A Crônica do Cálculo: Vb. Após Newton e Leibniz - Século XIX*

José Maria Filardo Bassalo
Departamento de Física da UFPA,
66075-900 - Belém, Pará
e-mail:bassalo@amazon.com.br
home-page: http://amazon.com.br/bassalo

Trabalho recebido em 4 de novembro de 1996

Esta **Crônica** mostra como se desenvolveu, no Século XIX, o que hoje conhecemos como **Cálculo Diferencial e Integral**. Nela, estudaremos o desenvolvimento desse Cálculo devido aos trabalhos realizados (principalmente por Bolzano, Cauchy, Fourier, Abel, Dirichlet, Riemann, Weierstrass e Cantor) no sentido de consolidar os conceitos sobre a diferenciabilidade, a integrabilidade, e a representação das funções de uma variável real em séries trigonométricas.

This **Chronicle** shows how was developped that today means **Integral and Differential Calculus**. In it, we will study the development of this Calculus due to the work realized (principally by Bolzano, Cauchy, Fourier, Abel, Dirichlet, Riemann, Weierstrass and Cantor) with the intention to consolidate the concepts on the differentiability, the integrability and the representation of the single-valued real functions by trigonometric series.
PALAVRAS-CHAVE: Cálculo Diferencial, Cálculo Integral, Séries, Análise Matemática.

Nas quatro primeiras partes da Crônica,[1] tratamos do desenvolvimento do **Cálculo Diferencial e Integral** desde a Antiguidade até o Século XVIII. Na quinta parte, estudaremos o desenvolvimento desse Cálculo no Século XIX. Contudo, como esse desenvolvimento teve vários desdobramentos dando origem a novas disciplinas da Matemática, dividimos essa quinta parte em duas etapas. Na primeira etapa,[2] tratamos dos trabalhos que contribuíram para consolidar os conceitos sobre a diferenciabilidade, a integrabilidade, e a representação em séries trigonométricas das funções de uma variável real. Nesta segunda etapa,[3] faremos o estudo das equações diferenciais parciais e ordinárias, das funções de uma variável complexa, e do cálculo das variações.

Na Crônica referente ao Século XVIII,[4] vimos que o estudo de alguns problemas físicos relacionados com sistemas vibrantes, com o movimento dos fluidos, e com a atração gravitacional de corpos de diversas formas, fez com que físicos e matemáticos lidassem com as primeiras equações em derivadas parciais. No Século XIX, estudos aprofundados dos fenômenos físicos acima referidos, mostraram que essas equações podem ser resumidas em dois tipos: **equação do potencial** e **equação de ondas**. Por outro lado, ainda no Século XIX, o estudo da difusão do calor nos corpos levou a um terceiro tipo de equação em derivadas parciais: **equação do calor**.

Com efeito, na Crônica anterior[5] vimos que o estudo da condução do calor em corpos de formas especiais (retângulo, anel, esfera, cilindro e prisma) levou o matemático francês Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), em 1807, a apresentar sua célebre equação (na atual notação):

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial z^2} = \mathrm{k}^2\ \frac{\partial T(x,t)}{\partial t}\ ,$$

*Este artigo é em homenagem aos meus amigos, o saudoso MÁRIO TASSO RIBEIRO SERRA (1932-1975), com quem realizei meus primeiros estudos sobre as Funções Especiais e o Cálculo das Variações, e ARTEMIDORO CABRAL DE MELLO (n.1925), professor aposentado do Departamento de Matemática da UFPA, os primeiros professores de Variável Complexa da UFPA.

onde **T** representa a temperatura do corpo, **k** a sua condutibilidade térmica, (x, y, z) significam as coordenadas espaciais e **t**, o tempo. Naquela mesma Crônica, vimos que Fourier resolveu essa **equação do calor** (hoje, **equação de Fourier**), por intermédio de um tipo especial de série infinita - a **série trigonométrica** - hoje conhecida como **série de Fourier**.[6]

Ainda no começo do Século XIX, a equação apresentada pelo matemático francês Pierre Simon Laplace (1749-1827), em 1787, isto é: $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$, onde V(x, y, z) representa o potencial gravitacional em pontos dentro ou fora do corpo que exerce a atracção gravitacional, foi generalizada pelo matemático francês Siméon Denis Poisson (1781-1840), em trabalho de 1813,[7] ao mostrar que a mesma não se aplica quando (x, y, z) é interno aquele corpo e, portanto, neste caso, V deveria satisfazer a seguinte equação:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\rho ,$$

(na notação atual $\Delta V = -4\pi\rho$) onde ρ(x, y, z) é a densidade do corpo. Nesse e em outros trabalhos realizados por Poisson,[8] ele mostrou a utilidade dessa função V em problemas elétricos e magnéticos. Por exemplo, usando essa função, demonstrou que no interior dos condutores a força eletrostática resultante é nula.

Assim, conhecida a equação de Poisson, e seu caso particular, a equação de Laplace (hoje, reunidas com o nome de **Equação do Potencial**), o problema a ser enfrentado era o de resolvê-la. (Observe-se que a equação de Fourier, recai numa equação de Laplace, quando se considera o caso estacionário.) Os trabalhos realizados pelos matemáticos no primeiro quartel do Século XIX indicavam que para resolver a equação de Laplace-Poisson em uma determinada região, era necessário conhecer duas funções arbitrárias, respectivamente, o valor de **V** e o de sua derivada na fronteira da região. Por outro lado, a solução da equação de Laplace-Fourier exigia apenas o conhecimento da temperatura na fronteira. Desse modo, uma das funções arbitrárias necessárias para resolver o problema do potencial deveria ser fixada de uma outra maneira.

A dificuldade apontada acima foi tratada pelo matemático inglês George Green (1793-1841). Com efeito, ao estudar os trabalhos de Poisson, Green percebeu que poderia usar a função potencial **V** para estudar problemas estáticos relacionados com eletricidade e magnetismo. Assim, numa brochura de divulgação privada e intitulada *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism* (*Um Ensaio sobre a Aplicação da Análise Matemática às Teorias da Eletricidade e do Magnetismo*), de 1828,[9] Green demonstrou o seguinte teorema (hoje, o famoso **teorema de Green**):

$$\int_v U \, \Delta V \, dv + \int_s U \, \frac{\partial V}{\partial n} \, ds = \int_v V \, \Delta U \, dv + \int_s V \, \frac{\partial U}{\partial n} \, ds ,$$

onde U e V satisfazem a equação de Laplace, e **n** é normal a fronteira da região e dirigida para o seu interior.[10]

Usando esse teorema, Green demonstrou que: V = $-\frac{1}{4\pi} \int_s \bar{V} \, \frac{\partial U}{\partial n}$ ds, onde $\bar{V}$ é o valor de V na fronteira do corpo, e U representa uma função que satisfaz as seguintes condições: a) U = 0 na fronteira do corpo; b) U se comporta como $\frac{1}{r}$ para qualquer ponto P do interior do corpo; c) U satisfaz a equação de Laplace. Para Green, essas condições permitiam calcular facilmente U e, portanto, a função V.[11]

Em 1833,[12] Green aplicou seu teorema para estudar o potencial gravitacional V de elipsóides com densidade variável. Nessa ocasião, demonstrou que quando V é conhecido na fronteira de um corpo e não apresenta singularidades no interior do mesmo, então V satisfaz a equação de Laplace (ΔV = 0) na região interna ao corpo. Para realizar essa demonstração, Green assumiu que V minimiza a seguinte integral (na atual notação):[13]

$$\int_v \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 \right] \mathrm{dv} .$$

Novas contribuições ao estudo da equação do potencial foram apresentadas pelo matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855), em 1839,[14] ocasião em que demonstrou rigorosamente a equação de Poisson: $\Delta V = -4\pi\rho$, e por Lamé, conforme já destacamos, ao introduzir novos tipos de coordenadas curvilíneas.[15]

Um outro tipo de equação em derivadas parciais que teve um grande desenvolvimento no Século XIX foi a denominada **equação de ondas**, que apresenta a seguinte forma (em notação de hoje): $\Delta u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$, sendo **c** constante. Esse tipo de equação já havia sido estudada no Século XVIII pelos matemáticos, o inglês Brook Taylor (1685-1731) (1714), o francês Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) (1746), e os suíços Leonhard Euler (1707-1783) (1749) e Daniel Bernoulli (1700-1782) (1753), ao ser tratado o problema da corda vibrante.[16] Contudo, no decorrer do Século XIX novos usos daquela equação foram encontrados, principalmente no desenvolvimento da teoria da elasticidade (vibração de corpos sólidos e propagação da onda elástica correspondente), bem como no estudo da propagação de ondas sonoras e luminosas.

Entre 1808 e 1818, Poisson foi um dos primeiros a estudar a equação de ondas indicada acima, com condições iniciais. Com efeito, em trabalho publicado em 1818,[16] Poisson obteve uma expressão analítica (escrita em termos de integrais envolvendo coordenadas esféricas) para a propagação da onda u(x,y,z,t) cujo estado inicial era descrito pelas condições: u(x,y,z,0) = ϕ_o(x,y,z) e $\frac{\partial u(x,y,z,0)}{\partial t} = \phi_1$(x,y,z).[17]

Um método diferente para resolver a equação de ondas com condições iniciais foi desenvolvido por Riemann em sua pesquisa sobre a propagação de ondas sonoras com amplitude finita, no caso uni-dimensional. Assim, ao considerar que a pressão **p** de um gás depende de sua densidade ρ, Riemann demonstrou que um distúrbio original no gás se propaga em duas ondas, com direções opostas. E mais ainda, uma vez que ondas de fases com ρ grande viajam mais rapidamente, então elas poderiam alcançar suas predecessoras e, desse modo, ondas de rarefação seriam mais grossas, e as ondas de condensação mais finas, resultando em **ondas de choque**.

Em seu trabalho sobre as ondas sonoras, de 1858-1859, [18] Riemann considerou uma equação diferencial linear da forma:

$$\mathrm{L(u)} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + \mathrm{Fu} = 0 \ ,$$

onde **D**, **E** e **F** são funções contínuas de **x** e **y**, e diferenciáveis até segunda ordem. O problema colocado por Riemann era o de determinar **u**, conhecendo-se **u**, $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial u}{\partial y}$, ao longo de uma curva no plano (x,y).

Para resolver esse problema, Riemann desenvolveu um método (mais tarde aplicado à teoria das equações diferenciais hiperbólicas) e que se resume em encontrar a função **v** (chamada **função de Riemann**, e que hoje representa uma função de Green G) que satisfaz a equação adjunta:

$$\mathrm{M(v)} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial (Dv)}{\partial x} - \frac{\partial (Ev)}{\partial y} + \mathrm{Fv} = 0 \ ,$$

com **v** satisfazendo as equações:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \mathrm{Dv}, \ \ \frac{\partial v}{\partial x} = \mathrm{Ev} \ ,$$

ao longo das características x = ξ e y = η, e sendo v = 1 no ponto (ξ, η).[19]

Um novo método de resolver uma equação de ondas relaciona-se com o chamado **problema estacionário**, no qual há interesse apenas em estudar as oscilações harmônicas simples de um determinado sistema vibrante. Para isto, basta assumir que u(x,y,z,t) = w(x,y,z) e^{ikt}, e então a equação de ondas transforma-se em (na atual notação):

$$\Delta w + k^2 \mathrm{w} = 0 \ ,$$

onde **k** é uma constante que se relaciona com o comprimento de onda λ da oscilação, através da expressão: $\lambda = \frac{2\pi}{k}$.

Enquanto físicos e matemáticos procuravam encontrar soluções particulares para essa equação de ondas reduzida, o físico e fisiologista alemão Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821-1894) em seu trabalho realizado em 1860,[20] sobre as oscilações do ar em um tubo com uma extremidade aberta, obteve uma solução geral para a mesma, razão pela qual ela ficou conhecida como **equação de Helmholtz**. Para encontrar tal solução, Helmholtz usou $\frac{e^{-ikr}}{4\pi r}$ como uma das funções no teorema de Green (1828), e obteve (na notação de hoje):

$$\mathrm{w(P)} = -\frac{1}{4\pi} \iint \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial w}{\partial n} dS + \frac{1}{4\pi} \iint w \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right) \mathrm{dS} \ ,$$

onde **r** representa a distância de **P** a um ponto variável da fronteira S. Assim, de posse dessa solução estacionária, Helmholtz encontrou a solução da equação de ondas dependente do tempo (ainda na notação de hoje):

$$\mathrm{u(P,t)} = -\frac{1}{4\pi} \iint \frac{e^{i\sigma[t - \frac{r}{c}]}}{r} \frac{\partial u}{\partial n} dS + \frac{1}{4\pi} \iint u \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{i\sigma[t - \frac{r}{c}]}}{r}\right) \mathrm{dS} \ ,$$

onde $\sigma = $ kc.[21]

Os fenômenos físicos vistos acima são descritos apenas por uma equação em derivadas parciais. Contudo, existem outros fenômenos físicos que para os descrever é necessário um sistema de equações em derivadas parciais. Dentre esses, destacam-se os relacionados ao movimento de fluidos, à distribuição de tensões em um meio elástico, e à propagação de distúrbios eletromagnéticos em meios materiais.

Conforme vimos em Crônica anterior,[22] Euler, d'Alembert e o matemático francês Joseph Louis Lagrange (1736-1813) estudaram, no Século XVIII, o movimento de fluidos através de um sistema de equações em derivadas parciais.[23] Contudo, como eles não levaram em consideração a viscosidade dos fluidos, esta foi tratada pelos matemáticos, os franceses Claude Louis Marie Henri Navier (1785-1836), em 1821, [24] e Poisson, em 1829,[25] e o inglês Sir George Gabriel Stokes (1819-1903), em 1845.[26] Esse tratamento recebeu posteriormente o nome de **equação de Navier-Stokes**, e é representado pelo seguinte sistema de equações em derivadas parciais (na atual notação):

$$\vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{v} = \frac{d\vec{v}}{dt},$$

onde ν é a **viscosidade cinemática**, e os demais elementos dessa equação têm os mesmos significados dos da **equação de Euler**.

Por outro lado, foi nos Séculos XVII e XVIII que os cientistas começaram a se preocupar com os problemas relacionados à elasticidade.[27] Contudo, no primeiro quartel do Século XIX, a esses problemas foi acrescentado um outro extremamente importante, qual seja, o de saber as propriedades elásticas do éter que permitiam a propagação da luz através dele.[28]

Navier, no trabalho referido anteriormente, apresentou as primeiras idéias para o desenvolvimento de uma teoria da elasticidade, ao supor que a matéria consistia de inumeráveis partículas puntuais que exerciam entre si forças ao longo da reta que as une; com isso, deduziu a equação de movimento para o vetor deslocamento $\vec{e}$ de uma partícula, e na qual introduziu a *constante de rigidez n*, que representava o poder de resistir à distorção apresentada pelo meio.[29]

Entre os que leram esse trabalho de Navier, estava o matemático francês Augustine Louis Cauchy (1789-1857) que se interessava pela teoria da elasticidade, desde que lera, em 1822, o trabalho de Fresnel sobre a teoria ondulatória da luz. Contudo, diferentemente de Navier, Cauchy tratou macroscopicamente as propriedades elásticas da matéria. Então, em 1828,[30] apresentou sua equação, análoga à de Navier, porém, com a introdução de mais uma constante (na notação moderna):

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial t^2} = -(k + \frac{4n}{3}) \nabla \nabla . \vec{e} - n \nabla \times \nabla \times \vec{e},$$

onde **k** é o **módulo de compressão**, que representa a relação entre a pressão aplicada em um corpo e acompressão cúbica resultante.[31]

Um outro sistema de equações em derivadas parciais, encontrado ainda no Século XIX, foi deduzido pelo físico e matemático escocês James Clerk Maxwell (1831-1879) ao formalizar, matematicamente, as leis empíricas do Eletromagnetismo, representadas por quatro equações em derivadas parciais - as hoje célebres **equações de Maxwell**[32] -, e apresentadas em seu famoso livro *A Treatise on Electricity and Magnetism*, editado em 1873. Trabalhando com essas equações, Maxwell demonstrou que a luz é uma onda eletromagnética, cujo meio de suporte é o **éter luminífero**.

Conforme vimos até aqui, nos Séculos XVIII e XIX, os matemáticos estudaram uma série de equações em derivadas parciais. Contudo, para resolvê-las, eles usaram alguns métodos que só se aplicavam em determinadas situações. Em vista disso, era necessário demonstrar teoremas gerais que pelo menos garantissem a existência da solução de uma dada equação. Assim, com esse objetivo, e ainda no Século XIX, muitos matemáticos trabalharam nesse sentido. Por exemplo, em 1842,[33] Cauchy demonstrou que qualquer equação diferencial parcial de ordem maior do que um, pode ser reduzida a um sistema de equações diferenciais parciais, e então ele tratou da existência de uma solução para esse sistema. Esse resultado de Cauchy foi aperfeiçoado, em 1875,[34] pela matemática russa Sofya Vasilyevna Kovalevskaya (1850-1891).[35]

Nas duas últimas décadas do Século XIX, Schwarz e o matemático francês Charles Emile Picard (1856-1941) trabalharam no sentido de encontrar a existência das primeiras **autofunções** e dos primeiros **autovalores** da equação: $\Delta u + \xi f(x,y)u = 0$.[36] Por sua vez, em 1894,[37] o matemático francês Jules Henri Poincaré (1854-1912) procurou encontrar as propriedades de todos os autovalores da equação $\Delta u + \lambda$u = f, com λ complexo, em uma região tri-dimensional, com u = 0 sobre a fronteira da mesma.

Notas e Referências Bibliográficas

1. BASSALO, J. M. F. 1996a. *A Crônica do Cálculo: I. Antes de Newton e Leibniz. Revista Brasileira de Ensino de Física, 18(2)*: 103-112; —— 1996b. *A Crônica do Cálculo: II. Na época de Newton e Leibniz. Revista Brasileira de Ensino de Física, 18(3)*: 181-190; —— 1996c. *A Crônica do Cálculo: III.Contemporâneos de Newton e Leibniz. Revista Brasileira de Ensino de Física, 18(4)*: 328-336; —— 1997a. *A Crônica do Cálculo: IV. Após Newton e Leibniz - Século XVIII. Revista Brasileira de Ensino de Física, 19(4)*: 400-422.

2. BASSALO, J. M. F. 1997b. *A Crônica do Cálculo: Va. Após Newton e Leibniz - Século XIX. Revista Brasileira de Ensino de Física, 19(4)*: 423-435.

3. Para escrever este artigo, consultamos os seguintes textos: BOS, H. J. M. 1985. *Curso de História da Matemática: Origens e Desenvolvimento do Cálculo*, Unidades 4 e 5, da Open University. Editora da Universidade de Brasília; BOYER, C. B. 1968. *A History of Mathematics*. John Wiley and Sons; KLINE, M. 1974. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Oxford University Press; TRUESDELL, C. A. 1968. *Essays in the History of Mechanics*. Springer-Verlag; WHITTAKER, E. 1951. *A History of the Theories of Aether and Electricity: The Classical Theory*. Thomas Nelson and Sons Ltd. Além desses livros, consultamos também alguns verbetes da *Encyclopaedia Britannica* (University of Chicago, 1988) e do *Dictionary of Scientific Biography* (Charles Scribner's Sons, 1981).

4. BASSALO (1996a), op. cit.

5. BASSALO (1996b), op. cit.

6. Em 1833 (*Journal de l'Ecole Polytechnique 14; Annales de Chimie et de Physique 53*), o matemático e engenheiro francês Gabriel Lamé (1795-1870) introduziu novos sistemas de coordenadas, envolvendo coordenadas curvilíneas (hoje, conhecidos como sistemas elipsoidal e hiperboloidal de uma e duas folhas) para resolver a equação do calor. Nesses trabalhos, ao estudar o caso estacionário (temperatura independente do tempo), Lamé demonstrou que poderia resolver a equação de calor correspondente (tipo equação do potencial), usando a técnica da separação de variáveis e, com isso, reduziu-a para três equações diferenciais ordinárias. Em 1839 (*Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 4*), Lamé introduziu um novo sistema de coordenadas (esferoconal: uma superfície esférica e duas cônicas) para também resolver a equação do calor geral e estacionária. Por fim em 1859, Lamé apresentou um estudo geral dos sistemas coordenados curvilíneos, no livro intitulado *Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications* (*Lições sobre as coordenadas curvilíneas e suas diversas aplicações*). Nesse livro, ele estendeu seu trabalho em teoria do calor na solução de vários problemas de natureza física, tal como a refração dupla na teoria da propagação da luz nos cristais e as condições de equilíbrio de uma casca esférica sob uma dada distribuição de cargas, na teoria da elasticidade.

7. Esse trabalho foi publicado no *Nouveau Bulletin de la Société Philomatique de Paris 3 (1813)*.

8. Os outros trabalhos de Poisson foram publicados nas *Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France 5 (1824); 6 (1826)*.

9. Esse livro de Green ficou desconhecido até ser descoberto pelo físico e matemático escocês William Thomson (Lord Kelvin) (1824-1907), em 1846, que o publicou no *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik 39 (1850); 44 (1852); 47 (1854)*.

10. Esse teorema também foi demonstrado independentemente pelo matemático russo Michel Ostrogradsky (1801-1861), que o apresentou à Academia de Ciências de São Petersburgo, em 1828, e foi publicado nas *Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de Saint-Petersbourg 1 (1831)*. É oportuno destacar que, em duas dimensões, esse teorema de Green-Ostrograddsky tem a seguinte representação (na atual notação):

$$\int_c [P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy] = \int_s \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{dxdy}\ .$$

11. Muito embora essa função U (denominada por Green de **função potencial** e, posteriormente, pelo matemático alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) de **função de Green**) parecesse a Green de fácil determinação, contudo, hoje sabe-se que não existe um método geral para encontrá-la. O mérito de Green foi o de encontrar um significado físico para a mesma.

12. Esse trabalho foi publicado em 1835, nas *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 5_3.

13. Essa condição foi encontrada pelo matemático alemão Gustav Peter Lejeune Dirichlet (1805-1859) nos trabalhos realizados em 1829 e 1837, nos quais estudou a convergência das séries de Fourier, e em 1850, quando tratou da integrabilidade da equação de Laplace (ΔV = 0) em regiões limitadas, e quando se conhecem os valores de V na fronteira dessas regiões. Hoje, depois de Riemann, esse problema é conhecido como o famoso **problema de Dirichlet** e assim enunciado: - "Dada uma região R limitada por uma curva fechada C e uma função f(x,y) contínua em C, encontrar uma função F(x,y) contínua em R e em C que satisfaz a equação de Laplace em R, e que seja igual a **f** em C." Esse problema também foi tratado por Thomson, em 1847 (*Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 12*), e por volta de 1850, ele denominou de **função harmônica** àquela que se enquadra no problema de Dirichlet. É importante ressaltar que, em 1870 (*Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig*), o matemático alemão Carl Gottfried Neumann (1832-1925) resolveu a equação de Laplace em uma determinada região, conhecendo apenas a derivada normal de **V** ($\frac{\partial V}{\partial n}$) na fronteira dessa região. Dessa maneira, Neumann apresentou a prova de existência de uma solução do problema de Dirichlet em três dimensões, conhecido desde então como o **problema de Neumann**. Ainda nesse mesmo ano de 1870 (*Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*), o matemático alemão Hermann Amandus Schwarz (1843-1921) apresentou a prova de existência de uma solução do problema de Dirichlet em duas dimensões.

14. Esse trabalho recebeu o título de: *Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs-und Abstossungs-kräfte* (*Teoremas Gerais sobre Forças Atrativas e Repulsivas que agem de acordo com o Inverso do Quadrado da Distância*).

15. As coordenadas curvilíneas de Lamé foram utilizadas pelo matemático alemão Heinrich Eduard Heine (1821-1881) em sua tese de doutoramento, em 1842 (publicada no *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik 26 (1843)*), na qual determinou o potencial no exterior e no interior de um elipsóide revolução, quando o valor desse potencial fosse conhecido em sua fronteira. Novas coordenadas curvilíneas foram utilizadas pelo matemático francês Emile Léonard Mathieu (1835-1900), em 1868 (*Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 13*) ao tratar as vibrações de uma membrana elíptica. Nessa ocasião, ele introduziu o sistema elíptico-cilíndrico e um novo tipo de função - a famosa **função de Mathieu** -, apropriada a esse tipo de sistema. Em 1869 (*Mathematische Annalen 1*), o matemático alemão Heinrich Weber (1842-1913) introduziu um novo sistema de coordenadas curvilíneas ao integrar a equação (na notação atual) Δu + k^{2}u = 0 no

domínio limitado por duas parábolas. Para realizar essa integração, Weber introduziu o sistema de coordenadas parabólicas e um novo tipo de função, hoje conhecida como **função de Weber** ou **função cilíndrica-parabólica**.

16. BASSALO (1996a), op. cit.

17. *Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France 3 (2) (1818).*

18. Veja-se a forma dessa expressão em KLINE (op. cit.).

19. Esse método foi publicado em *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 8 (1858-1859).*

20. Uma generalização desse trabalho de Riemann foi apresentada pelo matemático francês Paul Du Bois-Reymond (1831-1889), em 1889 (*Journal für die Reine und Angewandte Mathematik 104*). Nesse trabalho, ele apresentou uma classificação geral das equações diferenciais parciais de segunda ordem. Assim, dada a equação:

$$L(u) = R\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + S\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + T\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$+P\frac{\partial u}{\partial x} + Q\frac{\partial u}{\partial y} + Zu = 0,$$

onde os coeficientes são funções de **x** e **y**, e suas primeira e segunda derivadas são contínuas. Se acontecer que: TR - $S^2 > 0$, TR - $S^2 < 0$ ou TR - $S^2 = 0$, então, segundo Du Bois-Reymond, a equação diferencial correspondente será chamada, respectivamente, de **elíptica**, **hiperbólica** e **parabólica**.

21. Esse trabalho foi publicado no *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik 57 (1860).*

22. Essa fórmula foi generalizada pelo físico alemão Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887), em 1882 (*Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*), obtendo o seguinte resultado (na atual notação):

$$u(P,t) = -\frac{1}{4\pi}\int\int \frac{f[t - \frac{r}{c}]}{r}\, dS$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\int\int \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\phi[t - \frac{r}{c}]}{r}\right) dS\ ,$$

onde $\phi(t)$ representa o valor de **u** em qualquer ponto (x,y,z) da fronteira S no instante τ e $f(\tau)$ será o correspondente valor de $\frac{\partial u}{\partial n}$. Registre-se que Kirchhoff chegou a esse resultado estudando a difração de ondas sonoras, razão pela qual o mesmo ficou conhecido como **princípio de Huygens da Acústica**. Esse resultado também representa a generalização da fórmula de Poisson, de 1818.

23. BASSALO (1996a), op. cit.

24. Esse sistema é traduzido pela hoje conhecida **equação de Euler**:

$$\vec{F} - \frac{1}{\rho}\nabla p = \frac{d\vec{v}}{dt}\ ,$$

onde $\vec{F}$ é a força externa que atua no fluido; ρ é a densidade do fluido; **p** é pressão; $\vec{v}$ é a velocidade no fluido em qualquer ponto (x,y,z) e no instante **t**; e $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}.\nabla$.

25. O trabalho de Navier foi publicado em 1827, nas *Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France 7.*

26. O trabalho de Poisson foi publicado em 1831, no *Journal de l'Ecole Polytechnique 13.*

27. O trabalho de Stokes foi publicado em 1849, nas *Transactions of the Cambridge Philosophical Society 8.*

28. Os primeiros trabalhos sobre elasticidade foram realizados pelos físicos, o italiano Galileu Galilei (1564-1642), o inglês Robert Hooke (1635-1703), o francês Edmé Mariotte (1620-1684), e os suíços Euler e Daniel Bernoulli. Basicamente, procuravam encontrar as formas assumidas por certas peças (vigas, bastões e placas) sujeitas a tensões de tração e compressão.

29. A partir de 1815, o físico francês Augustin Jean Fresnel (1788-1827) começou a desenvolver um modelo matemático da teoria ondulatória da luz apresentada pelo físico holandês Christiaan Huygens (1629-1695), em 1678. Nesse modelo, a luz era considerada como um movimento ondulatório transversal que se propagava no **éter luminífero**, um meio considerado elástico.

30. A equação diferencial deduzida por Navier, apresenta a seguinte expressão (na atual notação):

$$\rho \, \frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial t^2} \; = \; - \, 3n \, \nabla \, \nabla . \vec{e} \; - \; n \, \nabla \, \times \, \nabla \, \times \, \vec{e} \; ,$$

onde ρ representa a densidade do meio elástico.

31. Esse trabalho foi publicado em *Exercices de Mathématiques 3 (1828)*.

32. Ainda em 1828 (*Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France 8*), Poisson resolveu essa equação de Cauchy, partindo da hipótese que o vetor $\vec{e}$ poderia ser considerado como a soma de dois vetores, isto é: $\vec{e} \; = \; \vec{b} \; + \; \vec{c}$, em que (na notação atual) $\vec{b}$ seria **irrotacional** ($\nabla \times \vec{b} = 0$) e $\vec{c}$ seria **solenoidal** ($\nabla . \vec{c} = 0$). Com essa hipótese, Poisson demonstrou que em um corpo elástico, as ondas que nele se propagam são de duas espécies: a **onda transversal** $\vec{c}$, com velocidade igual a $\sqrt{\frac{n}{\rho}}$, e a **onda longitudinal** $\vec{b}$, com velocidade igual a $\sqrt{k \; + \; \frac{4n}{3}}$.

33. Na linguagem moderna, em um meio material, as equações de Maxwell são as seguintes: $\nabla . \vec{D} \; = \; \rho$; $\nabla . \vec{B} = 0$; $\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$; $\nabla \times \vec{H} \; - \; \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \; = \; \vec{J}$, onde $\vec{B} \; = \; \mu \vec{H}$, $\vec{D} \; = \; \varepsilon \vec{E}$ e $\vec{J} \; = \; \sigma \vec{E}$. Nessas expressões, $\vec{E}$ é a intensidade do campo elétrico, $\vec{H}$ é a intensidade do campo magnético, $\vec{D}$ é a corrente de deslocamento, $\vec{B}$ é a indução magnética, $\vec{J}$ é a densidade de corrente elétrica, ε, μ e σ são, respectivamente, a constante dielétrica, a permeabilidade magnética e a condutibilidade do meio, e ρ é a densidade de carga elétrica.

34. Esses trabalhos de Cauchy foram publicados nos *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences 14,15 (1842)*.

35. Esse trabalho de Sofya foi publicado no *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik 80 (1875)*.

36. Os trabalhos de Cauchy e Sofya foram aperfeiçoados pelo matemático francês Édouard Jean Baptiste Goursat (1858-1936), em 1898 (*Bulletin de la Société Mathématique de France 26*).

37. Em 1885 (*Acta Societatis Scientiarum Fennicae 15*), Schwarz demonstrou a existência da função $\mathbf{U}_1$ que satisfaz a equação: $\Delta U_1 \; + \; k_1^2 f(x,y) U_1 = 0$, com $\mathbf{U}_1 = 0$, na fronteira da região considerada. Com o método utilizado, Schwarz calculou o primeiro autovalor k_1^2. Em 1893 (*Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences 117*), Picard estabeleceu a existência do segundo autovalor k_2^2.

38. Esse trabalho foi publicado no *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 8 (1894)*.