$\mathbf{v}\cos\theta$ ou $\mathbf{v}/\cos\theta$?

$\mathbf{v}\cos\theta$ or $\mathbf{v}/\cos\theta$?

Oscar Bolina*
Instituto de Física, Universidade de São Paulo
Caixa Postal 66318, 05315-970, São Paulo, SP, Brasil
e-mail: bolina@fma1.if.usp.br

J. Rodrigo Parreira
Instituto de Estudos Avançados
Rua Barão de Triunfo 375/304
04690-000, São Paulo Brazil

Recebido 25 de maio, 1998

Discutimos dois problemas de Física básica envolvendo situações aparentemente semelhantes que são frequentemente confundidas. Ambos os problemas se referem à simples determinação de componentes de vetores velocidade e aceleração. Também analisamos outros problemas correlatos no intuito de distinguir as situações apresentadas.

We discuss two problems of elementary Physics involving apparently similar situations which are frequently misinterpreted. Both problems deal with simple evaluation of components of velocity and acceleration vectors. We also analyze other related problems which help distinguish the situations presented.

1. Introdução

A primeira fórmula do título se refere à componente da velocidade de uma partícula em uma direção que forma um ângulo θ com o seu vetor velocidade $\vec{v}$.

O raciocínio que leva $v\cos\theta$ é frequentemente mal interpretado, e aplicado erroneamente, a situações aparentemente idênticas, como à mostrada na Fig. 1.

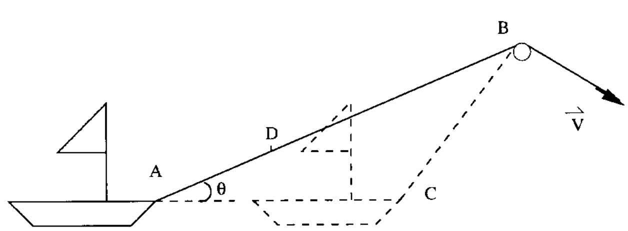

Figura 1. A corda é puxada com velocidade v.

Na Fig. 1, a corda atada ao barquinho é puxada com velocidade constante v por sobre um ponto fixo digamos uma polia em B [1].

*Apoio Financeiro FAPESP.

É a velocidade do barquinho $v\cos\theta$ quando a corda forma um ângulo θ com a superfície da água?

A decomposição de um vetor em componentes - que forneceria $v\cos\theta$ - à primeira vista parece levar ao mesmo resultado aqui.

O problema, porém, é mais sutil. Se não, vejamos: num pequeno intervalo de tempo Δt, o barquinho se move de A a C, enquanto um comprimento $v\Delta t$ da corda é recolhido. Do triângulo ABC, aplicando a lei dos co-senos, vem

$$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 - 2(AB)(AC)\cos\theta$$

Seja v_x a velocidade horizontal do barquinho quando o ângulo entre a corda e a superfície da água é θ. Sendo $AC = v_x\Delta t$ e $BC = AB - v\Delta t$ resulta desprezando termos quadráticos de Δt,

$$v_x = \frac{v}{\cos\theta} \qquad (1)$$

Para entender melhor o resultado acima, perceba que enquanto o barquinho se move de A a C sua velocidade na direção AB tem, de fato, uma componente v cos θ na direção horizontal, e uma componente v sin θ na direção vertical. *Mas essa não é toda a velocidade do barquinho!* Se fosse, logo o barquinho estaria *acima* da superfície da água (em D, a uma distância $v\Delta t$ de A), não *na* superfície da água! Durante o mesmo intervalo de tempo Δt, o barquinho também possui velocidade - seja ela v_p - na direção DC, como mostrado na Fig. 2. a fim de manter o barquinho se movendo horizontalmente, $v\sin\theta$ deve cancelar $v_p\cos\theta$, e a velocidade resultante, puramente horizontal, será $v\cos\theta + v_p\sin\theta = v/\cos\theta$.

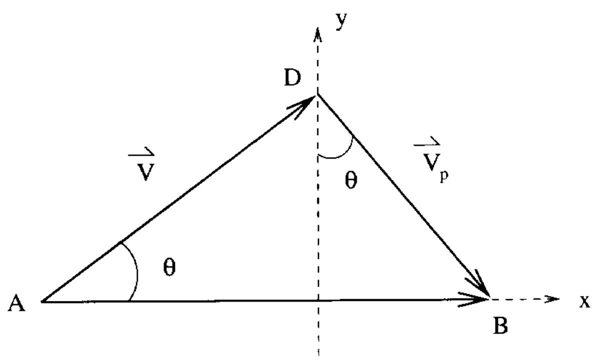

Figura 2. Composição de velocidades.

É possivel analisar esse problema também do ponto de vista da cinemática do corpo rígido [5]. Suponha que o segmento AD na Fig. 1 seja uma barra rígida movendo-se com velocidade v ao longo de seu comprimento AB, de modo que seu ponto inferior A seja vinculado a se mover horizontalmente com velocidade v_A (Fig. 3). Para que a barra se move como objeto rígido, a componente da velocidade do ponto A na direção AB tem de ser v, ou seja, $v_A\cos\theta = v$, que é (1) de novo.

Pode-se ser facilmente enganado por problema igualmente simples - agora envolvendo aceleração em que duas massas são ligadas por uma corda que passa por uma polia elevada em B, como na Fig. 4.

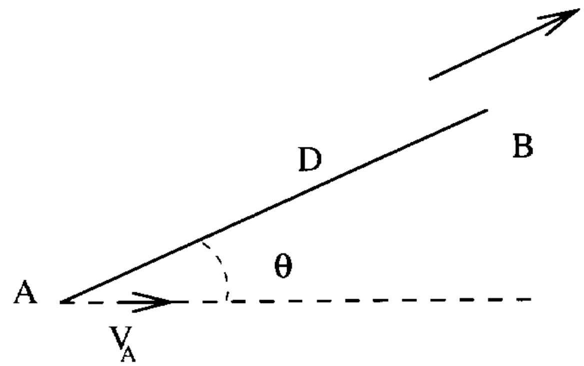

Figura 3. Movimento vinculado de uma barra.

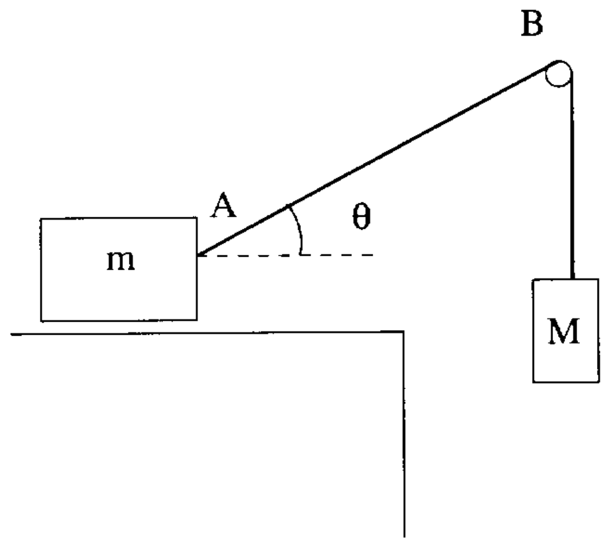

Figura 4. Relação entre as acelerações das massas.

A aceleração vertical a_y da massa em queda M supostamente é pequena a fim de que o movimento de m seja puramente horizontal. Seja a_x a aceleração horizontal da massa m.

Encontramos na referência [2] que a relação entre as acelerações, quando a corda forma um ângulo θ com a direção de movimento de m, é $a_y = a_x\cos\theta$. Esse resultado foi *corrigido* na referência [3], para a qual a relação apropriada deve ser $a_x = a_y\cos\theta$. A resposta correta foi dada em [4].

Deixamos ao leitor o verificar que a formula (1) vale também nesse caso, com a diferença que v - aqui a velocidade da massa em queda - é função do tempo, e que

$$a_y = a_x\cos\theta + \frac{v_x^2}{AB}\tan^2\theta$$

com v_x a velocidade da massa m.

Deve então ficar claro que, como a relação entre as velocidades depende de $\cos\theta$, e θ varia com o tempo, a relação entre as acelerações não pode ser simplesmente $a_y = a_x \cos\theta$.

Referências

1. B.B. Bukhovtsev, V.D. Krivtchenkov, G.Ya. Miakishev, I.M. Saraeva, *Problemas Selecionados de Física Elementar*, segunda edição, Mir, Moscou (1985).
2. C. H. Hayn, The Physics Teacher **25**, 293 (1987).
3. J. Richard Mowat, The Physics Teacher **29**, 31 (1991).
4. R. J. Sciamanda, The Physics Teacher **29**, 263 (1991).
5. Meng Zhaoyao, Physics Education **28**, 371 (1993).