\frac{2\Delta P_a}{\rho} \right)^{1/2} \frac{1}{T} \int_0^T \left(1 + \frac{P_0}{\Delta P_a} \cos kx \cos \omega t \right)^{1/2} dt$$

Uma grande dificuldade é que a integral em questão é muito complicada (embora não pareça, à primeira vista).

Contornamos esse problema fazendo a expansão do integrando, o que pode ser feito, equivalentemente, pelo Teorema Binomial ou em série de Taylor. Fazendo:

$$y = \frac{P_0}{\Delta P_a} \cos kx \cos \omega t \quad ,$$

tem-se

$$f(y) = (1 + y)^{1/2}$$

$$f(y) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} y + \frac{f''(0)}{2!} y^2 + \dots \quad (\text{Série de Taylor})$$

ou

$$(1 + y)^n = ny + \frac{n(n-1)}{2!} y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} y^3 + \dots \quad (\text{Teorema Binomial})$$

Ambos os procedimentos darão como resultado:

$$f(y) = 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{16}y^3 - \frac{5}{128}y^4 + \dots$$

substituindo:

$$\left(1 + \frac{P_0}{\Delta P_a} \cos kx \cos \omega t \right)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2} \frac{P_0}{\Delta P_a} \cos kx \cos \omega t - \frac{1}{8} \left(\frac{P_0}{\Delta P_a} \cos kx \right)^2 \cos^2 \omega t +$$

$$+ \frac{1}{16} \left(\frac{P_0}{\Delta P_a} \cos kx \right)^3 \cos^3 \omega t - \frac{5}{128} \left(\frac{P_0}{\Delta P_a} \cos kx \right)^4 \cos^4 \omega t + \dots$$

As integrais dos termos ímpares em $\cos \omega t$ se anulam. Desprezando os termos maiores que 3ª ordem:

$$\overline{v(x)} = \left(\frac{2\Delta P_a}{\rho} \right)^{1/2} \left[\frac{1}{T} \int_0^T dt - \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{8} \left(\frac{P_0}{\Delta P_a} \cos kx \right)^2 \cos^2 \omega t dt \right]$$

fazendo $Z = \omega t \Rightarrow dZ = \omega dt$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 Z dZ = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$$

Assim:

$$\overline{v(x)} = \left(\frac{2\Delta P_a}{\rho} \right)^{1/2} \left[1 - \frac{1}{16} \left(\frac{P_0}{\Delta P_a} \right)^2 \cos^2 kx \right]$$

O fluxo médio temporal de gás, ou vazão, em cada furo de área A , em função da posição x , será:

$$\overline{\varphi(x)} = A \overline{v(x)} = A \left(\frac{2\Delta P_a}{\rho} \right)^{1/2} \left[1 - \frac{1}{16} \left(\frac{P_0}{\Delta P_a} \right)^2 \cos^2 kx \right]$$

Obtivemos, assim, uma expressão para o fluxo de gás pelos furos em função da posição x . A rigor as alturas das chamas não precisam obedecer necessariamente à mesma função, embora seja razoável supor alguma proporcionalidade entre a altura da chama e o fluxo. Pode-se ver que, onde a pressão não varia, isto é, num nodo de pressão (antinodo de deslocamento), o fluxo é maior e também maior a velocidade média do gás (chama mais alta).

A condição para chama mínima é:

$$\cos^2 kx = 1 \Rightarrow kx = n\pi \Rightarrow x = \frac{n}{2}\lambda \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

A distância entre dois mínimos (ou dois máximos) consecutivos é $\frac{\lambda}{2}$, o que pode ser medido com uma régua. Conhecendo a frequência ν de excitação (do

som) temos, finalmente:

$$v = \lambda\nu$$

5 Bibliografia

- 1 RESNICK, R., HALLIDAY, D. *Física*. Livros Técnicos e Científicos editora S.A, vol.2. p. 146, 1981.
- 2 SEARS, F. W., ZEMANSKY M. W. *Física - Mecânica, Calor, Acústica*. Ao Livro Técnico Ltda, p. 461, 1963.
- 3 FREIER, G. D, ANDERSON, F. J. A. *Demonstration Handbook for Physics*. American Association of Physics Teachers, p. 5-8, 1985.