O Impulso e o Movimento Circular Uniforme

(*Impulse and Uniform Circular Motion*)

Maria Teresinha X. Silva
Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS
Instituto de Física
Caixa Postal 15051 - 91501-970 - Porto Alegre, RS - Brasil
e-mail: teka@if.ufrgs.br

Nelson Toniazzo e Rolando Axt
Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul - UNIJUÍ
Departamento de Física, Estatística e Matemática
Caixa Postal 560 - 98700-000 - Ijuí, RS - Brasil

Recebido 2 de Dezembro, 1997

São analisadas as variações do vetor velocidade de um corpo em movimento circular uniforme para evidenciar a natureza vetorial da quantidade de movimento linear.

The vectorial nature of linear momentum is stressed by analysing changes in the velocity of a body in uniform circular motion.

1. Introdução

Quando um ponto material de massa m descreve um movimento circular uniforme, sua velocidade tangencial é constante em módulo mas varia permanentemente em direção. Sendo assim, a energia cinética dessa massa é constante e a quantidade de movimento linear é variável.

O objetivo deste texto é destacar a natureza vetorial da quantidade de movimento linear propondo o seguinte problema:

A figura 1 representa o vetor velocidade de uma massa m que descreve um movimento circular uniforme de período T sobre um círculo de raio R. As posições 1 e 2 definem o deslocamento de m em um intervalo de tempo T/2. Pergunta-se [1]: **Qual é o impulso sobre a massa m nesse intervalo de tempo (T/2)?**

A solução trivial deste problema é dada pela relação

$$\vec{I} = \Delta\vec{p},$$

donde resulta

$$|\vec{I}| = 2mv = \frac{4\pi mR}{T}, \qquad (1)$$

já que $v = 2\pi\ R/T$.

Observe-se que $|\Delta\vec{p}| = 2mv$ é equivalente à variação da quantidade de movimento linear de uma massa m que colide contra uma parede com velocidade $+\vec{v}$ e retorna dela com velocidade $-\vec{v}$ [2]. Embora à primeira vista este resultado pareça estranho para muitos alunos que, por intuição, acreditam ser $\Delta\vec{p}$ igual a zero (ou igual a $-m\vec{v}$), é por eles aceito sem maior relutância quando são alertados sobre a natureza vetorial de $\vec{p}$.

A solução do problema torna-se um pouco mais complicada quando se deseja calcular a integral $\vec{I} = \int \vec{F}dt$. Neste caso, é preciso identificar a força impulsiva, sem esquecer o seu caráter vetorial, e encontrar um modo de resolver a integral. A força centrípeta $\vec{F}_c$ é a única força que é exercida sobre m. Ao decompô-la em suas componentes nas direções x e y ($\vec{F}_x$ e $\vec{F}_y$ na figura 2), verifica-se desde logo que estas não são uniformes em módulo e podem sofrer inversão de sentido em um intervalo de tempo $T/2$. Portanto, resolver a integral supondo que a força impulsiva é a força centrípeta, tomada em módulo ($F_c = m\omega^2 R$) e esquecendo o seu caráter vetorial, levaria a um resultado incorreto para o impulso ($2\pi^2 mR/T$). Na figura 3, a área sob a reta

F_c representaria graficamente esta solução (incorreta), num intervalo de tempo $T/2$.

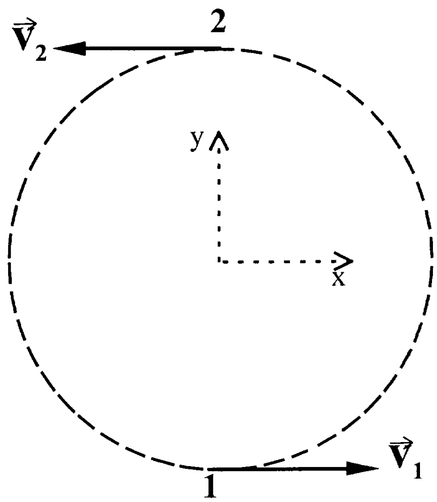

Figura 1. Deslocamento de m entre as posições inicial (1) e final (2).

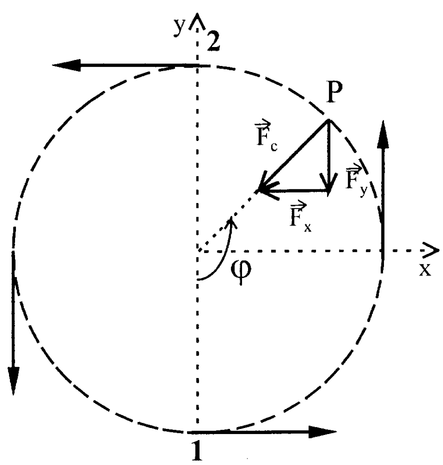

Figura 2. A força centrípeta $\vec{F}_c$ e suas componentes $\vec{F}_x$ e $\vec{F}_y$.

O cálculo do impulso exercido sobre a massa m, no deslocamente que sofre entre as posições 1 e 2, requer que analisemos os impulsos nas direções x e y separadamente.

Na direção y, o impulso líquido no intervalo de tempo em consideração é zero. F_y varia do seu valor máximo positivo, em $t = 0$, até o seu valor máximo negativo, em $t = T/2$, de modo que os impulsos sofridos nos sucessivos quartos de período cancelam-se mutuamente. Na figura 3, a área (nula) sob a curva F_y representa o impulso I_y.

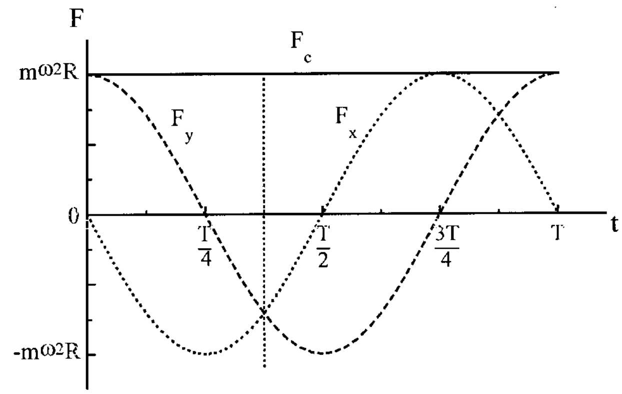

Figura 3. Representação gráfica de F_c (linha contínua) e de suas componentes F_x (linha pontilhada) e F_y (linha tracejada). A linha vertical identifica o ponto P da figura 2: $F_c = (F_x^2 + F_y^2)^{1/2}$.

Já na direção x, o impulso no mesmo intervalo de tempo é máximo. F_x varia de zero, em $t = 0$, a um valor máximo negativo, em $t = T/4$, e retorna novamente a zero em $t = T/2$. Durante esse intervalo de tempo, $\vec{F}_x$ tem sempre o mesmo sentido (contrário ao sentido de $\vec{v}$ na posição 1) e, no instante $T/4$, seu módulo é igual ao da força centrípeta F_c. Na figura 3, a área (negativa) sob a curva F_x representa o impulso I_x.

O problema resume-se, portanto, em analisar o movimento circular uniforme considerando a superposição dos movimentos harmônicos simples que correspondem às projeções do MCU sobre os eixos coordenados x e y.

Supondo-se que em $t = 0$ a massa m encontra-se na posição 1, as coordenadas de sua posição, em qualquer instante de tempo, são dadas por:

$$x = R\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

e

$$y = R\ \mathrm{sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right),$$

onde $\omega = 2\pi/T$ é a freqüência angular desse movimento.

Portanto, as componentes F_x e F_y da força centrípeta são, respectivamente,

$$F_x = ma_x = m\frac{d^2x}{dt^2} = -m\omega^2 R\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -F_c\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

e

$$F_y = ma_y = m\frac{d^2y}{dt^2} = -m\omega^2 R \text{ sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -F_c \text{ sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

As componentes do impulso sofrido pela partícula ao longo das direções x e y, no intervalo de tempo considerado, são dadas por:

$$I_x = \int_0^{T/2} F_x dt = -\frac{4\pi mR}{T}$$

e

$$I_y = \int_0^{T/2} F_y dt = 0.$$

Este resultado está em concordância com aquele obtido em (1) e o sinal negativo indica a reversão da velocidade entre as posições 1 e 2, ou seja, o sentido da variação da quantidade de movimento de m, contrário ao da sua velocidade inicial.

Adicionalmente, pode-se propor aos alunos a análise do impulso sobre m em outros intervalos de tempo representados na figura 3. Por exemplo, a variação da quantidade de movimento linear entre $T/8$ e $3T/8$ equivale à da colisão elástica de uma partícula contra uma parede rígida com um ângulo de incidência de 45°.

A descrição feita acima, considerando o MCU como uma superposição de dois movimentos harmônicos simples, oferece ainda uma alternativa [3] para a dedução da fórmula da força (aceleração) centrípeta, já que $|\vec{F}_c| = m\omega^2 R$ representa o valor máximo das componentes F_x e F_y exercidas sobre a massa m em MCU.

Referências

1. Rad, M. Sepehry. Shortcomings in physics education in Iran. Phys. Educ. **26** (6), 332 (1991).
2. Stinner, A. The story of force: from Aristotle to Einstein. Phys. Educ. **29** (2), 77 (1994).
3. Fitzpatrick, J. A. Derivation of centripetal acceleration by a momentum change. Phys. Educ. **30** (5), 264 (1995).