

Condição de Causalidade, Relações de Dispersão e o Modelo de Lorentz

(Causality Condition, Dispersion Relations and the Lorentz Model)

Márcio José Menon e Ricardo Paupitz Barbosa dos Santos*

Instituto de Física 'Gleb Wataghin'

Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP

13083-970, Campinas, SP, Brasil

Trabalho recebido em 30 de outubro de 1995

Discutimos alguns aspectos da metodologia científica associados ao estabelecimento de conexões entre resultados fenomenológicos obtidos através de modelos e princípios gerais (primeiros princípios) em teoria de campos. Tendo em mente estudantes de graduação, procuramos ressaltar esse tipo de estratégia abordando um exemplo específico, considerando como fenômeno físico a propagação de ondas eletromagnéticas em meios dielétricos, como modelo fenomenológico o Modelo de Lorentz, como teoria de campos a Eletrodinâmica Clássica e como princípio geral da teoria o Princípio de Causalidade. Apresentando em certo detalhe características associadas à causalidade, demonstramos que previsões específicas do modelo são típicas de classes gerais de sistemas físicos que obedecem às condições de causalidade e linearidade.

We discuss some aspects of the scientific methodology associated with the set up of connections between phenomenological results obtained through models and general principles (first principles) in field theory. Aiming to stress this kind of strategy to undergraduate students we consider an specific example taking as physical phenomena the electromagnetic wave propagation in dielectric medium, as phenomenological model the Lorentz oscillator model, as field theory the Classical Electrodynamics and as general principle of the theory, the Causality Principle. Presenting in some detail the characteristics associated to causality, we demonstrate that specific model predictions are typical of general classes of physical systems which obey causality and linearity conditions.

1. Introdução

Muitos estudantes no final de um curso de graduação podem ter uma visão da Física como um emaranhado de resultados e idéias sutis, sem muita correlação entre si. Isso pode ser decorrente do modo como as disciplinas são ministradas, sugerindo em muitos casos pacotes individuais e independentes de conhecimentos. Nem sempre é possível explicitar nos cursos o caráter global de muitos fenômenos, a sua inserção num contexto mais amplo, seja associado a princípios teóricos, seja associado a um tipo geral de abordagem matemática.

Além da importância pedagógica, uma preocupação

com o caráter global que pode estar associado a um dado fenômeno é também útil em várias áreas: na prática, a busca de correlações entre resultados fenomenológicos obtidos através de modelos e princípios gerais de uma teoria constitui importante estratégia no aprimoramento do próprio formalismo. Um exemplo atual pode ser visto na teoria de campos das interações nucleares (fortes), a Cromodinâmica Quântica. De fato, o problema associado à impossibilidade de essa teoria descrever colisões entre partículas na região de pequeno momento transferido (grande parâmetro de impacto) vem sendo abordado via modelos fenomenológicos [Matthiae 1994], [Menon 1993] e a estratégia essencial é

*Bolsista de Iniciação Científica, PIBIC-CNPq-UNICAMP

exatamente a busca de conexões entre resultados obtidos através de modelos e os primeiros princípios da teoria, isto é, a identificação de globalidades associadas aos fenômenos.

A nível de graduação os exemplos desse tipo de conexão modelo-teoria são inúmeros. Podemos citar as correlações Termodinâmica - Física Estatística, modelo de Bohr - Mecânica Quântica, resultados fenomenológicos da Mecânica (Clássica) e Óptica - Princípios Variacionais, etc...

Neste trabalho, através de um exemplo específico, visamos mostrar como se pode estabelecer uma conexão entre um dado resultado fenomenológico e um princípio geral de uma teoria mais ampla. Para tanto, consideramos como fenômeno físico a propagação de uma onda eletromagnética num meio dielétrico, como modelo fenomenológico o modelo de osciladores de Lorentz, como teoria de campos a Eletrodinâmica Clássica e como princípio geral da teoria, a Condição de Causalidade. Inicialmente, explicitamos uma característica fenomenológica, especificamente uma correlação observada entre as partes real e imaginária da função dielétrica prevista pelo modelo (seção II). Em seguida, de forma independente, discutimos vários aspectos da condição de causalidade (seção III), mostrando que essa correlação pode ser algebricamente demonstrada (seção IV) e que, portanto, *é característica de uma ampla gama de sistemas físicos*.

A essência do material aqui apresentado e discutido pode ser encontrada nos livros texto de Eletromagnetismo e Física Matemática. A novidade deste trabalho, acreditamos, está na ordem na qual os conceitos são introduzidos e no encadeamento das idéias. Essa característica é expressa pelo tratamento individual dado inicialmente ao Modelo de Lorentz e às propriedades gerais associadas à condição de causalidade (independentemente da eletrodinâmica) para só em seguida realizar a conexão fenomenologia-primeiros princípios. É nosso interesse também ressaltar certas características gerais associadas ao princípio de causalidade, nem sempre abordadas com algum detalhe nos cursos de graduação e que dizem respeito às Relações de Dispersão e Analiticidade.

Os tópicos aqui abordados podem ser encontrados, por exemplo, em [Jackson 1983], [Reitz, Milford e Christy 1991] e [Byron e Fuller 1992]. A Condição de Causalidade e as Relações de Dispersão são extensamente discutidas por [Nussenzveig 1972], vários aspectos do Modelo de Lorentz são revisados por [Christy

1972] e interpretações de sistemas causais via Funções de Green por [Stedman 1968].

Neste trabalho as grandezas complexas (constantes, funções, variáveis) são denotadas com o símbolo “ $\hat{}$ ” em cima da letra correspondente: $\hat{\epsilon}$, $\hat{\omega}$, $\hat{g}(\hat{\omega})$, etc...

II. Modelo de Lorentz e a Função Dielétrica

No modelo fenomenológico de Lorentz considera-se um meio não magnético polarizável como um conjunto de osciladores mecanicamente independentes, distribuídos de maneira isotrópica no espaço. Em cada átomo, um elétron ligado sofre a ação de uma força restauradora proporcional à distância da carga ao ponto de equilíbrio e seu movimento é amortecido por uma força proporcional à sua velocidade. A propagação de uma onda eletromagnética através desse meio pode ser representada por um campo elétrico variando harmonicamente com o tempo. Considera-se apenas o campo elétrico porque $v/c \ll 1$ para elétrons atômicos e moleculares, sendo portanto desprezível a interação associada à indução magnética [Vanderlinde, 1993].

Trata-se assim de um modelo estritamente clássico com a equação de movimento dos elétrons correspondendo à equação de um oscilador harmônico amortecido e forçado pelo campo da onda eletromagnética. Detalhes do modelo, conexões com as equações de campo (Maxwell) e definições das grandezas características do meio podem ser encontradas, por exemplo, em [Reitz, Milford e Christy 1991], [Jackson 1983] e o tratamento matemático do oscilador harmônico em [Symon 1982]. A seguir apenas explicitamos de forma resumida as equações de interesse.

Considerando um oscilador em uma dimensão, temos a equação de movimento

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{eE'}{m}, \quad (1)$$

onde $\omega_0^2 = k/m$, $\gamma = b/m$ e E' é o campo efetivo sobre a carga, dado por

$$E' = E + \eta P, \quad (2)$$

onde P é a polarização do material, ηP a contribuição dos arredores do oscilador e $\hat{E} \propto \exp(-i\omega t)$ é o campo da onda incidente, suposta monocromática. Com isso as soluções de (1) são do tipo

$$\hat{x}(t) = \frac{e E'_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \exp(-i\omega t), \quad (3)$$

onde E'_0 é a amplitude do campo E' .

A susceptibilidade χ do material é definida através da relação constitutiva

$$P = \chi E \quad (4)$$

e relaciona-se com a “constante” dielétrica ε por

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\chi. \quad (5)$$

Mostramos a seguir que o Modelo de Lorentz prevê que ε é uma função complexa da frequência da onda incidente e dos parâmetros do oscilador. De fato, se N é o número de osciladores por unidade de volume, com carga e , a equação (3) permite calcular a polarização,

$$P(t) = N e x(t).$$

Da expressão harmônica para \hat{E} e de (2) e (3) obtemos a relação

$$\hat{\chi}[-\omega^2 - i\gamma\omega + \omega_0^2] = [1 + \eta\hat{\chi}] \frac{[4\pi N e^2/m]^2}{4\pi}.$$

Definindo $\omega_p = 4\pi N e^2/m$ (denominada frequência de plasma) e introduzindo uma frequência efetiva¹

$$\omega_l^2 \equiv \omega_0^2 - \left(\frac{\eta}{4\pi}\right) \omega_p^2,$$

podemos obter a função dielétrica (5):

$$\hat{\varepsilon} = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_l^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}.$$

Vemos que de fato trata-se de uma função complexa da frequência da onda incidente, com partes real e imaginária dadas por

$$Re\{\hat{\varepsilon}(\omega) - 1\} = \frac{\omega_p^2(\omega_l^2 - \omega^2)}{(\omega_l^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \quad (6)$$

$$Im\{\hat{\varepsilon}(\omega)\} = \frac{\omega_p^2\gamma\omega}{(\omega_l^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \quad (7)$$

Na figura 1 mostramos um gráfico dessas funções, onde tomamos $\omega_l = 5$, $\gamma = 3$ e $\omega_p = 1$ em unidades SI.

Como discutido em detalhe nos livros de Eletromagnetismo, a parte imaginária de $\hat{\varepsilon}(\omega)$ é associada à absorção da onda incidente pelo meio e observa-se um pico de absorção na frequência de ressonância efetiva, região essa caracterizada por uma diminuição da parte real da função dielétrica (dispersão anômala).

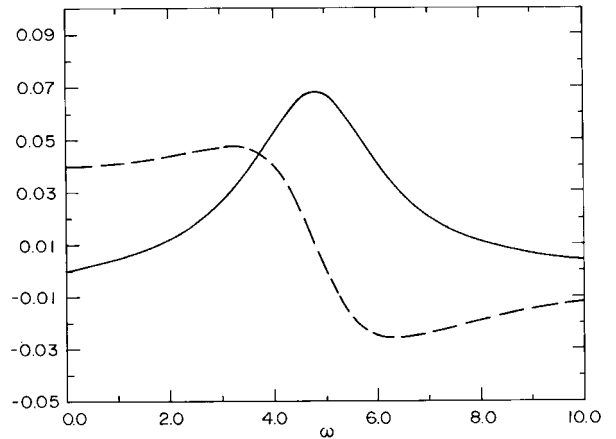


Figura 1. Comportamento da função dielétrica prevista pelo Modelo de Lorentz em termos da frequência da onda incidente no meio: $Re\{\hat{\varepsilon}(\omega) - 1\}$ da equação (6) (linha tracejada) e $Im\{\hat{\varepsilon}(\omega)\}$ da equação (7) (linha cheia).

Nosso interesse aqui é explicitar uma particularidade que aparece nesse resultado. Observando a parte imaginária na Figura 1, notamos que a tangente geométrica em cada ponto (isto é, a derivada), tem um comportamento similar ao da parte real. Para testar essa indicação qualitativa, efetuamos a derivação numérica da parte imaginária da função dielétrica. O resultado, comparado com $Re\{\hat{\varepsilon}(\omega) - 1\}$ da Figura 1, é mostrado na Figura 2. Vemos que, de fato, os comportamentos são similares, dentro de certas aproximações.

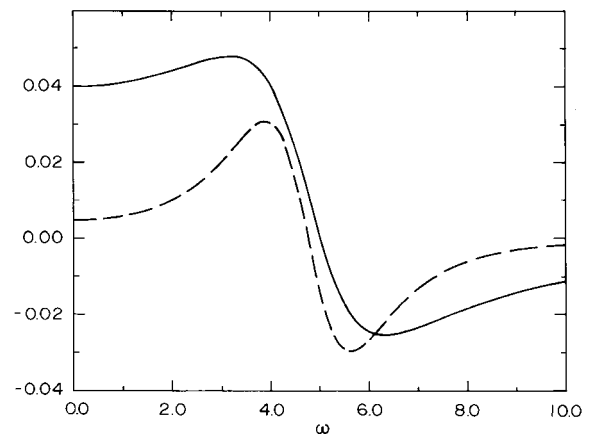


Figura 2. Comparação entre $Re\{\hat{\varepsilon}(\omega) - 1\}$ da Figura 1 (linha cheia) e a derivada numérica de $Im\{\hat{\varepsilon}(\omega)\}$ da Figura 1 (linha tracejada).

Os resultados sugerem que derivando (7) em relação a ω , utilizando aproximações adequadas e comparando com (6) deve-se conseguir mostrar algebricamente que

¹ Para gases, a contribuição dos arredores do oscilador pode ser desprezada, isto é, podemos considerar $\eta = 0$. Portanto, para essa ampla classe de dielétricos, a frequência efetiva, ω_l , pode ser aproximada pela própria frequência natural, ω_0 .

$$\operatorname{Re}\{\hat{\varepsilon}(\omega) - 1\} \propto \frac{\partial \operatorname{Im}\{\hat{\varepsilon}(\omega)\}}{\partial \omega}. \quad (8)$$

Pode-se fazer isso como exercício. Entretanto nosso objetivo neste trabalho é mostrar que a correlação expressa em (8), sugerida exclusivamente com base no modelo fenomenológico de Lorentz, pode ser demonstrada a partir de uma abordagem muito mais ampla. Para tanto, na seção seguinte vamos introduzir os conceitos de Causalidade, Analiticidade e Relações de Dispersão de forma totalmente independente do Modelo de Lorentz. Na seção IV faremos a conexão desses conceitos com o modelo e demonstraremos (8) algebricamente, sem considerar os detalhes expressos por (6) e (7).

III. Causalidade, Analiticidade e Relações de Dispersão

Três princípios básicos utilizados em teorias axiomáticas de campos são: *Covariância Relativística*, *Unitaridade* e *Causalidade* [Nussenzveig 1972]. A condição de causalidade, que é nosso interesse neste trabalho, pode ser formulada de diferentes maneiras dependendo da abordagem adotada. Em linhas gerais, essa condição significa que o efeito não pode preceder a causa, desde que causa e efeito sejam bem definidos. Este enunciado é denominado *Condição de Causalidade Primitiva*.

Nesta seção consideraremos um sistema físico genérico que correlaciona sinais de entrada e saída através de uma Função Resposta (seção III.1) genérica. Impondo-se as condições de Causalidade Primitiva e Linearidade além de algumas condições úteis ao desenvolvimento dos cálculos, deduziremos as chamadas Relações de Dispersão, que conectam as partes real e imaginária da Função Resposta. Esse resultado geral, independente de um sistema físico específico será utilizado na seção IV para tratar o problema que deixamos em aberto na seção anterior.

III.1 Hipóteses Básicas

Consideremos um sistema físico genérico, que a um sinal de entrada $I(t)$ (excitação dependente do tempo) responde com um sinal de saída $O(t)$. Em princípio esse sistema é uma “caixa preta” que pode representar um circuito elétrico, um alvo espalhador, um sistema mecânico, térmico, etc... Imporemos cinco condições aos fenômenos de entrada e saída do sistema [Nussenzveig 1972]:

1) *Linearidade* : o sinal de saída é um funcional linear do sinal de entrada. Algebricamente, se G representa a Função Resposta do sistema (resposta a um pulso instantâneo), podemos expressar essa condição por

$$O(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, t') I(t') dt'. \quad (9)$$

Assim, $G(t, t')$ é o núcleo do funcional.

2) *Invariância por Translação Temporal* : se o sinal de entrada sofre um deslocamento temporal, digamos $\Delta\tau$, $I(t + \Delta\tau)$, o mesmo deslocamento é associado ao sinal de saída : $O(t + \Delta\tau)$. Algebricamente isso significa que $G(t, t')$ depende somente da diferença $t - t'$:

$$G(t, t') = G(\tau), \quad \tau = t - t' \quad (10)$$

3) *Causalidade Primitiva* : o efeito não pode preceder a causa no tempo. Isso significa que se $I(t) = 0$ para $t < t_0$ então $O(t) = 0$ para $t < t_0$. Isso impõe uma condição para $G(\tau)$ que pode ser algebricamente expressa por

$$G(\tau) = 0, \quad \tau < 0 \quad (11)$$

Essas são as três hipóteses essenciais de uma abordagem geral. Adicionaremos mais duas de caráter prático para facilitar a abordagem matemática. Situações nas quais as condições seguintes não são verificadas são discutidas em [Nussenzveig 1972].

4) Os sinais de entrada, saída e a Função Resposta do sistema possuem transformadas de Fourier bem definidas.

Denotaremos:

$$i(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(t) \exp(i\omega t) dt, \quad I(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} i(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega, \quad (12)$$

$$o(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} O(t) \exp(i\omega t) dt, \quad O(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} o(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega, \quad (13)$$

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\tau) \exp(i\omega \tau) d\tau, \quad G(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) \exp(-i\omega \tau) d\omega. \quad (14)$$

5) O coeficiente de Fourier $g(\omega)$ da resposta $G(\tau)$ é quadrado integrável:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(\omega)|^2 d\omega < C, \quad C = \text{constante}. \quad (15)$$

Vemos que essas condições não são fortemente restritivas, podendo estar associadas a uma ampla gama de sistemas físicos. Veremos a seguir algumas consequências dessas hipóteses.

III.2 Convolução

As equações (9) e (10) definem o chamado *Produto de Convolução* [Arfken 1970]

$$O(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-t')I(t')dt' \equiv G(t) \otimes I(t).$$

Pode-se provar que a transformada de Fourier do produto de convolução é igual ao produto das transformadas dos fatores (teorema da convolução). Então, das equações (12), (13) e (14) temos que

$$o(\omega) = g(\omega)i(\omega). \quad (16)$$

Essa relação é essencial neste trabalho e será utilizada na seção IV para fazermos a conexão com o Modelo de Lorentz.

III.3 Causalidade e Analiticidade

Nosso sistema genérico é caracterizado pela função resposta $G(\omega)$ ou $g(\tau)$, relacionadas por (14).

Mostraremos aqui que o Princípio da Causalidade implica na definição de um domínio de analiticidade para $g(\omega)$ quando consideramos ω uma variável complexa. De fato, de (14) e do Princípio da Causalidade expresso por (11) concluímos que

$$g(\omega) = \int_0^{\infty} G(\tau) \exp(i\omega \tau) d\tau, \quad \tau > 0.$$

Considerando ω uma variável complexa, $\hat{\omega} = \omega_r + i\omega_i$, teremos para g também complexa

$$\hat{g}(\hat{\omega}) = \int_0^{\infty} G(\tau) \exp(i\omega_r \tau) \exp(-\omega_i \tau) d\tau.$$

Então, sendo $\tau > 0$ teremos divergência se $\omega_i < 0$. Porém, sendo $g(\omega)$ quadrado integrável pela hipótese (15), a função $g(\omega)$ é bem definida se $\omega_i > 0$. Logo, sob as hipóteses feitas obtemos que

$\hat{g}(\hat{\omega})$ é analítica no semiplano superior ($\omega_i > 0$).

Assim, a condição de Causalidade leva à definição de uma região de analiticidade para a transformada de Fourier da função resposta do sistema. Com isso podemos utilizar os resultados da Teoria das Funções Analíticas na região correspondente, o que faremos a seguir.

III.4 Analiticidade e Relações de Dispersão

A propriedade de analiticidade de uma função permite o estabelecimento de correlações entre suas partes real e imaginária. Nesta seção vamos deduzi-las para $\hat{g}(\hat{\omega})$ obtendo as chamadas Relações de Dispersão envolvendo $Re\{\hat{g}(\omega_r)\}$ e $Im\{\hat{g}(\omega_r)\}$.

Sendo $\hat{g}(\hat{\omega})$ analítica no semiplano superior, se Γ é um caminho fechado nessa região, $\hat{\omega}$ um ponto interior a Γ e $\hat{\omega}'$ um ponto sobre Γ , pelo Teorema de Cauchy [Arfken 1970]:

$$\hat{g}(\hat{\omega}) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\hat{g}(\hat{\omega}')}{\hat{\omega}' - \hat{\omega}} d\hat{\omega}'.$$

Nosso interesse é determinar $g(\omega_r)$ como uma integral em frequências reais, de $-\infty$ a $+\infty$. Para tanto vamos realizar uma integração no plano complexo considerando o contorno Γ indicado na figura 3. Denotando o ponto interno a Γ por $\hat{\omega} = \omega_r + i\epsilon$ e um ponto do contorno por $\hat{\omega}' = \omega'_r + i\omega'_i$, podemos abrir a integral nos dois trechos formados pela parte do eixo real de $-R$ a R e a semicircunferência C_R de raio R :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-R}^{+R} \frac{\hat{g}(\omega'_r)}{\omega'_r - (\omega_r + i\epsilon)} d\omega'_r + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{\hat{g}(\hat{\omega}')}{\hat{\omega}' - (\omega_r + i\epsilon)} d\hat{\omega}'$$

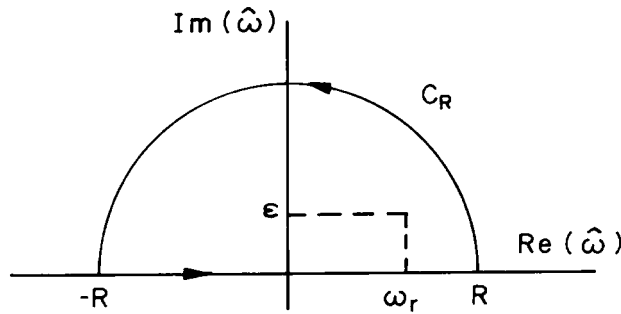


Figura 3. Contorno fechado Γ formado pelo segmento do eixo real de $-R$ a R e a semi-circunferência C_R de raio R .

Para obter a integral desejada tomamos o limite para $R \rightarrow \infty$:

$$\hat{g}(\hat{\omega}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{g}(\omega'_r)}{\omega'_r - (\omega_r + i\epsilon)} d\omega'_r + \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{\hat{g}(\hat{\omega}')}{\hat{\omega}' - (\omega_r + i\epsilon)} d\hat{\omega}' \quad (17)$$

Sobre o caminho C_R temos $\hat{\omega}' = R \exp(i\theta')$ e $d\hat{\omega}' = iR \exp(i\theta') d\theta'$, de modo que a segunda integral no segundo membro da equação anterior é expressa por

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \frac{\hat{g}(R \exp(i\theta'))}{R \exp(i\theta') - (\omega_r + i\epsilon)} iR \exp(i\theta') d\theta'.$$

Pode-se demonstrar que sendo \hat{g} quadrado integrável (ou que vá a zero mais rápido que $1/R$) o limite acima é nulo [Nussenzveig 1972], de modo que em (17) temos somente a integral em ω'_r . Como queremos a expressão para $\hat{g}(\omega_r)$, tomamos o limite:

$$\hat{g}(\omega_r) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \hat{g}(\omega_r + i\epsilon) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{g}(\omega'_r)}{\omega'_r - (\omega_r + i\epsilon)} d\omega'_r,$$

que podemos expressar por

$$\hat{g}(\omega_r) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{g}(\omega'_r)}{(\omega'_r - \omega_r) - i\varepsilon} d\omega'_r.$$

Sendo a integral imprópria e envolvendo um termo da forma $1/[x - i\varepsilon]$, podemos utilizar a Identidade de Dirac expressa na forma “operacional” (Apêndice):

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x - i\varepsilon} = P \frac{1}{x} + i\pi\delta(x), \quad (18)$$

onde P indica o Valor Principal de Cauchy da integral [Byron e Fuller 1992], como explicado no Apêndice. Com isso,

$$\hat{g}(\omega_r) = \frac{1}{2\pi i} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{g}(\omega'_r)}{\omega'_r - \omega_r} d\omega'_r + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(\omega'_r) \delta(\omega'_r - \omega_r) d\omega'_r$$

e, portanto, da definição da função delta obtemos finalmente

$$\hat{g}(\omega_r) = \frac{1}{\pi i} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{g}(\omega'_r)}{\omega'_r - \omega_r} d\omega'_r, \quad (19)$$

que é a expressão desejada, envolvendo a integral no eixo real de $-\infty$ a $+\infty$. Vamos daqui para a frente retomar a notação de ω como variável real, ié, $\omega_r \rightarrow \omega$ e $\omega'_r \rightarrow \omega'$. Estando isso implícito e sendo $\hat{g}(\omega)$ uma função complexa de variável real, podemos expressar esta última como

$$\hat{g}(\omega) = Re\{\hat{g}(\omega)\} + iIm\{\hat{g}(\omega)\}.$$

Substituindo em (19) e usando a identidade de variáveis complexas obtemos as duas relações desejadas:

$$Re\{\hat{g}(\omega)\} = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Im\{\hat{g}(\omega')\}}{\omega' - \omega} d\omega', \quad (20)$$

$$Im\{\hat{g}(\omega)\} = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Re\{\hat{g}(\omega')\}}{\omega' - \omega} d\omega'. \quad (21)$$

Genericamente, qualquer par de funções satisfazendo essas equações é denominado um par de Transformadas de Hilbert [Byron e Fuller 1992]. Historicamente, uma relação desse tipo foi obtida pela primeira vez por R. L. Kronig em 1926 e independentemente por H. A. Kramers em 1927, no estudo do índice de refração para raios-X. Nesse caso as frequências eram positivas, resultado decorrente da condição de cruzamento: $Re\{\hat{g}(\omega)\}$ era função par de ω e $Im\{\hat{g}(\omega)\}$ função ímpar [Jackson 1983], [Byron e Fuller 1992]. Essas relações

ficaram conhecidas como relações de Kramers-Kronig e no caso geral, dada a dependência do índice de refração com a frequência, são referidas como Relações de Dispersão.

Verificamos, então, que, embora tenham tido uma origem eminentemente fenomenológica, as equações (20) e (21) são decorrentes de considerações muito mais gerais, como demonstrado nesta seção: são características de sistemas físicos genéricos que obedecem às condições de Linearidade, Invariância Temporal e Causalidade.

IV. Conexão Causalidade-Modelo de Lorentz

Nesta seção, caminhando de maneira independente do que ocorreu historicamente, faremos a análise do geral para o particular: estabeleceremos as conexões entre os resultados obtidos na seção III para o sistema físico genérico e os resultados do Modelo de Lorentz para a Função Dielétrica (seção II). Usando a informação do modelo de que a conexão sugerida envolvendo as partes real e imaginária ocorre próximo à frequência de ressonância (figura 2) demonstraremos algebricamente o resultado, expandindo a relação de dispersão genérica do tipo (21) (isto é, sem especificar $\hat{g}(\omega)$).

IV.1 Relações de Dispersão para a Função Dielétrica

Na seção III.2 vimos que em termos da frequência as funções de entrada e saída do sistema genérico são

correlacionadas pela equação (16)

$$o(\omega) = g(\omega)i(\omega).$$

Agora, no exemplo tratado sobre a propagação da onda eletromagnética num meio dielétrico, *podemos interpretar o campo aplicado $E(\omega)$ como a função de entrada (impulso) $i(\omega)$ e a polarização $P(\omega)$ do meio como o sinal de saída $o(\omega)$* . Como esses sinais se relacionam pela equação (4),

$$P = \chi E,$$

podemos interpretar a susceptibilidade χ como a função resposta $\hat{g}(\omega)$, ou ainda a função dielétrica (5)

$$\hat{\epsilon} = 1 + 4\pi\chi.$$

De fato, como vimos, o Modelo de Lorentz prevê uma função dielétrica complexa e dependente da frequência $\hat{\epsilon}(\omega)$, dada pelas equações (6) e (7). Supondo então que $P(\omega)$ e $E(\omega)$ (ou $P(t)$ e $E(t)$) obedecem às condições de linearidade, causalidade e invariância temporal (o que pode ser experimentalmente verificado numa variedade de casos), podemos identificar $\hat{g}(\omega)$ com $\hat{\epsilon}(\omega) - 1$, estabelecendo as relações de dispersão (20) e (21):

$$Re\{\hat{\epsilon}(\omega) - 1\} = \frac{1}{\pi}P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Im\{\hat{\epsilon}(\omega') - 1\}}{\omega' - \omega} d\omega', \quad (22)$$

$$Im\{\hat{\epsilon}(\omega) - 1\} = -\frac{1}{\pi}P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Re\{\hat{\epsilon}(\omega') - 1\}}{\omega' - \omega} d\omega'. \quad (23)$$

Como comentado, essas equações podem ser deduzidas a partir de considerações específicas sobre o Modelo de Lorentz, o que é feito na maioria dos livros texto [Jackson 1983], [Reitz, Milford e Christy 1991], etc.

IV.2 Comportamento Próximo ao Pico de Ressonância

As equações (22) e (23) são completamente genéricas, decorrentes do tratamento geral da seção III e apenas da identificação de $E(\omega)$ como causa e $P(\omega)$ como efeito. Nesta seção, sem utilizar a expressão detalhada de $\hat{\epsilon}(\omega)$ prevista pelo Modelo de Lorentz (equações (6) e (7)), vamos demonstrar a correlação sugerida (8), considerando apenas que o efeito ocorre “próximo” ao pico de ressonância (informação fenomenológica geral). Para expressar isso analiticamente, seja $2a$ a largura da região anômala e ω_l a frequência de ressonância efetiva (seção II, figura 1). Estamos interessados então na região

$$|\omega - \omega_l| \ll a. \quad (24)$$

Agora, de forma independente de modelo vamos introduzir essa condição nas relações de dispersão genéricas (22) e (23). A idéia é expandir $Im\{\hat{\epsilon}(\omega)\}$ no integrando e usar apenas (24) [Itô 1961]. A série de Taylor em torno de ω fornece:

$$Im\{\hat{\epsilon}(\omega')\} = Im\{\hat{\epsilon}(\omega)\} + \left. \frac{\partial Im\{\hat{\epsilon}(\omega')\}}{\partial \omega'} \right|_{\omega'=\omega} (\omega' - \omega) + \dots$$

Dada a região de interesse (24) limitaremos a integração entre os extremos $\omega_l - a$ e $\omega_l + a$ (onde o pico de absorção é significativo). Substituindo a expansão na expressão da parte real (22) obtemos

$$\begin{aligned} Re\{\hat{\epsilon}(\omega) - 1\} &= \frac{1}{\pi}P \int_{\omega_l - a}^{\omega_l + a} \left\{ \frac{Im\{\hat{\epsilon}(\omega)\}}{\omega' - \omega} + \left. \frac{\partial Im\{\hat{\epsilon}(\omega')\}}{\partial \omega'} \right|_{\omega'=\omega} + \dots \right\} d\omega' = \\ &= \frac{1}{\pi} \{Im\{\hat{\epsilon}(\omega)\} P \int_{\omega_l - a}^{\omega_l + a} \frac{d\omega'}{\omega' - \omega} + \left. \frac{\partial Im\{\hat{\epsilon}(\omega')\}}{\partial \omega'} \right|_{\omega'=\omega} P \int_{\omega_l - a}^{\omega_l + a} d\omega' + \dots\} = \\ &= \frac{1}{\pi} Im\{\hat{\epsilon}(\omega)\} \log \left[\frac{\omega_l + a - \omega}{\omega_l - a - \omega} \right] + \frac{2a}{\pi} \frac{\partial Im\{\hat{\epsilon}(\omega)\}}{\partial \omega} + \dots \end{aligned}$$

Agora, pela condição (24),

$$\frac{\omega_l + a - \omega}{\omega_l - a - \omega} \sim 1$$

e portanto em primeira ordem

$$\operatorname{Re}\{\hat{\varepsilon}(\omega) - 1\} \sim \frac{2a}{\pi} \frac{\partial \operatorname{Im}\{\hat{\varepsilon}(\omega)\}}{\partial \omega}. \quad (25)$$

que é o resultado procurado e também está de acordo com o comportamento analítico mostrado na figura 2.

É importante ressaltar que a informação fenomenológica aqui utilizada poderia ser obtida empiricamente. Assim apenas sabendo da existência do pico de absorção e de sua largura, o cálculo nesta seção mostra que (25) é deduzido de forma genérica, eq. (22), sem se fazer uso de uma dependência algébrica específica para $\hat{\varepsilon}(\omega)$ como as fornecidas pelo Modelo de Lorentz (equações (6) e (7)).

A eq. (25) mostra também que, com as aproximações consideradas, as partes real e imaginária são correlacionadas através de uma derivada, isto é, uma relação de dispersão derivativa, deduzida a partir da relação de dispersão integral (20). Pela condição (24), trata-se de uma relação quasi-local.

V. Conclusões e Observações Finais

Neste trabalho, através da associação das equações de campo da Eletrodinâmica Clássica a um modelo fenomenológico (clássico) para a estrutura granular da matéria (Lorentz), identificamos um efeito específico nas previsões do modelo, envolvendo as partes real e imaginária da função dielétrica (figura 2). Mostramos a seguir, de forma independente, que esse efeito não é decorrência exclusiva do modelo, mas está associado a um contexto mais amplo, envolvendo primeiros princípios (causalidade) e propriedades matemáticas gerais (linearidade, analiticidade). Demonstramos a correlação modelo-princípios através das equações (4) e (6), associando sinais de entrada e saída gerais ao campo E da onda e à polarização P do meio. O efeito referido foi algebricamente demonstrado na equação (25).

Com esse tipo de abordagem visamos exemplificar a importância e utilidade de, paralelamente ao estudo específico de um fenômeno, procurar situá-lo num contexto mais amplo, de modo a ser possível a identificação de propriedades mais gerais. Salientamos também que esse tipo de estratégia vem sendo utilizada nos dias atuais na busca de uma teoria efetiva das interações nucleares.

Agradecimentos

Agradecemos aos Professores Jorge Ivan Cisneros e Mário Alberto Tenan pela leitura do manuscrito, pelas críticas e sugestões e ao Professor Bruto Max Pimentel pelas referências sugeridas. Somos gratos ao CNPq pelo apoio financeiro.

Apêndice

Faremos aqui uma discussão heurística da Identidade de Dirac (18), utilizada na seção III.4,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x - i\varepsilon} = P \frac{1}{x} + i\pi\delta(x).$$

Uma demonstração formal envolve uma discussão sobre o Valor Principal de Cauchy e o tratamento da Função Delta através da Teoria de Distribuições [Byron e Fuller 1992]. A forma operacional acima aparece em integrandos que envolvem uma função de x . Chamando $F(x)$ essa função, considerada regular na origem e expressando

$$\frac{1}{x - i\varepsilon} = \frac{x + i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2},$$

vamos estudar o limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x)}{x - i\varepsilon} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x F(x)}{x^2 + \varepsilon^2} dx + i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon F(x)}{x^2 + \varepsilon^2} dx. \quad (A1)$$

Quando $\varepsilon \rightarrow 0$ a primeira integral à direita apresenta divergência na origem (integral imprópria) e portanto devemos determinar o Valor Principal de Cauchy

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{-\eta} \frac{x F(x)}{x^2 + \varepsilon^2} dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\eta}^{+\infty} \frac{x F(x)}{x^2 + \varepsilon^2} dx \right\} =$$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{-\eta} \frac{F(x)}{x} dx + \int_{\eta}^{+\infty} \frac{g(x)}{x} dx \right\} \equiv P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x)}{x} dx, \quad (A2)$$

onde P indica o Valor Principal.

Agora, para $F(x)$ regular na origem, a segunda integral à direita em (A1) é nula quando $\varepsilon \rightarrow 0$, exceto em $x = 0$ e como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} dx = \pi,$$

podemos, utilizando a definição da função delta, expressá-la na forma

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} F(x) dx = \pi \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \delta(x) dx. \quad (A3)$$

Logo, de (A1), (A2) e (A3),

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x)}{x - i\varepsilon} dx = P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x)}{x} dx + i\pi \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \delta(x) dx,$$

ou, em forma "operacional",

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x - i\varepsilon} = P \frac{1}{x} + i\pi \delta(x).$$

Referências

G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists* (Academic Press, New York, 1970).

F. W. Byron Jr. e R. W. Fuller, *Mathematics of Classical and Quantum Physics* (Dover, New York, 1992).

R. W. Christy, "Classical Theory of Optical Dispersion", *Am. Journal of Physics*, **40** (1972) 1403.

D. Itô, *Introdução à Teoria das Relações de Dispersão*, Instituto de Física Teórica - IFT, São Paulo (1961).

J. D. Jackson, *Eletrodinâmica Clássica* (Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1983).

G. Matthiae, "Proton and antiproton cross sections at high energies", *Rep. Prog. Phys.* **57** (1994) 743.

M. J. Menon, "Elementary amplitudes in the multiple diffraction theory of pp and $\bar{p}p$ elastic scattering", *Phys. Rev.* **D48** (1993) 2007; **D51** (1995) 1427.

H. M. Nussenzveig, *Causality and Dispersion Relations* (Academic Press, New York, 1972).

J. R. Reitz, F. J. Milford, R. W. Christy, *Fundamentos da Teoria Eletromagnética* (Editora Campus, Rio de Janeiro, 1991).

G. E. Stedman, "Green's Functions", *Contemp. Phys.* **9** (1968) 49.

K. R. Symon, *Mecânica* (Editora Campus, Rio de Janeiro, 1982).

J. Vanderlinde, *Classical Electromagnetic Theory* (John Wiley & Sons, Singapura, 1993).