Problemas Interessantes em Física: O Quebra - Molas

Vanderlei S. Bagnato
Instituto de Física de São Carlos - USP
Caixa Postal 369 - CEP 13560 - 970 - São Carlos / SP.

Recebido 26 de abril, 1997

É comum notarmos a existência de quebra-molas ou lombadas em ruas e estradas. Normalmente o quebra-molas é constituído por uma saliência com variação contínua que tem por objetivo evitar que carros passem por ela com velocidade excessiva. A tentativa de ultrapassar estas barreiras com grande velocidade podem causar abruptas variações no molejo do veículo, podendo mesmo quebrá-lo, daío nome de quebra-molas (figura 1). Esta é, sem dúvida, uma situação física bastante interessante e, por isto, vamos analisá-la segundo as leis da mecânica. Dadas as características do veículo e geometria da lombada, pretendemos determinar o intervalo de velocidade onde a barreira é ultrapassada com segurança. Se o veículo fosse um sistema rígido (como é o caso da maioria das bicicletas, por exemplo) a passagem rápida por um quebra-molas poderia ter conseqüências extremamente trágicas. Mas um veículo automotor não pode ser visto desta forma. Nele estão presentes o amortecedor e o sistema de molas, agindo em conjunto de modo a evitar que o carro se chacoalhe muito ao enfrentar as irregularidades das vias. O molejo do carro é um elemento elástico que atua em paralelo com o amortecedor, um elemento viscoso para amortecimento. Este último tem a função de limitar as oscilações do veículo que seriam naturais ao molejo. Assim, é natural olharmos a parte oscilatória do veículo como um sistema massa mola amortecido. A lombada, que apresenta uma variação suave, pode ser vista como tendo uma variação representada por uma porção de uma função senoidal. O modelo que construiremos para o sistema de um veículo passando por um quebra-molas está mostrado na figura 2.

O carro de massa M desloca-se com velocidade v na direção x. O corpo massivo do veículo está ligado às rodas por um sistema elástico de constante de mola K associado em paralelo a um sistema amortecedor de constante de amortecimento η.

A lombada é parte de uma função do tipo $y' = y_0\text{sen}(2\pi\frac{x}{L})$ ou seja: altura y_0 e extensão $L/2$, como indicado na figura 2.

Ao percorrer a via, encontrando a lombada, o ponto de apoio do auto é forçado a acompanhar o perfil mostrado na figura 2, de modo que a mola sofrerá uma distensão que depende em que posição da lombada o carro se encontre. Como resultado de todos os elementos que compõem o sistema, a equação de movimento vertical para o centro de massa do carro (onde subtraimos da coordenada vertical do centro de massa do carro (y), a altura da lombada y').

$$M\frac{d^2y}{dt^2} = -K(y - y') - \frac{\eta dy}{dt} \qquad (1)$$

ou substituindo y':

$$M\frac{d^2y}{dt^2} = -Ky - \frac{\eta dy}{dt} + Ky_0\text{sen}2\pi\frac{x}{L} \qquad (2)$$

Como o carro desloca-se na direção x com velocidade v, $x = vt$ e a equação (2) pode ser reescrita na forma:

$$M\frac{d^2y}{dt^2} + Ky + \frac{\eta dy}{dt} = Ky_0\text{sen}\left(\frac{2\pi vt}{L}\right) \qquad (3)$$

Assim, o carro passando pela lombada é exatamente um oscilador harmônico amortecido e forçado e, desta maneira, o carro comporta-se segundo este bem conhecido sistema físico.

A grandeza $\omega = 2\pi\frac{v}{L}$ representa a freqüência oscilatória que a lombada procura imprimir ao carro quando este tem a velocidade v.

A solução para a equação (3) pode ser encontrada nos livros textos convencionais de mecânica para o curso básico [1,2], sendo escrita como $y(t) = A\text{sen}(\omega t + \varphi)$, que substituída na equação (3) permite obter A. A posição inicial do centro de massa do carro, ao iniciar a lombada, permite determinar a fase φ. Como a fase φ não é importante para nossa análise, não nos preocuparemos com ela. Após estas considerações, o deslocamento do centro de massa, enquanto viajando pela lombada, tem a forma:

$$Y = \frac{Ky_0/M}{\sqrt{\left[\left(\frac{2\pi\nu}{L}\right)^2 - \frac{K}{M}\right]^2 + \left(\frac{\eta}{M}\frac{2\pi\nu}{L}\right)^2}}\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi\nu t}{L} + \varphi\right) \quad (4)$$

Vemos facilmente que a amplitude com que o centro de massa do carro irá oscilar depende das características do molejo e do amortecedor do carro, das características geométricas da lombada, mas principalmente da velocidade do veículo.

Figura 1. Fotografia mostrando uma lombada convencional encontrada nas vias públicas. A lombada é normalmente suave, procurando forças a redução da velocidade dos veículos.

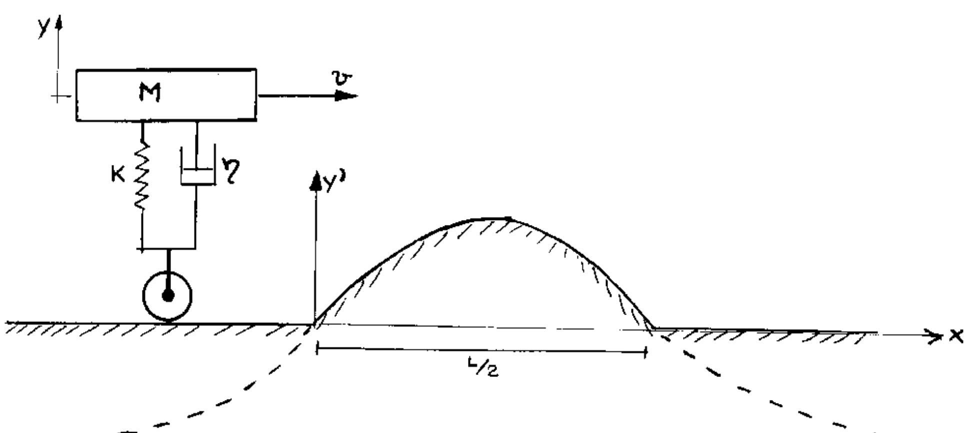

Figura 2. Modelo onde o veículo é visto como um sistema massa mola amortecido e a lombada como a porção positiva de uma função seno.

Quando o veículo passa pela lombada em baixa velocidade, a amplitude de oscilação ou do deslocamento do seu centro de massa fica reduzida a y_0, pois os termos dependentes da velocidade no denominador são desprezados. Neste caso, o carro acompanha suavemente a lombada, subindo e descendo em sincronismo com a mesma.

Quando o veículo tem velocidade ao redor de:

$$\frac{2\pi v}{L} = \left[\frac{K}{M} - \left(\frac{\eta}{M}\right)^2\right]^{1/2} \tag{5}$$

a amplitude de oscilação atinge seu maior valor (caso ressonante) causando considerável desconforto aos passageiros, que se não estiverem atentos, correm o risco de baterem suas cabeças no teto. Para evitar esta situação é importante que a velocidade esteja fora do regime de ressonância, ou seja, fora dos pontos onde a amplitude do deslocamento supere 50% de seu valor máximo. Assim, da expressão (4) podemos tirar que para a passagem pela lombada não ser traumática para os passageiros, devemos ter velocidade tal que:

$$\frac{2\pi v}{L} < \left[\frac{K}{M} - \left(\frac{\eta}{M}\right)^2 - \sqrt{\left(\frac{\eta}{M}\right)^4 + 12\left(\frac{\eta}{M}\right)^2 \frac{K}{M}}\right]^{1/2} \tag{6}$$

Por outro lado, quando a velocidade supera muito o valor acima mencionados em (5), a amplitude também começa a cair consideravelmente , mesmo que o ponto de apoio tenha que superar a lombada. Nesta situação o sistema de molejo sofre todo deslocamento, enquanto o centro de massa do veículo não se desloca. A compressão sofrida no sistema de molejo pode ser demasiadamente rápida, causando danos permanentes ao sistema (molas são "quebradas"). Para velocidades no intervalo tal que

$$\frac{2\pi \nu}{L} > \left[\frac{K}{M} - \left(\frac{\eta}{M}\right)^2 + \sqrt{\left(\frac{\eta}{M}\right)^4 + 12\left(\frac{\eta}{M}\right)^2 \frac{K}{M}}\right]^{1/2} \tag{7}$$

a passagem pela lombada não será muito desconfortável para os passageiros, mas poderá ser dramática para o carro.

Após termos entendido como funciona o quebra-molas, fica como exercício para o leitor considerar os valores numéricos de K, M e η, bem como a geometria das lombadas obtendo-se os vários limites de velocidade mencionados neste trabalho

Referências

1. *"Physics" por Eugene Hecht,* Cole Publish. Co, Califórnia - USA, 1994.
2. *"Física"* por D. Halliday e R. Resnick, Livros Técnicos e Científicos, Ed., Rio de Janeiro, 1976.